


SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIÆ
$2.35
BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
Of Portsmouth, N. H.
(Class of 1842.)
Rec'd 9 Dec., 1864.

Grundzüge
einer
wissenschaftlichen Darstellung
der
Geometrie des Maasses.

Ein Lehrbuch

von

Dr. Oskar Schlömilch,
Professor der höheren Mathematik und analytischen Mechanik an der K. S. polytechnischen Schule zu Dresden, Mitglied der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

Erster Theil.

Planimetrie und ebene Trigonometrie.

Dritte Auflage
mit in den Text gedruckten Holzschnitten.

EISENACH,
bei Joh. Fr. Baerecke.
1859.

Vorrede zur dritten Auflage.

Seit dem Erscheinen der zweiten Auflage bin ich von so vielen Seiten her mit brieflichen Bemerkungen über das vorliegende Werkchen erfreut worden, dass es mir nicht möglich war, jedem Einzelnen zu antworten; ich spreche daher an dieser Stelle im Allgemeinen meinen Dank für alle jene Zuschriften aus. Soweit es ohne grössere Umgestaltung möglich war, habe ich die erwähnten Notizen benutzt, namentlich da, wo es sich um genauere Ausdrucksweise oder bessere Anordnung handelte; zur Mitgabe von Uebungsaufgaben, Excursen u. dergl. konnte ich mich dagegen nicht entschliessen, weil hierdurch das Buch seinen Charakter, nur das Nothwendige und dieses ausführlich zu geben, verloren haben würde. Zufolge dieses Princips ist auch die trigonometrische Auflösung der cubischen Gleichungen, als nicht nothwendig zur Trigonometrie gehörig, weggelassen und dafür die directe Berechnung der trigonometrischen Functionen (d. h. die Entwickelung der Reihen für $\sin v$ und $\cos v$) im Anhange zur Tri-

gonometrie gezeigt worden. Dies halte ich nicht gerade für einen überflüssigen Luxus, denn einerseits liegt darin die tiefere Auffassung eines unzweifelhaft in die Geometrie gehörenden Problemes, andererseits braucht man die Anfänge jener Reihen bei den späteren Untersuchungen über sphärische Dreiecke von geringer Krümmung sowie bei verschiedenen Aufgaben des praktischen Zeichnens, wovon ein Beispiel mitgetheilt worden ist.

Für den Schulgebrauch des Buches wiederhole ich die Bemerkung, dass man beim ersten Unterrichte wohl thun wird, die etwas schwereren §§. 14 und 15 einstweilen zu überschlagen und durch eine, wenn auch weniger strenge, doch fasslichere Erörterung über die Ausmessung gerader Linien zu ersetzen. Ebenso sind die Anhänge (S. 163 und S. 244) nur für geübtere Leser bestimmt.

Dresden, am 24. September 1859.

Schlömilch.

Inhalt.

Verbesserungen.

Seite	51	Zeile	15	v. u.	statt	*FDK*	lies *EDK*.
„	57	„	6	v. u.	„	auseinander	l. aneinander.
„	60	„	8	v. u.	„	$\lambda_3 r_2 + {}_3$	l. $\lambda_3 r_2 + r_3$.
„	64	„	8	v. u.	„	r^{s-1}	l. r_{s-1}.
„	78	„	8	v. u.	„	$AB'C'$	l. $A'B'C'$.
„	82	„	14	v. u.	„	$C'D'E'$	l. $\angle C'D'E'$.
„	86	„	3	v. u.	„	$\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^3$	l. $\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$.
„	100	„	10	v. u.	„	$\angle AMC$	l. $\angle AMB$.
„	106	„	15	v. o.	„	$\angle AMQ$	l. $\angle APM$.
„	110	„	7	v. u.	„	CT	l. BT.

Einleitung.

Die Vorstellung eines nach allen Seiten hin unbegränzten Raumes bildet die Grundlage aller Untersuchungen, mit denen sich die Geometrie beschäftigt. Diese Untersuchungen selbst beziehen sich aber nicht auf die Eigenschaften des Raumes als eines Ganzen, sondern vielmehr auf die Eigenschaften derjenigen Gegenstände, welche im Raume gefunden oder wenigstens darin gedacht werden können, und auch hier beschränkt sich die Geometrie in so fern, als sie nur eben die aus der Räumlichkeit jener Gegenstände hervorgehenden Eigenschaften derselben betrachtet, dagegen von ihrem materiellen Inhalte völlig absieht. Nennen wir dasjenige, was von den räumlichen Gegenständen übrig bleibt, wenn man sich die materiellen Bestandtheile und deren Eigenschaften (Farbe, Schwere, Elasticität u. s. w.) hinweggenommen denkt, der Kürze wegen „eine räumliche Gestalt“, so können wir sagen: die Geometrie ist die Wissenschaft von den räumlichen Gestalten.

Vorausgesetzt wird hierbei, dass man die Grundeigenschaften des Raumes bereits kenne; diese sind: 1) Ausdehnung nach den drei verschiedenen Richtungen der Länge, der Breite und der Höhe (Dicke oder Tiefe), welche man die drei Dimensionen des Raumes zu nennen pflegt; 2) Unendlichkeit, so dass also die Möglichkeit räumlicher Gegenstände nirgends aufhört; 3) Stetigkeit (Continuität), der zufolge an keiner Stelle eine Unterbrechung des Raumes vorhanden ist, endlich 4) Gleichartigkeit aller Theile des Raumes, vermöge welcher ver-

schiedene Räume als Theile eines und desselben unendlichen Raumes angesehen werden können.

Denkt man sich aus dem unendlichen Raume ein nach allen Seiten hin begränztes Stück desselben ausgesondert, so erhält man einen geometrischen Körper, die inhaltlose Form eines physischen Körpers; die Gränzen jenes Körpers heissen Flächen, die Gränzen der Flächen sind die Linien, die Gränzen der Linien endlich sind die Punkte. Der Körper besitzt, wie der Raum selbst, drei Dimensionen, die Fläche dagegen nur zwei derselben: Länge und Breite, während ihr die Dicke fehlt, die Linie hat nur eine einzige Dimension: die Länge, der Punkt endlich gar keine; er ist völlig ausdehnungslos und dient nur, um eine Stelle im Raume zu bezeichnen, ohne selbst irgend einen Theil des Raumes zu umfassen.

An die Erklärungen, welche wir so eben von den verschiedenen räumlichen Gestalten (Körper, Fläche, Linie, Punkt) gegeben haben, knüpft sich sogleich eine Folgerung, wenn man sich erinnert, dass die Gränze eines Gegenstandes nicht ein Theil desselben ist, sondern im Gegentheil angiebt, wo jener Gegenstand sein Ende findet; es folgt nämlich aus dieser Bemerkung, dass kein Theil eines Körpers eine Fläche, kein Theil einer Fläche eine Linie und kein Theil einer Linie ein Punkt sein kann, dass sich also auch umgekehrt aus Punkten keine Linie, aus Linien keine Fläche und aus Flächen kein Körper zusammensetzen lässt. Wohl aber kann durch stetige Bewegung eines Punktes eine Linie beschrieben oder construirt werden (indem man die Linie gewissermaassen als die Spur ansieht, welche der Punkt hinter sich zurücklässt), ebenso durch stetige Bewegung der Linie eine Fläche und durch stetige Bewegung der Fläche ein Körper.

Die genannte Entstehungsweise der geometrischen Gestalten führt von selbst auf einige der wichtigsten Grundbegriffe der Geometrie. Soll nämlich ein Punkt sich stetig fortbewegen, um eine Gerade zu beschreiben, so muss er die Stelle des Raumes, an welcher er sich befindet, verlassen und sich nach einer anderen Gegend des Raumes begeben, d. h. er muss in irgend einer Richtung weiter

geben. Hierbei können nun zwei Fälle eintreten; entweder nämlich behält der Punkt bei seiner Bewegung die einmal eingeschlagene Richtung fortwährend bei oder nicht, wodurch natürlich verschiedene Linien entstehen. Im ersten Falle nennt man die beschriebene Linie eine gerade Linie oder kurzweg Gerade und kann daher sagen: die gerade Linie ist diejenige, welche durchaus nach einer und derselben Richtung verläuft; da ferner wegen der unendlichen Ausdehnung des Raumes jenem Verlaufe nirgends ein Hinderniss entgegensteht, so kann jede Gerade als unbegränzt gedacht werden. Wenn dagegen die Bewegung des stetig fortrückenden Punktes nicht in einer und derselben Richtung vor sich geht, so ist zu unterscheiden, ob die Linie ihre Richtung sprungweis, oder stetig, oder bald sprungweis und bald stetig ändert, und dann treten folgende Benennungen ein: eine Linie heisst eine gebrochene, wenn sie sprungweis ihre Richtung ändert, also aus Theilen besteht, welche, für sich betrachtet, gerade sind; sie heisst eine krumme Linie, wenn sie fortwährend ihre Richtung ändert, mithin kein Theil von ihr gerade ist; sie heisst endlich eine gemischte, wenn sie ihre Richtung bald sprungweis, bald stetig ändert, d. h. aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt ist.

Lässt man weiter die Gerade sich stetig fortbewegen, so entsteht eine Fläche, auf welcher sich stellenweis nach bestimmten Richtungen gerade Linien ziehen lassen; eine solche Fläche nennt man eine Regelfläche. Die wichtigste unter diesen Flächen ist die ebene Fläche oder Ebene; sie entsteht, wenn eine Gerade sich so bewegt, dass sie immer durch einen festen Punkt geht und zugleich an einer gegebenen Geraden hingleitet. Legt man durch irgend zwei Punkte einer solchen Fläche eine Gerade, so gilt von dieser der Grundsatz, dass sie ihrer ganzen Ausdehnung nach in die Ebene fällt; auf einer Ebene können daher nach allen Richtungen Gerade gezogen werden. Jede Fläche, welche diese Eigenschaft nicht besitzt, wird als eine krumme Fläche bezeichnet. Besteht die Fläche aus Theilen, welche, für sich betrachtet, Ebenen

sind, so kann man sie eine gebrochene Fläche nennen; eine gemischte Fläche endlich wäre eine solche, die aus ebenen und krummen Flächen zusammengesetzt ist.

Nachdem wir uns mit den verschiedenen räumlichen Gestalten, welche den Gegenstand der Geometrie bilden, im Allgemeinen bekannt gemacht haben, liegt es uns ob, genauer auf die Betrachtung der einzelnen Arten jener Gestalten einzugehen, um ihre etwaigen Eigenschaften zu erforschen. Dies gäbe eigentlich vier verschiedene Abtheilungen: die Lehre von den Punkten, von den Linien, von den Flächen und von den Körpern. Nun bietet aber der Punkt so wenig Stoff zu einer wissenschaftlichen Untersuchung dar (wir haben in der That schon Alles gesagt, was sich überhaupt von ihm sagen lässt), dass diese Abtheilung sehr dürftig ausfallen würde, ausserdem setzt auch die Aufstellung mehrerer Punkte und ebenso die mehrerer Linien schon die verschiedenen Dimensionen des Raumes (also die Lehre von den Körpern) so nothwendig voraus, dass man sich zu einer Abänderung jener Eintheilung genöthigt gesehen hat und die Geometrie in nur zwei Haupttheile zerspaltet. Der erste von ihnen, die Geometrie der Ebene oder Planimetrie, beschäftigt sich mit denjenigen Raumgestalten, welche in einer Ebene Platz finden, der zweite dagegen, die Geometrie des Raumes oder Stereometrie, betrachtet solche räumliche Gestalten, welche alle drei Dimensionen des Raumes voraussetzen, also nicht in einer Ebene construirt werden können.

Geometrie der Ebene.

ERSTES BUCH.

Die geradlinigen Gebilde.

Cap. I.

Die Entstehung der geradlinigen Gebilde.

§. 1.

Eine Gerade.

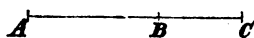
Die Eigenschaften der geraden Linie sind fast sämmtlich so ursprüngliche und einfache, dass sich von denselben kein Beweis, sondern nur ein Nachweis geben lässt, indem man zeigt, wie unzertrennlich dieselben mit der Vorstellung der Geraden zusammenhängen.

a. Das einzige Merkmal, welches wir an einer unbegränzten Geraden wahrnehmen, ist ihre Richtung; gleichwohl aber reicht die Kenntniss dieser Richtung nicht hin, um die Gerade selbst so unzweifelhaft zu bestimmen, dass man sie von jeder anderen Geraden sogleich unterscheiden würde, denn es kann offenbar mehrere Gerade geben, welche dieselbe Richtung besitzen, ohne deshalb mit jener völlig einerlei zu sein, und man erhält in der That solche Gerade, wenn man von verschiedenen Punkten des Raumes aus jedesmal nach einer und derselben Richtung fortgeht. Ist dagegen ausser der Richtung der Geraden noch der Punkt bekannt, von welchem sie aus oder durch welchen sie hindurch geht, so kann kein Zweifel mehr über die Lage der Geraden sein, d. h.: Eine Gerade ist

ihrer Lage nach bestimmt, sobald ein Punkt in ihr und ihre Richtung gegeben sind. Hieraus folgt unmittelbar, dass alle Geraden, welche nach einer und derselben Richtung durch einen und denselben Punkt gehen, völlig in einander fallen oder, wie man zu sagen pflegt, sich decken.

b. Nehmen wir, statt eines Punktes, zwei Punkte (A und B) in einer geraden Linie an, so sondert sich aus der unbegränzten Geraden ein begränztes Stück (eine sogenannte Strecke) aus (die Gerade zwischen A und B), von welcher jene Punkte die Endpunkte sind. Ueber diese begränzte Gerade gelten folgende Grundsätze, erstens: zwischen zwei gegebenen Punkten ist nur eine einzige Gerade möglich (wohl aber beliebig viele krumme Linien), und zweitens: von allen Linien zwischen zwei Punkten ist die gerade Linie die kürzeste. Man nennt daher auch die gerade Linie zwischen zwei Punkten den Abstand oder die Entfernung der beiden Punkte von einander und bezeichnet eine Gerade dadurch, dass man die an ihre Endpunkte gesetzten Buchstaben in der Rede wie in der Schrift unmittelbar auf einander folgen lässt (AB z. B. bedeutet die Gerade zwischen A und B).

Fig. 1.



c. Von den beiden Merkmalen einer begränzten geraden Linie (Richtung und Länge) ist nun jedes einer Veränderung fähig. Geht die Gerade, welche von einem gegebenen Punkte ausläuft, in eine andere Richtung über, ohne jedoch ihren Anfangspunkt zu verlassen, so sagt man, sie habe sich um ihren Anfangspunkt gedreht; Drehung ist demnach Veränderung der Richtung. Behält die gerade Linie bei dieser Bewegung auch noch ihre Länge bei, so beschreibt ihr Endpunkt eine Linie, welche die Eigenschaft besitzt, dass jeder ihrer Punkte von dem festen Anfangspunkte der Geraden gleich weit, und zwar um die Länge der unveränderlichen Geraden, entfernt liegt; die so entstehende Linie heisst ein Kreis, der feste Punkt: sein Mittelpunkt oder Centrum, und die unveränderliche Gerade: sein Halbmesser oder Radius.

d. Aendert zweitens die Gerade ihre Grösse, so tritt eine Verlängerung oder Verkürzung derselben ein; so kann die Gerade AB soweit verlängert werden, dass sie die neue Grösse AC erhält, also um die Strecke BC zugenommen hat. Man nennt dann AC die Summe von AB und BC (in Zeichen $AC = AB + BC$) und umgekehrt AB die Differenz zwischen AC und BC ($AB = AC - BC$). Geschieht die Zunahme so, dass die Gerade um ihre eigene Grösse mehrmals nach einander verlängert wird, so vervielfacht man die Gerade; wenn z. B. $AB = BC = CD$ u. s. w. ist, hat man $AC = 2\,AB$, $AD = 3\,AB$ u. s. f. Umgekehrt muss es auch möglich sein, eine gegebene Gerade in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen; denn gesetzt, der n^{te} Theil einer gegebenen Geraden wäre nicht angebbar, so würde auch das Doppelte, Dreifache, Vierfache u. s. w. dieses n^{ten} Theiles nicht anzugeben sein. Unter diesen auf einander folgenden Vielfachen kommt aber auch das $n$fache jenes n^{ten} Theiles vor und mithin wäre das $n$fache vom n^{ten} Theile einer Geraden, d. h. die Gerade selber, nicht angebbar, was der Voraussetzung widerspricht, dass die Gerade gegeben vorliegt. — Fassen wir nun das Bisherige zusammen, so dürfen wir sagen: Es ist jederzeit möglich, Gerade von gegebenen Längen zu addiren, zu subtrahiren, zu vervielfachen und zu theilen.

Fig. 2.

A B C D E F G

§. 2.

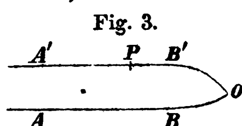
Zwei Gerade.

Da sich an einer begränzten Geraden die beiden Merkmale Richtung und Länge unterscheiden lassen, so kann man zwei Gerade auf doppelte Weise mit einander vergleichen, indem man entweder ihre Richtungen, oder, im Fall beide begränzt sind, ihre Längen in's Auge fasst. Hier soll nur die erste dieser Vergleichungen vorgenommen werden, die zweite dagegen überlassen wir dem späteren Capitel von der Ausmessung geradliniger Gebilde.

Hinsichtlich der Richtungen zweier Geraden sind nun zwei Fälle möglich; entweder nämlich haben beide Gerade eine und dieselbe Richtung, oder sie laufen nach verschiedenen Richtungen.

I. Zwei gerade Linien, welche gleiche Richtung besitzen, ohne in einander zu fallen, wie z. B. *AB* und *A'B'*, heissen P a r a l l e l e n, was durch *AB* // *A'B'* bezeichnet wird. Man bemerkt leicht, dass zwei solche Gerade immer neben einander herlaufen und niemals zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängern möge. Denn gesetzt, sie kämen in dem Punkte *O* zusammen, so hätten wir zwei Gerade, welche durch einen und denselben Punkt gingen und zufolge der Voraussetzung einerlei Richtung besässen; dergleichen Gerade fallen aber nach §. 1*b* völlig in einander und das widerspricht der Voraussetzung; mithin können die Geraden *AB* und *A'B'* nicht zugleich durch den Punkt *O* gehen, d. h. P a r a l l e l e n t r e f f e n n i e z u s a m m e n, w i e w e i t m a n s i e a u c h v e r l ä n g e r n m ö g e.

Fig. 3.



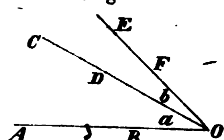
Kennt man von zwei parallelen Geraden die eine, von der andern aber nur einen Punkt, wäre also z. B. die Gerade *AB* gegeben und ausser ihr der Punkt *P*, so ist die Lage der zweiten Parallele (*A'B'*) vollkommen bestimmt; denn einerseits weiss man, dass sie durch einen gegebenen Punkt (*P*) gehen soll, andererseits kennt man ihre Richtung, weil die letztere mit der Richtung der ersten Geraden (*AB*) übereinstimmen soll, und folglich hat man nach §. 1*b* den Satz: Z u e i n e r g e g e b e n e n G e r a d e n l ä s s t s i c h d u r c h e i n e n a u s s e r i h r l i e g e n d e n P u n k t j e d e r z e i t e i n e, a b e r a u c h n u r e i n e, P a r a l l e l e z i e h e n.

II. Weit mannichfaltiger ist der zweite Fall, wenn die beiden Geraden verschiedene Richtungen (in einer Ebene) besitzen. Hier stellen wir den Grundsatz auf: G e r a d e v o n v e r s c h i e d e n e n R i c h t u n g e n i n e i n e r E b e n e m ü s s e n, h i n r e i c h e n d v e r l ä n g e r t, n o t h w e n d i g z u s a m m e n t r e f f e n; s i e h a b e n d a n n e i n e n,

aber auch nur einen, Punkt mit einander gemein*).

Sind nun die Geraden wirklich soweit verlängert, dass sie in einem Punkte zusammentreffen, wie z. B. *AB* und *CD* in *O*, so entsteht an diesem Punkte ein neues geometrisches Gebild: der Winkel; dieser ist der Unterschied unter den Richtungen der beiden in einem Punkte zusammenstossenden (oder von ihm auslaufenden) geraden Linien; die Geraden, von welchen der Winkel gebildet wird, heissen seine Schenkel, und der Punkt, in welchem sie zusammentreffen, der Scheitel oder die Spitze des Winkels. Bezeichnet wird ein Winkel entweder, wenn keine Verwechselung möglich ist, durch einen einzigen an seinen Scheitel gesetzten Buchstaben (*O*), oder durch einen kleinen zwischen den Schenkeln angebrachten Buchstaben (*a*), oder durch drei Buchstaben, von denen zwei an den Schenkeln und einer an dem Scheitel stehen; jedoch ist hierbei die Regel festzuhalten, dass der Scheitelbuchstabe jederzeit den mittelsten Platz erhalten muss (also *AOC* oder *COA*, oder *BOD* oder *DOB*). Statt des Wortes „Winkel" pflegt man gewöhnlich das einfache Zeichen ∠ zu setzen.

Fig. 4.



*) In den beiden oben ausgesprochenen Sätzen:

1) Gerade von gleicher Richtung treffen nicht zusammen,
2) Gerade von verschiedenen Richtungen treffen immer zusammen,

ist angenommen, dass man die Gleichheit oder Ungleichheit der Richtungen von Hause aus (*a priori*) kenne und man entscheidet daraus das Zusammentreffen oder Nichtzusammentreffen der Geraden. Ebenso leicht kann auch umgekehrt verfahren werden, indem man von dem Zusammentreffen oder Nichtzusammentreffen der Geraden auf die Gleichheit oder Ungleichheit ihrer Richtungen zurückschliesst; nämlich:

3) Zwei nicht zusammentreffende Gerade haben gleiche Richtung,

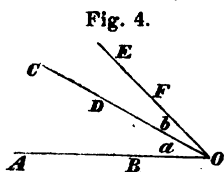
denn wenn sie verschiedene Richtungen einschlügen, so müssten sie nach No. 2 zusammentreffen, was gegen die Voraussetzung ist;

4) Zwei zusammentreffende Gerade haben verschiedene Richtungen,

denn hätten sie gleiche Richtungen, so träfen sie nach Nr. 1 nicht zusammen, was der Voraussetzung widerspricht.

Man kann sich die Entstehung des Winkels noch auf eine andere Weise denken, welche zwar von der vorigen nicht wesentlich verschieden ist, aber die Einsicht in die Natur des Winkels sehr erleichtert. Lassen wir nämlich eine Gerade *OA* sich um ihren Anfangspunkt *O* drehen, bis sie in die Lage *OC* gelangt ist, so entsteht ebenfalls der Winkel *AOC* und giebt die Grösse dieser Drehung an. Zu demselben Winkel würde man auch gelangt sein, wenn man umgekehrt von der Geraden *OC* ausgegangen wäre und diese in die Lage von *OA* zurückgedreht hätte, gleichwohl aber ist ein kleiner Unterschied zwischen diesen beiden Drehungen; beide haben zwar dieselbe Grösse, aber im ersten Falle geschah die Drehung rechts herum (wie bei der Schraube), im zweiten Falle links herum, und man muss daher bei einer Drehung ausser der Grösse noch die Drehungsrichtung berücksichtigen. Wir unterscheiden daher auch an dem Winkel die zwei Merkmale der Grösse und der Drehungsrichtung; die erste kann sehr verschieden sein, der letzten dagegen giebt es nur zwei einander entgegengesetzte (rechts herum und links herum).

Fig. 4.

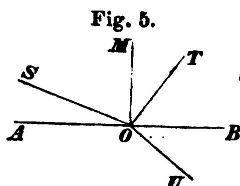


Es ist nun leicht einzusehen, dass zwei Winkel, welche durch gleich grosse Drehungen nach derselben Drehungsrichtung (man sagt auch: Drehungen in demselben Sinne) entstanden sind, völlig gleich sein müssen, wie denn überhaupt zwei Objecte, die in allen ihren Merkmalen übereinstimmen, gar nicht von einander unterschieden werden können. Dagegen ist ein Winkel grösser als der andere, wenn er durch eine grössere Drehung in demselben Sinne hervorgebracht wurde. Denken wir uns z. B. die Gerade *OA* gedreht, bis sie in die Richtung *OC* kommt, und darauf die Drehung in derselben Richtung fortgesetzt bis zur Lage *OE*, so ist der Winkel *AOE* grösser, und zwar um den Winkel *COE* grösser, als der ursprüngliche Winkel *AOC*; wir nennen dann den Winkel *AOE* die Summe der Winkel *AOC* und *COE* (in Zeichen $\angle AOE = \angle AOC + \angle COE$) und umgekehrt den Winkel *AOC* die Differenz zwischen den Winkeln *AOE* und *COE* (d. h. $\angle AOC = \angle AOE - \angle COE$).

Lässt man in demselben Sinne mehrere Drehungen auf einander folgen, welche sämmtlich von gleicher Grösse sind, so entstehen der Reihe nach Winkel, welche das Doppelte, Dreifache, Vierfache u. s. w. des ursprünglichen Winkels ausmachen, und man kann daher einen Winkel beliebig vervielfachen. Umgekehrt wird man sich durch ganz ähnliche Schlüsse wie in §. 1*c* sehr leicht überzeugen, dass es jederzeit möglich ist, einen gegebenen Winkel in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen. Nach diesen Erörterungen dürfen wir sagen: Es ist jederzeit möglich, gegebene Winkel zu addiren, zu subtrahiren, zu vervielfachen und zu theilen.

a. Eintheilung der Winkel. Denkt man sich die Drehung der Geraden *OA* soweit fortgesetzt, bis sie in die der ursprünglichen Lage gerade entgegengesetzte Lage *OB* kommt, so entsteht derjenige Winkel, welchen man den gestreckten Winkel nennt, und man kann daher die Erklärung aufstellen: der gestreckte Winkel ist derjenige, dessen Schenkel in einer geraden Linie einander entgegengesetzt liegen. Da der gestreckte Winkel zu seiner Entstehung nicht eine beliebige, sondern eine ganz bestimmte Drehung erfordert, welche sich stets gleich bleibt (es ist immer die Drehung aus einer Lage in die entgegengesetzte), so folgt auf der Stelle, dass der gestreckte Winkel der einzige seiner Art ist und mithin alle gestreckten Winkel einander gleich sind. Die Hälfte des gestreckten Winkels ($\angle AOM$) heisst der rechte Winkel, welcher ebenfalls der einzige seiner Art ist. Beträgt ein Winkel weniger als ein rechter, so wird er ein spitzer genannt (z. B. $\angle AOS$), ein stumpfer Winkel dagegen ist ein solcher, welcher mehr als ein rechter ausmacht (z. B. $\angle AOT$). Man hat diese Eintheilung noch etwas weiter getrieben, indem man alle Winkel, welche kleiner als der gestreckte Winkel sind, unter der Benennung hohle oder concave Winkel zusammenfasste, und dagegen diejenigen Winkel, welche mehr als ein gestreckter Winkel betragen, erhabene oder convexe Winkel nannte. Der spitze, rechte

Fig. 5.



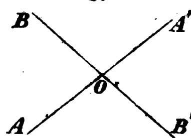
und stumpfe Winkel gehören demnach zu den concaven Winkeln, convex aber wäre z. B. der Winkel AOU, wenn man ihn dadurch entstanden denkt, dass sich die Gerade OA aus ihrer ursprünglichen Lage rechts herum bis zur Lage OU gedreht hat. Als Maass der Winkel benutzt man gewöhnlich den rechten Winkel und bezeichnet ihn einfach mit R; man sagt dann auch nicht „gestreckter Winkel", sondern statt dessen „zwei rechte Winkel", in Zeichen: $2R$. Selbstverständlich müssen dann spitze Winkel in Bruchtheilen des rechten Winkels ausgedrückt werden, z. B. $\frac{1}{2}R$, $\frac{5}{8}R$, $\frac{2}{3}R$ u. s. w.

Wegen der Unbequemlichkeit, welche namentlich bei der Addition, Subtraction, Multiplication und Divison spitzer Winkel durch jene Ausdrucksweise entsteht, nimmt man in solchen Fällen einen Theil des Winkels zur Maasseinheit; dabei denkt man sich herkömmlicher Weise den rechten Winkel in 90 gleiche Theile getheilt und nennt einen solchen Theil einen Winkelgrad; der 60te Theil eines Grades heisst eine Winkelminute, der 60te Theil einer Minute eine Winkelsecunde, die man nöthigenfalls in Zehntel, Hundertel u. s. f. weiter theilt. Für den Grad dient das Zeichen: °, für Minute ′, für Secunde ″, wonach z. B. 18° 5′ 37″9 soviel bedeutet wie 18 Grad, 5 Minuten $37\frac{9}{10}$ Secunden. Demzufolge ist

$$\tfrac{1}{2}R = 45^\circ,\ \tfrac{5}{8}R = 11^\circ\,15',\ \tfrac{17}{64}R = 23^\circ\,54'\,22''5,$$
$$2R = 180^\circ,\ 3R = 270^\circ,\ 4R = 360^\circ.$$

b. Nebenwinkel. Wir haben bisher die nach verschiedenen Richtungen laufenden Geraden nur soweit verlängert, dass sie eben zusammentrafen; um aber die Untersuchung über zwei derartige Gerade vollständig zu erledigen, müssen wir die Geraden (die Winkelschenkel) noch über jenen Punkt hinaus fortsetzen. Verlängern wir nun vorerst den einen Winkelschenkel AO über O hinaus, so entsteht ein zweiter Winkel $A'OB$, welcher der Nebenwinkel von AOB heisst; umgekehrt nennt man auch den Winkel AOB den Nebenwinkel von $A'OB$. Es kommen demnach die Nebenwinkel immer paarweis vor und sind daran kenntlich, dass

Fig. 6.



sie einen Schenkel und den Scheitel gemeinschaftlich haben, während die anderen Schenkel in gerader Linie liegen. Berücksichtigt man, dass der Winkel AOA' ein gestreckter, also $= 2R$ ist, so folgt nach dem, was über die Addition der Winkel gesagt worden ist, sogleich der Satz: Nebenwinkel betragen zusammengenommen immer zwei Rechte. Da alle gestreckten Winkel einander gleich sind, so knüpft sich daran noch die Folgerung: Irgend ein Paar Nebenwinkel beträgt zusammen ebensoviel als irgend ein anderes Paar Nebenwinkel.

Man kann den vorigen Satz auch umkehren; betragen nämlich irgend zwei Winkel zusammen einen gestreckten Winkel, und legt man sie so an einander, dass sie den Scheitel und einen Schenkel gemein haben, so müssen die Winkel zu Nebenwinkeln werden und die anderen Schenkel in einer geraden Linie liegen. Denn wäre dies nicht der Fall, so müsste der gestreckte Winkel (und soviel machen beide Winkel der Voraussetzung nach zusammen aus) auch so beschaffen sein können, dass seine Schenkel nicht in gerader Linie lägen, was aber der Definition des gestreckten Winkels und der Bemerkung widerspricht, dass alle gestreckten Winkel gleich sind.

c. Scheitelwinkel. Verlängern wir ausser dem ersten Winkelschenkel AO auch den zweiten BO über O hinaus, so entstehen noch zwei Winkel, unter denen derjenige, welcher von den Verlängerungen $A'O$ und $B'O$ der Schenkel des ursprünglichen Winkels gebildet ist, der Scheitelwinkel desselben genannt wird; ebenso heisst auch $\angle AOB$ der Scheitelwinkel von $\angle A'OB'$, so dass also Scheitelwinkel nur paarweis vorkommen. Nach dem zweiten in *b.* erwiesenen Satz ist nun

$$\angle AOB + \angle BOA' = \angle BOA' + \angle A'OB',$$

weil die links und rechts stehenden Winkel Nebenwinkel sind. Nimmt man beiderseits den sich selbst gleichen Winkel BOA' weg, so bleibt

$$\angle AOB = \angle A'OB',$$

d. h. Scheitelwinkel sind einander gleich.

Auch hier kann eine Umkehrung des Satzes eintreten und man wird sich durch sehr einfache Schlüsse ähnlich

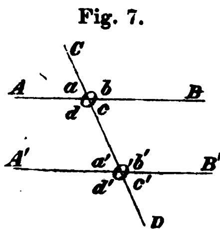
wie in *b*. überzeugen, dass zwei gleiche Winkel jederzeit als Scheitelwinkel betrachtet und in der That so an einander gelegt werden können, dass der eine von den Schenkelverlängerungen des anderen gebildet wird.

§. 3.
Drei Gerade.

Vergleichen wir die Richtungen dreier in einer Ebene liegenden Geraden, so sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden; entweder nämlich haben alle drei Gerade eine und dieselbe Richtung, oder zwei von ihnen laufen nach derselben Richtung, während die dritte Gerade eine andere Richtung einschlägt, oder endlich, jede der drei Geraden hat eine verschiedene Richtung. Von diesen drei Fällen bedarf der erste keiner weiteren Erörterung, denn es lässt sich von drei parallelen Geraden nur wiederholen, was schon über zwei Parallelen gesagt ist, und wir wenden uns daher sogleich zum zweiten Falle.

I. Die Parallelentheorie. Haben die Geraden AB und $A'B'$ gleiche Richtung, laufen sie also parallel, und ist ausserdem die Gerade CD in einer von AB verschiedenen Richtung gezogen, so schneidet nach dem in §. 2. II. ausgesprochenen Grundsatze die Gerade CD jede der Geraden AB und $A'B'$, und es entstehen an den Durchschnittspunkten O und O' im Ganzen acht Winkel, $a, b, c, d, a', b', c', d'$.

Fig. 7.



Diese pflegt man auf verschiedene Art paarweis zusammenzustellen; man nennt nämlich correspondirende Winkel diejenigen, welche auf denselben Seiten von AB und $A'B'$ und zugleich auf derselben Seite von CD liegen (so liegt z. B. a oberhalb AB, ebenso a' oberhalb $A'B'$, und zugleich liegen a und a' links von CD), und es sind daher die correspondirenden Winkel:

a und a'
b „ b'
c „ c'
d „ d';

lässt man ferner an die Stelle des einen von zwei correspondirenden Winkeln seinen Scheitelwinkel treten (wechselt also), so entstehen die Wechselwinkel, nämlich:

a und c'
b „ d'
c „ a'
d „ b',

von denen man das erste und zweite Paar unter den Namen äussere Wechselwinkel, sowie das dritte und vierte unter den Namen innere Wechselwinkel zusammenfasst; setzt man endlich an die Stelle eines zweier correspondirenden Winkel seinen an derselben Seite von CD liegenden Nebenwinkel, so erhält man äussere und innere Winkel an derselben Seite, nämlich:

a und d'
b „ c'
c „ b'
d „ a'.

Die Beziehungen, welche zwischen diesen Winkeln statt finden, lassen sich auf folgendem Wege leicht entdecken. Da nach der Vorraussetzung AB und $A'B'$ gleiche Richtung besitzen, so ist auch

die Richtung von OA = der Richtung von $O'A'$;

da ferner OC und $O'C$ Theile einer und derselben Geraden sind, so muss

die Richtung von OC = der Richtung von $O'C$

sein; mittelst des Grundsatzes, dass Gleiches mit Gleichem verglichen Gleiches liefert, folgt hieraus auf der Stelle, dass der Unterschied unter den Richtungen von OA und OC gleich ist dem Unterschiede unter den Richtungen von $O'A'$ und $O'C$. Vermöge der Definition des Winkels heisst diess aber nichts Anderes als $\angle AOC = \angle A'O'C$ oder kürzer $a = a'$. Ebenso leicht würde man zu den Gleichungen $b = b'$, $c = c'$ und $d = d'$ gelangen können und ist hiernach berechtigt, den Satz auszusprechen: Die correspondirenden Winkel sind einander gleich.

Da $a = a'$ und nach dem Satze von den Scheitelwinkeln $a' = c'$ ist, so folgt $a = c'$ und auf ganz ähnlichem

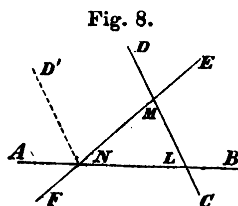
Wege auch $b = d'$, $c = a'$ und $d = b'$, d. h.: Wechselwinkel sind einander gleich.

Berücksichtigen wir endlich, dass $a + b = 2R$ und $b = b'$ ist, so folgt $a + b' = 2R$; setzt man dagegen in der Gleichung $a + b = 2R$ für a den ihm gleichen Winken a', so folgt ähnlich $a' + b = 2R$; d. h.: Aeussere Winkel an derselben Seite und ebenso innere Winkel an derselben Seite betragen zusammen zwei Rechte.

Es ist übrigens sehr leicht, alle diese Sätze umzukehren und z. B. aus der Gleichheit der correspondirenden oder Wechselwinkel den Parallelismus der beiden Geraden zu erschliessen. Ist im ersten Falle $a = a'$, so weichen die Richtungen der Geraden OA und $O'A'$ von der Richtung der Geraden CD um gleichviel (um die gleichen Richtungsunterschiede a und a') ab, woraus sogleich folgt, dass die Richtungen von OA und $O'A'$ einander gleich, mithin AB und $A'B'$ einander parallel sind. — Setzt man die Gleichheit der Wechselwinkel a und c' voraus, so folgt wegen $c' = a'$ zunächst $a = a'$ und nach dem Vorigen wieder, dass AB und $A'B'$ einander parallel laufen. — Hat man endlich $a' + b = 2R$, so ist wegen $a + b = 2R$ nothwendig auch $a' = b$, woraus wieder der Parallelismus von AB und $A'B'$ folgt. Betragen dagegen die inneren Winkel zusammen mehr oder weniger als zwei Rechte, so beträgt auch a mehr oder weniger als a'; daraus ergiebt sich weiter, dass AB und $A'B'$ ungleiche Richtungen haben, und sich folglich nach §. 2. II. schneiden müssen.

II. Das Dreieck. Wenn von drei Geraden jede eine andere Richtung verfolgt, so schneidet nach §. 2. II. die erste Gerade die zweite, die zweite die dritte und die dritte die erste; es entstehen also drei Durchschnitte wie L, M, N, und zugleich bildet sich eine nach allen Seiten geschlossene Figur: das Dreieck. Die drei Durchschnittspunkte L, M, N heissen die Ecken oder Spitzen desselben, die zwischen denselben liegenden Theile der Geraden, also die Strecken LM,

Fig. 8.



MN, *NL*, heissen die Seiten des Dreiecks und die Winkel *MLN*, *LMN*, *MNL* die Winkel desselben.

Ohne uns nun vor der Hand auf eine tiefere Untersuchung des Dreiecks einzulassen, wollen wir nur diejenigen zwei Eigenschaften desselben hervorheben, welche sich unmittelbar ergeben, wenn man einmal die Seiten und das andere Mal die Winkel des Dreiecks in's Auge fasst. — Irgend zwei Ecken des Dreiecks, z. B. *L* und *M*, kann man sich auf doppelte Weise verbunden denken, einmal durch die Gerade *LM* und dann durch die gebrochene Linie über *N*, welche aus den beiden Seiten *LN* und *NM* besteht. Da nun die gerade Linie zwischen zwei Punkten der kürzeste Weg ist, so folgt sogleich der Satz: Zwei Seiten eines Dreiecks betragen zusammengenommen mehr als die dritte Seite. Man schliesst daraus noch den Zusatz: Die Differenz zweier Dreieckseiten beträgt weniger als die dritte Seite.

Denkt man sich durch eine Ecke (etwa *N*) eine Parallele zur gegenüberliegenden Seite *LM* gezogen, so finden folgende Beziehungen statt, in welchen wir die Winkel des Dreiecks kurz mit *L*, *M*, *N* bezeichnet haben:

$\angle L = \angle AND'$ als correspondirende Winkel,

$\angle M = \angle MND'$ als Wechselwinkel.

Durch Addition derselben folgt die Gleichung

$$\angle L + \angle M = \angle ANM$$

welche sich leicht in Worte übersetzen lässt, wenn man den Winkel *ANM*, welcher durch Verlängerung einer Dreiecksseite (*LN*) entsteht, den Aussenwinkel des Dreiecks nennt; jene Gleichung sagt dann: Zwei Winkel eines Dreiecks betragen zusammen soviel als der Aussenwinkel an der dritten Ecke. Addirt man zu der eben in Worten ausgedrückten Gleichung beiderseits den Winkel *N*, so folgt $\angle L + \angle M + N = \angle ANM + \angle N$, d. i. $= 2R$, weil die Winkel *ANM* und *N* Nebenwinkel sind. Diess giebt den Satz: Die sämmtlichen Winkel eines Dreiecks betragen zusammengenommen zwei Rechte. Sind also zwei Winkel, etwa *L* und *M*, von einem Dreiecke gegeben, so findet man sogleich den dritten, nämlich $N = 2R - (L + M)$.

Die Arten der Dreiecke. Man kann die Dreiecke nach einem doppelten Eintheilungsgrunde eintheilen, indem man entweder von den Seiten oder von den Winkeln ausgeht. Im ersten Falle ist es die Gleichheit oder Ungleichheit der Seiten, worauf man achtet, und es heisst dann ein Dreieck gleichseitig, wenn es drei gleiche Seiten hat, gleichschenklig, wenn es zwei gleiche Seiten hat, und ungleichseitig, wenn es lauter ungleiche Seiten besitzt. Sehr oft nennt man eine von den Seiten des Dreiecks die Grundlinie oder Basis und die anderen Schenkel; namentlich im gleichschenkligen Dreieck gilt die letztere Bezeichnung für die beiden gleichen Seiten, die erstere für die dritte ungleiche Seite. — Sieht man dagegen auf die Winkel des Dreiecks, so ist zu unterscheiden, ob dasselbe nur spitze Winkel enthält, oder einen rechten und zwei spitze Winkel, oder einen stumpfen und zwei spitze Winkel. Im ersten Falle heisst das Dreieck ein spitzwinkliges, im zweiten ein rechtwinkliges und im dritten ein stumpfwinkliges. Im rechtwinkligen Dreiecke insbesondere führen die den rechten Winkel einschliessenden Seiten den Namen Katheten und die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite den Namen Hypotenuse.

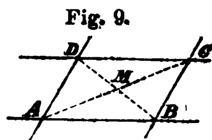
§. 4.

Vier und mehrere Gerade.

I. Vollkommen entsprechend der im vorigen Paragraphen durchgeführten Untersuchung lässt sich Das behandeln, was von vier oder mehreren Geraden in einer Ebene gesagt werden kann. Es müssen nämlich bei vier Geraden auch vier Fälle unterschieden werden, ob nämlich nur eine und dieselbe Richtung vorhanden ist, oder ob die Geraden nach zwei oder drei oder vier verschiedenen Richtungen vertheilt sind. Der erste Fall bedarf keiner weiteren Untersuchung, denn über vier einander parallel laufende Gerade lässt sich nicht mehr als über zwei dergleichen sagen. Sind zweitens die Geraden nach zwei Richtungen vertheilt, so gehen entweder drei nach der einen

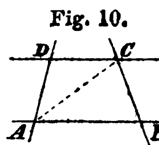
Richtung und eine nach der anderen Richtung, oder zwei Gerade folgen der einen und zwei der anderen Richtung; das Erste gäbe drei Parallelen, durchschnitten von einer Geraden, und würde nur eine Wiederholung der Parallelentheorie sein, das Zweite dagegen ist etwas Neues; es entsteht nämlich durch vier solche Gerade ein Viereck, in welchem jede zwei einander gegenüberliegenden Seiten einander parallel laufen, d. i. ein sogenanntes Parallelogramm. Wendet man die Sätze der Parallelentheorie auf die vier Geraden an, so findet man ohne Mühe, dass die an einer Seite liegenden Winkel eines Parallelogrammes (z. B. ∠ *BAD* und ∠ *ABC*) zusammen zwei Rechte ausmachen und dass ferner die gegenüberliegenden Winkel (z. B. ∠ *BAD* und ∠ *BCD*) einander gleich sind. Hieraus folgt u. A. weiter, dass, wenn ein Winkel des Parallelogrammes ein Rechter ist, sämmtliche Winkel ebenfalls Rechte sein müssen; ein derartiges Parallelogramm heisst ein Rechteck, und wenn ausserdem zwei in einer Ecke zusammenstossende Seiten gleich sind, ein Quadrat.

Fig. 9.



Sind drittens vier Gerade nach drei Richtungen vertheilt, so müssen zwei Gerade gleiche Richtung halten und es entsteht in diesem Falle ein Viereck, worin nur zwei gegenüberliegende Seiten (*AB* und *CD*) einander parallel sind; dasselbe heisst ein Trapez; die grössere der parallelen Seiten pflegt man auch wohl seine Basis zu nennen.

Fig. 10.



Wenn endlich von vier Geraden jede eine andere Richtung einschlägt, so entsteht ein unregelmäsiges Viereck. Sind die Seiten desselben gleich, so heisst es ein Rhombus, ausserdem aber hat man keine besonderen Benennungen weiter eingeführt.

Als allgemeine Eigenschaften des Vierecks erwähnen wir noch folgende: je drei Seiten eines Vierecks betragen zusammengenommen mehr als die vierte Seite, ferner: ausser den vier Seiten des Vierecks giebt es noch zwei gerade Linien, welche ebenfalls zur gegenseitigen Verbindung der

Ecken dienen; diese Geraden entstehen nämlich, wenn man die gegenüberliegenden Ecken des Vierecks mit einander verbindet, und sie heissen **Diagonalen.** Jede Diagonale theilt das Viereck in zwei Dreiecke; hieraus folgt noch, dass die Summe aller Winkel eines Vierecks vier Rechte beträgt, weil sie aus den Winkelsummen jener zwei Dreiecke zusammengesetzt ist.

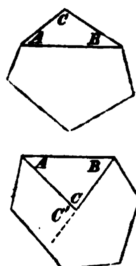
II. Wie man auf dem bisherigen Wege weiter gehen könnte, bedarf wohl keiner Auseinandersetzung mehr; es ist aber leicht zu sehen, dass die Ergebnisse eines solchen weiteren Fortschritts zur einen Hälfte nur in einer langen Reihe von Definitionen bestehen würden, welche man für die einzelnen Fälle (ähnlich wie beim Viereck) aufstellen könnte. Da diese aber ebenso wenig ein theoretisches Interesse als praktische Wichtigkeit besitzen, so übergehen wir dieselben und entwickeln nur noch einige allgemeine Eigenschaften, welche jedem ebenen Vielecke zukommen. Diese Eigenschaften betreffen erstens die Anzahl derjenigen Geraden, welche je zwei nichtbenachbarte Ecken des Vielecks verbinden, d. h. **die Anzahl der Diagonalen,** und zweitens **die Summe aller Winkel** des Vielecks.

Stellen wir uns an die eine Ecke eines Vielecks von n Ecken (n-Ecks), so können wir von hier aus gerade Linien nach den übrigen $n-1$ Ecken, also $n-1$ Gerade ziehen; zwei von diesen Geraden sind Seiten des Vielecks (nämlich diejenigen Geraden, welche nach den beiden Nachbarpunkten gezogen werden) und mithin bleiben $n-3$ Gerade übrig, welche Ecken des Vielecks verbinden, ohne Seiten zu sein; d. h. man kann von **einer** Ecke aus $n-3$ Diagonalen ziehen. Dasselbe lässt sich von jeder Ecke sagen und mithin wäre die Anzahl der Diagonalen $= n(n-3)$; dabei ist aber jede Diagonale zweimal gerechnet, nämlich an jedem ihrer Endpunkte als eine besondere gezählt worden; wir müssen daher, um die wahre Diagonalenzahl zu erhalten, noch durch 2 dividiren. **Die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks von n** Seiten ist demnach $= \frac{1}{2}n\,(n-3)$.

Um ferner die Summe der Winkel eines Vielecks bestimmen zu können, suchen wir erst die Frage zu beant-

worten, um wieviel die Winkelsumme eines Vielecks zunimmt, wenn man dem Vielecke eine neue Seite ansetzt. Ist nun in AB irgend eine Seite eines Vielecks und denkt man sich über AB ein Dreieck construirt, dessen Seiten AC und BC nicht in die Verlängerungen der anstossenden Vieleckseiten fallen, so hat das Vieleck um eine Seite zugenommen, indem AC und BC an die Stelle von AB getreten sind. Das hinzugesetzte Dreieck kann nun sowohl ausserhalb als innerhalb des Vielecks zu liegen kommen und darnach muss man die Frage trennen. Im ersten Falle nimmt die Winkelsumme des Vielecks offenbar um die drei Winkel A, B und C, d. h. um zwei Rechte zu; im zweiten Falle vermindert sich, wie man aus der Figur sieht, die Winkelsumme um A und B, wächst aber gleichzeitig um den convexen Winkel bei C, welcher $= 2R + C' = 2R + A + B$ ist, sie wächst also zusammen doch wieder um $2R$, so dass nun in jedem Falle die Winkelsumme um $2R$ zunimmt, sobald die Seitenzahl des Vielecks um eine Einheit vermehrt wird. Da im Dreieck die Winkelsumme $= 2R$ ist, so folgt hieraus, dass die Winkelsumme im

Fig. 11.



$$4\text{Eck} = 4R = 2 \,.\, 2R,$$
$$5\text{Eck} = 6R = 3 \,.\, 2R,$$
$$6\text{Eck} = 8R = 4 \,.\, 2R$$

. . . .

ist u. s. w., und man findet hieraus leicht das allgemeine Gesetz: Die Winkelsumme eines Vielecks von n Seiten beträgt $(n - 2)\, 2R = (2n - 4)\, R$.

Hieran knüpft sich noch die Consequenz, dass jedes Vieleck wenigstens drei concave Winkel besitzen muss. Denn hätte das n-Eck nur 2 concave Winkel, so besässe es $n - 2$ convexe Winkel, und da ein convexer Winkel mehr als $2R$ beträgt, so betrügen diese convexen Winkel zusammen allein schon mehr als $(n - 2)\, 2R$, d. h. mehr als die Winkelsumme des Vielecks, was natürlich nicht möglich ist.

Cap. II.

Der Zusammenhang unter den Bestandtheilen geradliniger Figuren.

§. 5.

Allgemeine Erörterung.

Wenn von irgend einem Objecte sämmtliche Bestandtheile gegeben sind und zugleich die Ordnung vorgeschrieben ist, in welcher diese Bestandtheile auf einander folgen sollen, so kann offenbar nicht der geringste Zweifel über die Beschaffenheit des Gegenstandes selbst stattfinden, und setzt man in der That die gegebenen Bestandtheile in der vorgeschriebenen Ordnung zusammen, so wird man jedesmal dasselbe Object erhalten; man sagt daher: irgend ein Gegenstand ist seiner Natur nach bestimmt, sobald seine sämmtlichen Bestandtheile und deren Anordnung bekannt sind. Von diesem ganz allgemeinen logischen Gesetze macht man am häufigsten in den Naturwissenschaften Gebrauch; das sogenannte Bestimmen der Pflanzen, Mineralien u. s. w. ist eben nichts Anderes als eine Aufsuchung der in gewisser Ordnung auf einander folgenden Bestandtheile, aus deren Vergleichung mit einem gegebenen Schema der Platz entnommen werden kann, an welchen jene Pflanze oder jenes Mineral im Systeme gehört. Etwas ganz Aehnliches lässt sich nun auch in der Geometrie leisten, wenn man solche Gebilde betrachtet, deren einzelne Bestandtheile nicht mehr von willkührlicher Grösse sind (wie z. B. zwei Parallelen), sondern eine gegebene unveränderliche Grösse besitzen, d. h. mit anderen Worten, wenn wir uns an die Betrachtung geschlossener Figuren halten. Es ist nach diesen Bemerkungen klar, dass ein Vieleck vollkommen bestimmt sein muss, sobald die Seiten und Winkel desselben der Reihe nach gegeben sind, denn diese bilden eben die Bestandtheile des Vielecks. Zugleich erhellt, dass zwei Vielecke, welche in allen diesen Bestandtheilen, in derselben Reihenfolge genommen, mit einander übereinstimmen, nur als Wiederholungen oder Copieen von einander gelten können

und dass sie, mit den gleichen Seiten und Winkeln auf einander gelegt, zu einem einzigen Vielecke zusammenfallen müssen. Derartige Vielecke nennt man einander **congruent** und bezeichnet ihre Congruenz mit dem Zeichen ≌.

Diese Lehre würde sehr kurz ausfallen und sich auf das Gesagte beschränken müssen, wenn nicht bei den Bestandtheilen geometrischer Figuren eine Eigenthümlichkeit stattfände, die man sonst nirgends antrifft. Während z. B. die Bestandtheile naturwissenschaftlicher Gegenstände in keiner gegenseitigen Abhängigkeit von einander stehen, (aus der Form der Blätter z. E. folgt noch gar nichts über die Form oder Farbe der Blüthen), findet zwischen den Bestandtheilen geometrischer Figuren ein derartiger Zusammenhang statt, dass man aus einigen jener Bestandtheile die übrigen finden kann und mithin **nicht alle** Bestandtheile eines Vielecks zur Bestimmung desselben erforderlich sind. Bleiben wir z. B. bei dem Dreiecke stehen und denken uns dasselbe dadurch gebildet, dass drei nicht in einer Geraden liegende Punkte durch gerade Linien mit einander verbunden worden sind, so sehen wir die Winkel des Dreiecks mit den Seiten **gleichzeitig** entstehen und finden schon hierin eine Hindeutung auf einen gegenseitigen Zusammenhang zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks. Diese gegenseitige Abhängigkeit der Bestandtheile der Vielecke zu untersuchen, ist nun der Zweck dieses Capitels und wir fangen die Untersuchung natürlich mit der einfachsten Figur, dem Dreiecke, an.

§. 6.

Unvollständig bestimmte Dreiecke.

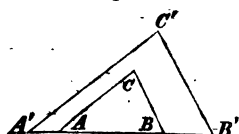
Der vorigen allgemeinen Erörterung zufolge haben wir die Frage zu beantworten, wieviele Bestandtheile eines Dreiecks gegeben sein müssen, wenn durch dieselben das Dreieck bestimmt sein soll. Zu diesem Zwecke betrachten wir vorerst die sehr einfachen Fälle, wo von dem Dreiecke nur ein oder zwei Bestandtheile gegeben sind. Kennt man **einen** Bestandtheil des Dreiecks, so ist dies entweder ein Winkel oder eine Seite. Im ersten Falle steht es frei,

auf jedem Winkelschenkel einen Punkt willkührlich zu wählen und durch geradlinige Verbindung dieser Punkte ein Dreieck herzustellen, welches den gegebenen Winkel enthält; man sieht augenblicklich, dass sich auf diese Weise unendlich viel verschiedene Dreiecke mit demselben gegebenen Winkel bilden lassen, dass also durch einen Winkel allein das Dreieck nicht bestimmt wird. Ist zweitens nur eine Seite des Dreiecks gegeben, so kann man die Endpunkte derselben mit irgend einem ausser ihr willkührlich gewählten Punkte geradlinig verbinden und auf diese Weise ein Dreieck construiren, welches die gegebene Seite enthält; auch hier zeigt sich, dass unendlich viel verschiedene Dreiecke dieser Art möglich sind, dass also durch eine Seite allein das Dreieck nicht bestimmt wird.

Bei **zwei** gegebenen Bestandtheilen sind drei Fälle zu unterscheiden, jenachdem zwei Winkel, oder eine Seite und ein Winkel oder zwei Seiten als bekannt vorausgesetzt werden.

a. Sind zwei Winkel eines Dreiecks gegeben, so kennt man nach §. 3, II. auch den dritten Winkel, und um nun ein Dreieck herzustellen, welches diese Winkel enthält, braucht man nur zwei der gegebenen Winkel, etwa A und B an eine willkührlich gewählte Basis AB anzutragen und die beiden übrigen Schenkel AC und BC bis zu ihrem Durchschnitte C zu verlängern. Zufolge der beliebigen Wahl von AB können unendlich viel verschiedene Dreiecke dieser Art construirt werden; so ist z. B. in der

Fig. 12.



Figur $A'C' \parallel AC$, $B'C' \parallel BC$ daher $\angle A' = \angle A$, $\angle B' = \angle B$ und $\angle C' = \angle C$, aber das Dreieck $A'B'C'$ wesentlich verschieden vom Dreieck ABC. Zwei Winkel bestimmen demnach das Dreieck nicht.

b. Es seien ferner eine Seite AB und ein a n l i e g e n d e r Winkel, etwa A, gegeben; man denke sich dann auf dem einen Schenkel dieses Winkels die vorgeschriebene Strecke AB, auf dem anderen Schenkel die beliebige Strecke AB abgeschnitten und die Gerade BC gezogen, so hat man ein Dreieck ABC mit den gegebenen Bestandtheilen. Wegen der Willkührlichkeit von AC sind solcher Drei-

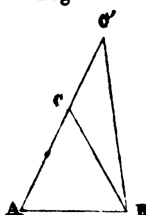


Fig. 13.

ecke unendlich viele verschiedene möglich, und daher ist auch hier das Dreieck nicht bestimmt. Werden zwei derartige Dreiecke *ABC* und *ABC'* mit den willkührlichen Seiten *AC* und *AC'* construirt indem man $AC' > AC$ nimmt, so gilt auch für die Gegenwinkel *ABC* und *ABC'* die Beziehung $\angle ABC' > \angle ABC$; d. h.: Das Dreieck mit der grösseren willkührlichen Seite hat auch den grösseren Gegenwinkel.

Wenn ausser der Seite *AB* der gegenüberliegende Winkel *C* gegeben ist, so kennt man die Summe der anliegenden Winkel, nämlich $A + B = 2R - C$. Einen derselben kann man willkührlich (nur kleiner als $2R - C$) wählen; die vorige Gleichung giebt dann den anderen und wenn man jetzt beide Winkel an *AB* anträgt, so erhält man ein Dreieck mit den vorgeschriebenen Bestandtheilen. Zufolge der willkührlichen Wahl des einen der beiden Winkel *A* und *B* ist auch hier das Dreieck nicht bestimmt.

c. Wir setzen endlich voraus, dass zwei Seiten, etwa *AB* und *AC* gegeben seien. Legt man dieselben so an einander, dass sie einen beliebigen Winkel *BAC* einschliessen, und verbindet die Endpunkte *B* und *C* durch eine Gerade, so kann man beliebig viel verschiedene Dreiecke mit denselben zwei Seiten *AB* und *AC* bilden; durch zwei Seiten ist also das Dreieck nicht bestimmt.

Um zu erfahren, wie die dritte Seite *BC* sich ändert, wenn der Winkel *BAC* eine Aenderung erleidet, betrachten wir zwei Dreiecke *ABC* und *ABC'* welche in den Seiten *AB* und $AC = AC'$ übereinstimmen, während $\angle BAC' > \angle BAC$ ist. Hierbei kann *C* drei verschiedene Lagen in Beziehung auf das Dreieck *ABC'* einnehmen; es fällt nämlich *C* entweder ausserhalb des Dreiecks *ABC'* oder auf die Seite *BC'* oder in das Dreieck *ABC'*. Nennen wir

Fig. 14 α.

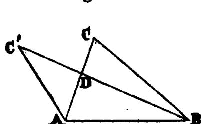


Fig. 14 β.

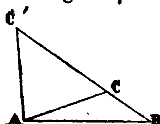
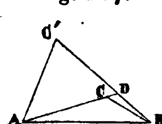


Fig. 14 γ.



immer D den Durchschnitt von BC' mit der nöthigenfalls verlängerten AC, so ist bei der ersten Lage

Fig. 14 α.

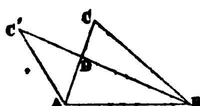


Fig. 14 β.

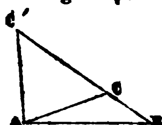
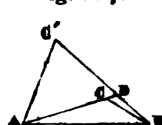


Fig. 14 γ.



im Dreieck $AC'D$: $AD + C'D > AC'$,
im Dreieck BCD: $CD + BD > BC$,

mithin zusammen

$$AC + BC' > AC' + BC;$$

nach beiderseitiger Wegnahme von $AC = AC'$ bleibt

$$BC' > BC.$$

Im zweiten Falle erhellt unmittelbar, das $BC' > BC$ sein muss. Bei der dritten Lage hat man

im Dreieck $AC'D$: $AC' + C'D > AD$,

mithin durch beiderseitige Hinzufügung von BD

$$AC' + BC' > AD + BD$$

oder auch

$$AC' + BC' > AC + CD + BD;$$

setzt man statt $CD + BD$ die weniger betragende Seite BC, so ist um so mehr

$$AC' + BC' > AC + BC$$

und nach beiderseitiger Wegnahme von $AC' = AC$

$$BC' > BC.$$

Man kann daher sagen: **Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten aber nicht im zwischenliegenden Winkel übereinstimmen, so sind auch die dritten Seiten verschieden, und zwar hat dasjenige Dreieck die grössere dritte Seite, worin die gegebenen Seiten den grösseren Winkel einschliessen.**

Als allgemeines Resultat dieser Untersuchung ergiebt sich, dass ein Dreieck durch zwei Bestandtheile nicht bestimmt ist; man bedarf daher wenigstens dreier Bestandtheile unter denen mindestens eine Seite vorkommen muss weil, nach dem unter *a* Gesagten, die drei Winkel nicht ausreichen.

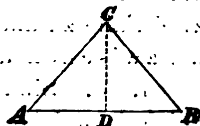
§. 7.

Bestimmung des Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln.

a. Wenn von einem Dreiecke zwei Winkel (mithin alle Winkel) und eine Seite *AB* gegeben sind, so können wir uns denken, dass zuerst die gegebene Seite *AB* gezeichnet worden sei und an diese die gegebenen anliegenden Winkel *A* und *B* angesetzt werden. Dies geschieht dadurch, dass wir den Scheitel des Winkels *A* auf den Endpunkt *A* der gegebenen Geraden und den einen seiner Schenkel auf *AB* legen; der andere Schenkel von *A* giebt dann die Richtung an, in welcher die Dreieckseite *AC* liegen muss. Verfahren wir ebenso mit dem Winkel *B*, so erhalten wir die Richtung, in welcher die Seite *BC* zu suchen ist. Beide Richtungen durchschneiden sich in *C* und dieser Punkt muss nun die Spitze des Dreiecks sein, weil er, als Durchnitt der beiden anderen Dreieckseiten, sowohl in der einen als in der anderen Seite, also auch in der einen wie in der anderen Richtung liegen muss. Da sich aber zwei Gerade, hier die jedesmaligen zweiten Schenkel der Winkel *A* und *B*, nur in einem Punkte schneiden (§. 2. II.), so entsteht auch nur ein ganz bestimmtes Dreieck, welches die gegebenen Bestandtheile enthält, d. h. **Ein Dreieck ist durch eine Seite und zwei Winkel bestimmt.** Hieraus folgt weiter: **Zwei Dreiecke sind congruent, sobald sie in einer Seite und zwei ähnlich liegenden Winkeln übereinstimmen.**

b. In dem einfachen Falle, wo die beiden an der Seite *AB* liegenden Winkel einander gleich sind, ist es leicht, auch das Verhältniss der Seiten *AC* und *BC* ausfindig zu machen. Denkt man sich nämlich den Winkel *C* durch eine Gerade halbirt, welche *AB* in *D* schneidet, so zerfällt das Dreieck *ABC* in zwei andere Dreiecke *ACD* und *BCD*; diese besitzen die Seite *CD* gemeinschaftlich und stimmen ausserdem noch in zwei Winkeln überein; es ist nämlich

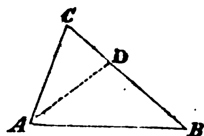
Fig. 15.



$\angle BAC = \angle ABC$ wegen der Voraussetzung, und $\angle ACD = \angle BCD$ durch Construction. Hieraus zusammen folgt, dass die Dreiecke ABC und BDC congruent sind, also in allen Bestandtheilen übereinstimmen und dass mithin auch $AC = BC$ ist; dies giebt den Satz: Zwei gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen auch gleiche Seiten gegenüber, oder: Ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln ist auch ein gleichschenkliges Dreieck.

c. Mit Hülfe dieses Theoremes lässt sich der Fall, dass A grösser oder kleiner als B ist, etwas näher erörtern. Ist etwa A der grössere Winkel, so denke man sich den Winkel B davon subtrahirt, nämlich AD so gelegt, dass $\angle BAD = \angle ABD$ ist; das Dreieck ABD hat dann zwei gleiche Winkel und mithin sind nach dem Vorigen die Seiten AD und BD einander gleich. In dem Dreiecke ACD ist nun weiter

Fig. 16.



$$AD + CD > AC \text{ (§. 3. II.)},$$

oder, wenn man statt AD die gleiche Seite BD setzt

$$BD + CD > AC \text{ oder } BC > AC,$$

d. h.: Dem grösseren Winkel in einem Dreieck liegt auch die grössere Seite gegenüber.

§. 8.

Bestimmung des Dreiecks aus zwei Seiten und einem Winkel.

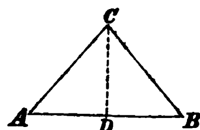
Nachdem wir die Bestimmung eines Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln erörtert haben, gehen wir weiter, indem wir für den einen von jenen Winkeln eine Seite aufnehmen und zusehen, ob sich aus zwei Seiten und einem Winkel ein Dreieck bestimmen lässt. Dabei sind aber zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich der gegebene Winkel zwischen den gegebenen Seiten liegt oder nicht.

I. *a.* Sind von einem Dreiecke zwei Seiten und der Winkel, welchen sie einschliessen, gegeben, so denke man sich zuerst den Winkel gezeichnet und auf seine Schenkel

vom Scheitel aus die gegebenen Seiten aufgetragen. Auf den Schenkeln des Winkels erhält man hierdurch zwei Punkte, welche man nur noch durch eine Gerade zu verbinden braucht, um sogleich ein Dreieck zu bekommen, welches in der That die gegebenen Bestandtheile enthält. Da es aber zwischen zwei Punkten nur eine einzige Gerade giebt, so ist jenes Dreieck auch das einzige, welches die gegebenen Bestandtheile enthält; d. h.: Ein Dreieck ist durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmt. Hieraus folgt weiter: Zwei Dreiecke sind congruent, sobald sie in zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen.

b. Einige Aufmerksamkeit verdient noch der Fall, wenn die zwei gegebenen Seiten des Dreiecks einander gleich sind: $AC = BC$. Denkt man sich hier die Halbirungslinie CD des Winkels C gezogen, so entstehen die beiden Dreiecke ACD und BCD; in diesen ist der Voraussetzung nach $AC = BC$, ferner CD beiden gemeinschaftlich, endlich $\angle ACD = \angle BCD$ vermöge der Construction. Die beiden Dreiecke ADC und BCD stimmen also in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind folglich congruent und lassen daher die Folgerung $\angle BAC = \angle ABC$ zu; d. h.: Die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich.

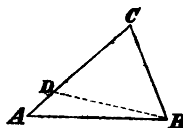
Fig. 17.



Auf das gleichseitige Dreieck angewendet giebt dies noch den Satz: Die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind einander gleich und zwar ist jeder $= \frac{2}{3}R = 60^0$.

c. Sind dagegen die Seiten AC und BC ungleich, etwa AC die grössere, so schneide man von C aus die kleinere auf der grösseren ab, so dass $CD = CB$ wird; es entsteht hierdurch ein gleichschenkliches Dreieck und in diesem ist nach dem Vorigen $\angle CBD = \angle CDB$. Der letztere bildet zugleich den Aussenwinkel des Dreiecks ABD und ist deshalb $= \angle ABD$

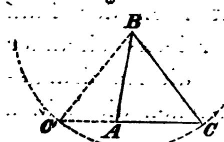
Fig. 18.



$+ \angle BAD$, folglich ganz sicher grösser als $\angle BAD$ allein. Aus der so gewonnenen Ungleichung $\angle CDB > \angle BAD$ folgt nun sogleich, wenn statt $\angle CDB$ der ihm gleiche $\angle CBD$ gesetzt wird, $\angle CBD > \angle CAB$; um so mehr aber ist gewiss $\angle CBA > \angle CAB$, weil jetzt an die Stelle des ohnehin Grösseren etwas noch Grösseres gesetzt worden ist; also: **Der grösseren Seite eines Dreiecks liegt jedesmal der grössere Winkel gegenüber.**

II. In dem zweiten Falle, wenn zwei Seiten des Dreiecks und einer der nicht eingeschlossenen Winkel gegeben sind, unterscheiden wir, ob der Winkel der grösseren oder der kleineren jener Seiten gegenüberliegt.

Fig. 19.



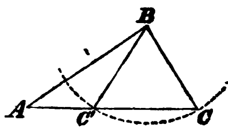
Sind nun erstlich gegeben AB, BC und $\angle A$, wobei $BC > AB$ ist, so construire man zuerst den Winkel A und nehme von seinem Scheitel aus auf dem einen seiner Schenkel eine Strecke $= AB$, so hat zwei Ecken A und B des fraglichen Dreiecks. Um nun die dritte Ecke zu finden, berücksichtige man, dass dieselbe einerseits auf dem Winkelschenkel AC liegen, ausserdem aber noch von B um die gegebene Gerade BC entfernt sein muss. Denkt man sich aus B mit dem Halbmesser BC einen Kreis beschrieben, so bildet dieser den Inbegriff aller derjenigen Punkte, welche von B um BC entfernt sind, und folglich muss sich der Punkt C auf dieser Kreislinie befinden; da er ausserdem noch auf dem Winkelschenkel AC liegen muss, so giebt jetzt der Durchschnitt des Kreises und des in Rede stehenden Winkelschenkels die dritte Ecke und somit das ganze Dreieck. Es schneidet aber der Kreis den Winkelschenkel oder dessen Verlängerung zum zweiten Male*) in C', und so wäre es wohl möglich, dass hier aus den gegebenen Bestandtheilen zwei Dreiecke herzustellen wären; dem ist jedoch nicht so; das Dreieck ABC' stimmt zwar in zwei Seiten ($AB = AB$ und $BC' = BC$)

*) Da AB kleiner als der Kreishalbmesser CB ist, so liegt A im Inneren des in Rede stehenden Kreises und folglich muss eine Gerade durch A den Kreis wenigstens zweimal schneiden, beim Eintritte in den Kreis und beim Austritte aus demselben. Dass aber

mit dem Dreiecke ABC überein, dagegen besitzt es nicht den Winkel BAC, sondern dessen Nebenwinkel; demnach giebt es nur ein einziges Dreieck, welches die gegebenen Bestandtheile enthält, d. h.: Ein Dreieck ist durch zwei Seiten und den der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkel bestimmt; oder auch: Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen und ausserdem die den jedesmaligen grösseren Seiten gegenüberliegenden Winkel beiderseits gleich sind.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn der gegebene Winkel A nicht der grösseren, sondern der kleineren der gegebenen Seiten gegenüberliegt, wo umgekehrt BC kleiner als AB ist. Die vorige Construction bleibt sich dann zwar gleich, aber es fällt der zweite Durchschnitt C nicht in die Verlängerung von AB, sondern zwischen A und C, und hier giebt es in der That zwei (in den Grundlinien AC und AC') verschiedene Dreiecke ABC und ABC', welche gleichwohl in zwei Seiten ($AB = AB$, $BC' = BC$) und ebenso in einem Winkel (BAC) übereinstimmen. Demnach ist in diesem Falle das Dreieck im Allgemeinen nicht bestimmt, im Gegentheile findet gewöhnlich eine Zweideutigkeit statt.

Fig. 20.



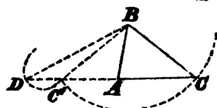
§. 9.

Bestimmung des Dreiecks aus seinen drei Seiten.

Betrachten wir endlich noch den letzten Fall der Bestimmung eines Dreiecks, denjenigen nämlich, in welchem

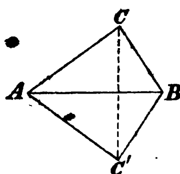
die Gerade den Kreis nicht zum dritten Male schneidet, erhellt so. Wäre D der dritte Durchschnittspunkt, so müsste wegen der Gleichheit aller Halbmesser $BD = BC'$ und auch $BD = BC$ sein; aus dem ersten folgt $\angle BDC = \angle BC'D$ und aus dem zweiten $\angle BDC = \angle BCC'$; also wäre auch $\angle BC'D = \angle BCC'$, was unmöglich ist, weil der Aussenwinkel $BC'D$ mehr betragen muss als der gegenüberliegende Innenwinkel BCC'.

Fig. 21.



die drei Seiten desselben gegeben sind. Denken wir uns zuerst die eine Seite des Dreiecks, und zwar die längste, AB, hingelegt, so muss der Endpunkt C der zweiten Seite AC offenbar auf einer Kreislinie zu suchen sein, welche aus A mit dem Halbmesser AC beschrieben werden kann, denn auf dieser Kreislinie liegen alle Punkte, welche von A um AC abstehen. Da aber C nicht nur der Endpunkt von AC, sondern auch der Endpunkt der dritten Seite BC ist und folglich um die gegebene Entfernung BC von B entfernt sein muss, so ist aus einem ähnlichen Grunde der Punkt C auch auf derjenigen Kreislinie zu suchen, welche um B mit dem Halbmesser BC beschrieben werden kann. Der Punkt C liegt aber nur dann auf beiden Kreislinien zugleich, wenn er der Durchschnittspunkt derselben ist, und hierdurch erhält man die dritte Ecke C des Dreiecks und somit das ganze Dreieck. Es könnte nun aber sein, dass sich die Kreise noch mehrmals schnitten, ausser im Punkte C, z. B. noch im Punkte C', es würden dann offenbar noch mehr Dreiecke, wie hier ABC', entstehen, welche aus denselben drei Seiten wie ABC zusammengesetzt sind. Um zu entscheiden, ob diese anderen Dreiecke von dem ersten verschieden sind oder nicht, bringen wir eins derselben in eine solche Lage, dass C und C' auf entgegengesetzten Seiten von AB liegen (wenn diese Lage nicht von Hause aus statt finden sollte), und ziehen die Gerade CC'. Da nach der Construction $AC = AC'$ und $BC = BC'$ ist, so sind die Dreiecke ACC' und BCC' beide gleichschenklig und mithin haben wir

Fig. 22.



$$\angle ACC' = \angle AC'C,$$
$$\angle BCC' = \angle BC'C;$$

durch Addition dieser Gleichungen folgt augenblicklich

$$\angle ACB = \angle AC'B;$$

die Dreiecke stimmen also ausser in den Seiten noch in einem Winkel, mithin in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein und sind folglich congruent. Wir haben daher den Satz: **Ein Dreieck ist durch seine drei Seiten bestimmt**, oder: **Zwei Dreiecke sind**

congruent, sobald sie in den drei Seiten der Reihe nach übereinstimmen.

Fassen wir nun Alles zusammen, was wir über die Bestimmung der Dreiecke kennen gelernt haben, so können wir sagen: **ein Dreieck ist durch drei Bestandtheile, unter denen sich wenigstens eine Seite befinden muss, vollkommen bestimmt**; kürzer noch lässt sich dies so ausdrücken: **drei von einander unabhängige Bestandtheile reichen zur Bestimmung eines Dreiecks hin**, wo der Fall dreier Winkel durch den Zusatz „unabhängig“ ausgeschlossen ist, indem der dritte Winkel von den zwei ersten abhängt $[C = 2R - (A + B)]$. Als Ausnahme von diesem Satze ist einzig und allein der zweideutige Fall zu betrachten, in welchem zwei Seiten und der der kleineren von ihnen gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

Unter besonderen Umständen kann eine geringere Anzahl von Bestandtheilen zur Bestimmung des Dreiecks ausreichen, nämlich dann, wenn das Dreieck einer speciellen Classe von Dreiecken angehört. So ist z. B. das gleichschenklige Dreieck schon durch zwei Seiten (nämlich Grundlinie und Schenkel) oder durch eine Seite und einen Winkel bestimmt; das gleichseitige Dreieck bestimmt sich durch eine Seite allein.

§. 10.

Eigenschaften und Bestimmung der Vier- und Vielecke.

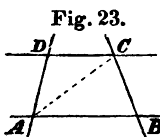
I. Da sich jedes Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen lässt, so ist leicht einzusehen, auf welche Weise man die Frage: „wieviel Bestimmungsstücke gehören zu einem Vielecke?“ zu beantworten im Stande sein wird. Bleiben wir zunächst bei einem Vierecke *ABCD* stehen und denken uns die Diagonale *AC* desselben gezogen, so zerfällt es in zwei Dreiecke *ABC* und *ACD*, welche die Seite *AC* gemeinschaftlich besitzen. Es ist unmittelbar klar, dass das ganze Viereck bestimmt sein wird, wenn seine beiden Theile, die Dreiecke *ABC* und *ACD*, bestimmt sind, und demnach wären $2 . 3 = 6$ Bestandtheile nöthig,

da aber die Seite *AC* in beiden Dreiecken vorkommt, so fallen zwei von den sechs Bestandtheilen jener Dreiecke (oder des Vierecks) in einen einzigen zusammen und es bleiben daher nur noch fünf übrig, d. h.: Zur Bestimmung eines Vierecks sind im Allgemeinen fünf Bestandtheile nothwendig.

Wir sagen hier „im Allgemeinen", weil man auch mit einer geringeren Zahl Bestandtheile auskommen kann, sobald das Viereck kein beliebiges ist, sondern einer bestimmten Klasse angehört, und ebendeswegen besondere Eigenschaften besitzt. Wir wollen diese Untersuchung genauer durchführen.

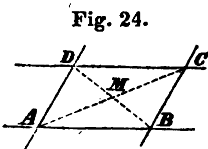
a. Das Trapez. Zieht man in dem Trapez *ABCD* die Diagonale *AC*, so werden wie bisher drei Stücke zur Bestimmung des Dreiecks *ABC* erfordert, welches den ersten Theil des ganzen Trapezes ausmacht. Von dem zweiten Dreiecke *ACD* kennen wir nun erstlich die Seite *AC*, ferner den Winkel *ACD*, weil vermöge der Definition des Trapezes *CD* parallel zu *AB* liegen, mithin $\angle ACD = \angle BAC$ sein muss, und demnach fehlt zur Bestimmung des Dreiecks *ACD* nur noch ein einziger Bestandtheil; dieser giebt mit den Bestandtheilen des Dreiecks *ABC* zusammen vier Bestandtheile, d. h.: Zur Bestimmung eines Trapezes sind nur vier Bestandtheile erforderlich.

Fig. 23.



b. Das Parallelogramm. Die beiden Dreiecke *ABC* und *ACD*, in welche das Parallelogramm *ABCD* durch die Diagonale *AC* zerlegt wird, haben die Seite *AC* gemeinschaftlich; ausserdem sind die Winkel *BAC* und *DCA* als Wechselwinkel und aus demselben Grunde die Winkel *ACB* und *CAD* einander gleich; die in Rede stehenden Dreiecke stimmen demnach in einer Seite und zwei Winkeln überein, sind folglich congruent und führen deshalb zu den Gleichungen $AB = CD$ und $BC = CA$, d. h.: In einem Parallelogramme sind die Gegenseiten einander gleich. Man wird übrigens leicht bemerken, dass dieser

Fig. 24.



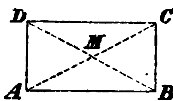
Satz auch umgekehrt gilt, d. h.: Ein Viereck mit gleichen Gegenseiten ist ein Parallelogramm.

Zieht man noch die zweite Diagonale *BD*, welche die erste in *M* schneidet, so zerfällt das Parallelogramm in vier Dreiecke, von denen je zwei einander gegenüberliegende congruent sind. In Beziehung auf die Dreiecke *ABM* und *CDM* hat man z. B. nach dem Vorigen $AB = CD$, $\angle ABM = \angle CDM$ und $\angle AMB = \angle CMD$ (als Scheitelwinkel), mithin Uebereinstimmung in einer Seite und den Winkeln, folglich auch Congruenz. Vermöge der letzteren ist $AM = CM$ und $BM = DM$, d. h.: Die Diagonalen eines Parallelogrammes halbiren sich gegenseitig. Auch dieser Satz kann umgekehrt werden, nämlich: Ein Viereck, dessen Diagonalen einander halbiren, ist ein Parallelogramm.

Aus den angegebenen Eigenschaften folgt, dass das Parallelogramm *ABCD* bestimmt ist, sobald man entweder seine Hälfte, nämlich das Dreieck *ABC*, oder eins der Dreiecke *ABM*, *BCM*, *CDM*, *DAM* kennt; in jedem Falle heisst dies: Zur Bestimmung eines Parallelogrammes sind nur drei Bestandtheile erforderlich.

c. Das Rechteck. Einfacher gestalten sich die vorigen Verhältnisse, wenn die Winkel des Parallelogrammes gleich werden, also letzteres in ein Rechteck übergeht. Ausser der Gleichheit der Gegenseiten findet hier noch die Gleichheit der Diagonalen statt, weil die Dreiecke *ABC* und *BAD* in zwei Seiten ($AB = BA$ und $BC = DA$) und in dem rechten Winkel übereinstimmen, mithin congruent sind. Da ferner von gleichen Linien auch die Hälften gleich sein müssen, so hat man weiter $MA = MB = MC = MD$ oder in Worten: Der Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Rechteckes ist von den Ecken desselben gleich weit entfernt*).

Fig. 25.

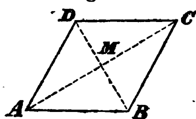


*) Betrachtet man *M* als den Mittelpunkt der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks *ABC*, so kann man den obigen Satz auch folgendermaassen aussprechen: In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist der Mittelpunkt der Hypotenuse von den drei Spitzen des Dreiecks gleich weit entfernt.

Mittelst der Bemerkung, dass das Rechteck als das Doppelte eines rechtwinkligen Dreieckes angesehen werden kann, und dass letzteres durch seine beiden Katheten schon bestimmt ist, hat man noch den Satz: Ein Rechteck wird durch zwei in einer Ecke zusammenstossende Seiten bestimmt.

d. Der Rhombus. Wenn ein Viereck gleiche Seiten erhält, so ist $AB = BC = CD = DA$, und es stimmen daher die Dreiecke ABC und CDA in allen Seiten überein; hieraus folgt ihre Congruenz und weiter $\angle CAB = \angle ACD$, mithin $AB \parallel CD$, ebenso $\angle BCA = \angle DAC$ und $BC \parallel DA$; d. h.: Ein Rhombus kann als Parallelogramm mit zwei gleichen anliegenden Seiten $(AD = AB)$ betrachtet werden.

Fig. 26.



Zieht man noch die zweite Diagonale BD, welche die erste in M schneidet, so ist $AB = CB$, ferner wie bei jedem Parallelogramme $MA = MC$, endlich MB sich selbst gleich; die Dreiecke ABM und CBM sind demnach wegen der Uebereinstimmung in allen drei Seiten congruent, und es folgt daraus die Gleichheit der Nebenwinkel AMB und CMB, sowie die Congruenz der vier Dreiecke ABM, CBM, CDM, ADM, d. h.: Die Diagonalen eines Rhombus schneiden sich rechtwinklig und theilen das Viereck in vier congruente Dreiecke.

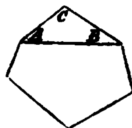
Da hiernach der Rhombus $ABCD$ als das Vierfache des rechtwinkligen Dreieckes ABM betrachtet werden kann, so hat man den Satz: Der Rhombus ist durch zwei Bestandtheile bestimmt.

e. Das Quadrat kann ebensowohl als gleichseitiges Rechteck wie als rechtwinkliger Rhombus betrachtet werden und daher finden alle obigen Sätze statt, nämlich: Die Diagonalen des Quadrates sind einander gleich, schneiden sich rechtwinklig und theilen das Viereck in vier congruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke.

Für die Bestimmung des Quadrates hat man den einfachsten aller bisherigen Sätze, nämlich: Das Quadrat ist durch seine Seite allein bestimmt.

II. Wie man diese Betrachtungen weiter fortsetzen und dadurch die Anzahl der Bestandtheile finden könnte, welche zur Bestimmung von Fünf-, Sechsecken u. s. w. nothwendig sind, erhellt aus dem Bisherigen ohne Schwierigkeit; um aber der Betrachtung selbst gleich das allgemeinste Gepräge zu verleihen, wollen wir die Frage zu beantworten versuchen, wieviel im Allgemeinen Bestandtheile gegeben sein müssen, damit ein Vieleck von n Seiten bestimmt sei. — Denken wir uns ein Vieleck von beliebig vielen Seiten und über einer Seite AB desselben ein Dreieck construirt, dessen Seiten AC und BC nicht in die Verlängerungen der anstossenden Vieleckseiten fallen, so nimmt das Vieleck um eine Seite zu. Von dem angesetzten Dreiecke müssen, wenn dasselbe bestimmt sein soll, drei Bestandtheile gegeben sein, und da einer derselben, die Seite AB von Hause aus bekannt war, so bedarf es nur noch der Angabe zweier Bestandtheile dieses Dreiecks, d. h. des ganzen Vielecks, weil das Dreieck ein Stück vom Vielecke ist. Mit anderen Worten: wenn die Seitenzahl eines Vielecks um Eins zunimmt, so wächst die Anzahl der zur Bestimmung des Vielecks nöthigen Bestandtheile um Zwei. Gehen wir nun von dem Dreiecke aus, zu dessen Bestimmung drei Bestandtheile erfordert wurden, so folgt, dass zur Bestimmung

Fig. 27.



eines 4 Ecks gehören $5 = 2.4 - 3$ Bestandtheile,
„ 5 „ „ $7 = 2.5 - 3$ „
„ 6 „ „ $9 = 2.6 - 3$ „
u. s. f.

Zur Bestimmung eines Vielecks von n Seiten gehören demnach im Allgemeinen $2n - 3$ Bestandtheile.

Auch hier können, wie beim Viereck, Fälle eintreten, in welchen man mit einer geringeren Anzahl von Bestandtheilen auskommt. Bei einem Vielecke z. B., dessen Seiten und Winkel gleich sind, d. h. bei einem regelmässigen Vielecke, kennt man die Winkel gleich von vornherein [da nämlich die n gleichen Winkel zusammen die Winkelsumme $(2n - 4)R$ ausmachen sollen, so muss jeder der

n^{te} Theil von $(2n-4)R$ sein}, und man bedarf folglich nur noch der Kenntniss der Seiten, d. h. einer Seite, weil sämmtliche Seiten einander gleich sein sollen. Dies giebt den Satz: Ein regelmässiges Vieleck ist durch eine seiner Seiten bestimmt.

Der vorige, von der Bestimmung des Quadrats handelnde Satz ist nur ein specieller Fall dieses Theoremes; das reguläre Viereck nämlich und das Quadrat sind eine und dieselbe Figur, wie man sogleich aus den bisher entwickelten Eigenschaften des Quadrats erkennen wird.

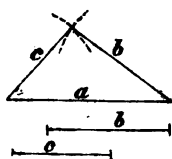
Constructionen zu Cap. II.

Wenn wir in dem Vorhergehenden gezeigt haben, dass ein Vieleck völlig bestimmt ist, sobald nur eine gewisse Anzahl seiner Bestandtheile gegeben vorliegt, so haben wir damit bewiesen, dass es jederzeit möglich sein muss, aus einer hinreichenden Anzahl gegebener Bestandtheile die übrigen noch unbekannten Theile zu finden, und dieser Nachweis würde für eine rein theoretische Auffassung der Wissenschaft hinreichen. In der Praxis verlangt man aber mehr; hier genügt die Möglichkeit nicht, das Unbekannte finden zu können, man will vielmehr dasselbe in Wirklichkeit hergestellt sehen. Sowie man nun in der Arithmetik unbekannte Grössen aus gegebenen Grössen ableitet, wenn jene mit diesen in einem bestimmten Zusammenhange stehen, so kann man auch in der Geometrie unbekannte Gebilde aus bekannten oder gegebenen Gebilden ableiten, wenn zwischen beiden ein Zusammenhang statt findet, und sowie dort die unbekannte Grösse gefunden wird, wenn man die gegebene Grössen auf gewisse Weise durch Rechnung mit einander verknüpft, so entsteht auch hier das unbekannte Gebild aus den bekannten, indem man letztere auf gewisse Weise zu ferneren Gestalten mit einander verbindet. Eine solche Verbindung gegebener Gebilde, welche zur Kenntniss eines gesuchten unbekannten Gebildes führt, heisst eine geometrische Construction und wird

durch diesen Namen in so fern passend bezeichnet, als in der That ein solches Verfahren mit einem Zusammenbau gegebener Stücke Aehnlichkeit besitzt. Um aber derartige Constructionen ausführen zu können, muss man wenigstens eine oder einige der einfachsten Constructionen selbst erst voraussetzen, da sich das Verwickeltere nur leisten lässt, wenn man das Einfache bereits kennt; in der That macht auch die Geometrie derartige Voraussetzungen, indem sie annimmt, dass man erstlich zwischen zwei gegebenen Punkten eine Gerade zu ziehen und zweitens aus einem gegebenen Punkte mit einem vorgeschriebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben verstehe (mechanisch ist dies bekanntlich mit Hülfe des Lineals und Zirkels sehr leicht). Jede Construction, welche nur aus einer endlichen Anzahl von Wiederholungen dieser Grundconstructionen besteht, heisst eine elementar-geometrische, dagegen gehört jede Construction, welche noch andere Hilfsmittel als Gerade und Kreis voraussetzt, in das Gebiet der höheren Geometrie.

1. Aus den drei gegebenen Seiten eines Dreiecks das Dreieck selbst zu construiren. Sind *a* *b*, *c* die gegebenen Seiten, so beschreibe man aus dem einen Endpunkte von *a* einen Kreis (oder auch nur Kreisbogen) mit dem Halbmesser *b*, und aus dem anderen Endpunkte von *a* ebenfalls einen Kreis mit dem Halbmesser *c*; den Durchschnittspunkt beider Kreise verbinde man mit den Endpunkten von *a* durch gerade Linien, so hat man das verlangte Dreieck, wie sich aus den in §. 8 durchgeführten Betrachtungen auf der Stelle ergiebt. Sollten sich die mit den Halbmessern *b* und *c* beschriebenen Kreise nicht schneiden, so wäre aus den Kreisen *a*, *b* und *c* auch kein Dreieck möglich; dieser Fall würde z. B. eintreten, wenn $b + c$ nicht mehr betrüge als *a*.

Fig. 28.

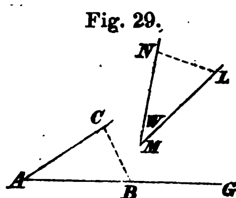


Berücksichtigt man, dass es mittelst des angegebenen Verfahrens immer möglich ist, ein Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen Dreiecke in den Seiten übereinstimmt, und bedenkt man weiter, dass bei einer solchen

Copie des Dreiecks gleichzeitig die Winkel copirt werden, so hat man gleich eine Construction für die folgende Aufgabe:

2. **An den Endpunkt einer gegebenen Geraden eine zweite Gerade so anzulegen, dass beide einen gegebenen Winkel einschliessen.** Ist *AG* die gegebene Gerade und *W* der gegebene Winkel, so verbinde man zwei auf den Schenkeln desselben beliebig gewählte Punkte *L* und *N* durch eine Gerade und construire nun ein Dreieck, welches die Seiten $AB = LM$; $BC = LN$ und $CA = MN$ hat; dann sind die Dreiecke *BAC* und *LMN* wegen der Uebereinstimmung in allen Seiten congruent und folglich ist $\angle BAC = \angle LMN = W$, wie verlangt wurde. In der Praxis ist es am bequemsten, die Seiten *LM* und *MN* einander gleich zu nehmen, so dass *W* der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks wird.

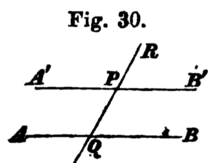
Fig. 29.



Von diesem Verfahren zur Abtragung oder Uebertragung eines Winkels von einer Stelle zur andern lässt sich ein vortheilhafter Gebrauch zur Lösung der folgenden Aufgabe machen:

3. **Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel läuft.** Ist *AB* die gegebene Gerade, und *P* der (ausser ihr) gegebene Punkt, so verbinde man denselben mit irgend einem Punkte *Q* der Geraden *AB* durch eine gerade Linie *RPQ* und trage den entstehenden Winkel *RQB* so an *P*, dass $\angle RPB' = \angle RQB$ wird; es ist dann der Winkelschenkel *PB'* oder die Gerade *A'B'* parallel zu *AB*, wie sogleich aus dem Satze folgt, dass zwei Gerade parallel laufen, sobald sie mit einer dritten gleiche correspondirende Winkel bilden.

Fig. 30.

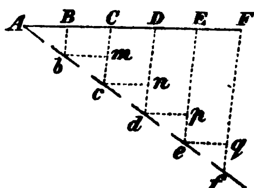


Unter den Aufgaben, welche sich durch Ziehen von Parallelen lösen lassen, ist die folgende besonders wichtig:

4. **Eine Gerade von gegebener Länge in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.** Man lege an die gegebene Gerade *AF* unter einem beliebigen Winkel eine zweite Gerade *Af*, welche den Anfangs-

punkt mit der ersten gemein hat; auf dieser zweiten Geraden trage man eine Strecke Ab von willkührlicher Länge mehrmals hinter einander auf ($Ab = bc = cd = de = ef$) und zwar so vielmal, als die Anzahl der gleichen Theile beträgt, in welche AF getheilt werden soll; den letzten so erhaltenen Punkt f verbinde man mit dem Endpunkte F der gegebenen Geraden und ziehe nun durch a, b, c, d u. s. w. Parallelen zu fF, so theilen diese AF in die verlangte Anzahl gleicher Theile. — Zunächst ist leicht zu sehen, dass AF bei diesem Verfahren in ebenso viel Theile getheilt wird wie Af; denn da die Parallelen bB, cC, dD u. s. w. nicht zusammentreffen, so schneidet jede die Gerade AF in einem anderen Punkte und mithin entstehen auf AF ebenso viel Theilungspunkte, als auf Af vorhanden, also vorgeschrieben waren. Dass aber die Theile AB, BC, CD u. s. w. auch einander gleich sind, erkennt man leicht, wenn die Geraden bm, cn, dp u. s. w. parallel zu AF gezogen werden; es entstehen dann die Parallelogramme $BCmb$, $CDnc$, $DEpd$ u. s. w., und in diesen sind nach §. 10 I. die Gegenseiten einander gleich, also $BC = bm$, $CD = cn$, $DE = dp$ u. s. w. Kann man nun nachweisen, dass AB, bm, cn, dp u. s. w. unter sich gleich sind, so folgt augenblicklich nach dem Vorigen, dass jetzt auch AB, BC, CD u. s. w. einander gleich sind. Die sämmtlichen Dreiecke AbB, bcm, cdn, dep u. s. w. stimmen aber erstlich überein in den Seiten Ab, bc, cd u. s. w. (vermöge der Construction); ferner in den correspondirenden Winkeln BAb, mbc, ncd u. s. w. einerseits und AbB, bcm, cdn u. s. w. andererseits und sind mithin sämmtlich congruent; daraus folgt denn $AB = bm = cn = dp$ u. s. w., und nach dem Obigen $AB = BC = CD = DE$ u. s. w.

Fig. 31.

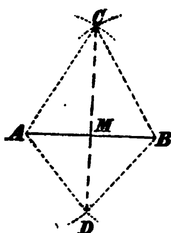


In dem Falle, wo es sich um eine Theilung in nur zwei gleiche Theile handelt, kann man sich auch eines anderen Verfahrens bedienen, welches wir, da es kürzer als das vorige ist, noch besonders erwähnen wollen.

5. Eine Gerade von gegebener Länge zu halbiren. Man beschreibe über und unter der gegebenen Ge-

raden AB gleichschenklige Dreiecke ABC und ABD, was sich nach No. 1 ausführen lässt, wenn man $AB = a$ und $b = c$ nimmt; die Spitzen dieser Dreiecke verbinde man durch eine Gerade CD, so schneidet diese die gegebene Gerade im Halbirungspunkte M. Die Dreiecke ACD und BCD stimmen nämlich in den Seiten AC und BC, AD und BD überein (vermöge der Construction) und besitzen die Seite CD gemeinschaftlich; sie sind mithin nach §. 9 congruent, woraus $\angle ACD = \angle BCD$ folgt. Die Dreiecke AMC und BMC haben nun erstlich die Seite CM gemein, ferner ist in ihnen $AC = BC$ (vermöge der Construction), und ausserdem sind nach dem Vorigen die Winkel ACM und BCM gleich; daraus zusammen folgt die Congruenz der fraglichen Dreiecke (nach §. 8 I.) und mithin ist auch $AM = BM$, also M der Mittelpunkt von AB. Man kann noch bemerken, dass zugleich $\angle AMC = \angle BMC$, folglich, weil beide Winkel zusammen zwei Rechte ausmachen, jeder gleich einem Rechten sein muss; die Gerade CD bildet also mit AB einen rechten Winkel, oder, wie der Kunstausdruck ist, CD steht senkrecht auf AB.

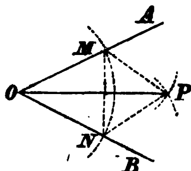
Fig. 32.



Nachdem wir gezeigt haben, wie sich Gerade in beliebig gleiche Theile theilen lassen, müssten wir nun eigentlich zeigen, wie man die Theilung von Winkeln auszuführen hätte. Diese Aufgabe übersteigt aber die Kräfte der Elementargeometrie; man kann mit Hilfe der geraden Linie und des Kreises einen beliebigen Winkel nur in zwei und ausserdem noch den rechten Winkel in drei gleiche Theile zerlegen, wie wir in dem Nachfolgenden zeigen wollen.

6. Einen gegebenen Winkel zu halbiren. Auf den Schenkeln AO und BO des gegebenen Winkels AOB nehme man vom Scheitel O aus zwei gleiche Abschnitte $OM = ON$, so dass also das Dreieck OMN ein gleichschenkliges Dreieck sein würde; über MN als Basis beschreibe man nun ein zweites gleichschenkliges Dreieck MNP (am bequemsten nimmt man $MP = OM$), so ist die Gerade OP die

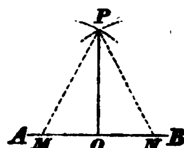
Fig. 33.



Halbirungslinie des Winkels *AOB*. Da nämlich durch die Construction $OM = ON$ und $MP = NP$ geworden und die Gerade *OP* den Dreiecken *OMP* und *ONP* gemeinschaftlich ist, so stimmen letztere in allen Seiten überein und sind folglich congruent. Man hat daher auch $\angle MOP = \angle NOP$, d. h. der Winkel *AOB* ist in zwei gleiche Theile getheilt.

Die vorstehende Construction ändert sich in Nichts, wenn der Winkel *AOB* ein gestreckter sein sollte, der halbe Winkel *MOP* ist in diesem Falle ein rechter und man hat also dann die Aufgabe:

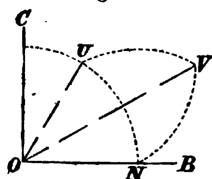
Fig. 34.



7. **Auf einer gegebenen Geraden durch einen in ihr gegebenen Punkt eine Senkrechte zu errichten**, zu gleicher Zeit mit gelöst.

8. **Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.** Auf dem einen Schenkel *BO* des gegebenen rechten Winkels *BOC* nehme man vom Scheitel *O* aus einen beliebigen Abschnitt *ON* und errichte über diesem ein gleichseitiges Dreieck *ONU*; halbirt man noch den Winkel *NOU* desselben durch die Gerade *OV*, so theilen die Geraden *OU* und *OV* den Winkel *BOC* in drei gleiche Theile. Da nämlich (nach §. 8*b*) $\angle NOU = \frac{2}{3}R$ ist, so muss $\angle COU = R - \frac{2}{3}R = \frac{1}{3}R$ sein, und da ferner jeder der gleichen Winkel *UOV* und *NOV* die Hälfte von *NOU*, d. h. die Hälfte von $\frac{2}{3}R$ ausmacht, so beträgt jeder $\frac{1}{3}R$, also ebenso viel wie $\angle COU$.

Fig. 35.



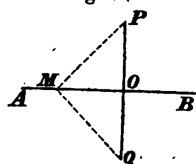
Kehrt man diese Betrachtung um, so erhält man die Auflösung der praktisch nicht unwichtigen Aufgabe:

9. **Auf einer gegebenen Geraden eine durch ihren Endpunkt gehende Senkrechte zu errichten.** Ist nämlich *O* der Endpunkt, so nehme man den beliebigen Abschnitt *ON*, beschreibe über demselben das gleichseitige Dreieck *NUO*, halbire den Winkel *NUO* und mache darauf $\angle UOC = \angle UOV$, so ist der entstehende Winkelschenkel *OC* die gesuchte Senkrechte. Der Winkel *NOC* besteht nämlich aus den Winkeln *NOU* und *UOC*, d. h. *NOU* und $\frac{1}{2}NOU$, und ist folglich $= \frac{2}{3}R + \frac{1}{3}R = R$.

In den beiden Aufgaben 7 und 9, deren Lösungen sich hier mit ergaben, lag der Punkt, durch welchen die auf einer Geraden senkrecht zu errichtende Linie gehen sollte, immer in der Geraden selbst, für den Fall aber, dass er ausserhalb derselben liegt, gestaltet sich die Sache wie folgt.

10. Auf eine gegebene Gerade von einem bestimmten Punkte ausser ihr eine Senkrechte herabzulassen. Man verbinde den gegebenen Punkt P mit einem beliebigen Punkte M der gegebenen Geraden AB durch die Gerade MP, mache auf der andern Seite der Geraden AB den Winkel BMQ = dem Winkel BMP und nehme $MQ = MP$, so steht die Gerade PQ senkrecht auf AB. — Da nämlich $MP = MQ$, $\angle OMP = \angle OMQ$ und die Seite MO den Dreiecken MOP und MOQ gemeinschaftlich ist, so sind die letzteren nach §. 8 I. congruent; daraus folgt $\angle MOP = \angle MOQ$, und da beide Winkel den gestreckten Winkel POQ ausfüllen, so ist der letztere in zwei gleiche Theile getheilt, d. h. $\angle MOP = \angle MOQ = R$.

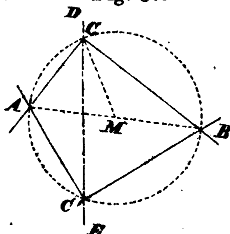
Fig. 36.



Zu bemerken ist noch, dass die Gerade MP jederzeit grösser als die Senkrechte PO sein muss, weil MP immer dem grösseren Winkel gegenüberliegt. Unter allen Verbindungslinien zwischen einem Punkte und einer Geraden ist also die Senkrechte von jenem auf diese die kürzeste und heisst deswegen auch die Entfernung des Punktes von der Geraden.

11. Einen rechten Winkel so zu legen, dass seine Schenkel durch zwei gegebene Punkte (A, B) gehen und seine Spitze auf eine gegebene Gerade (DE) fällt. Vermöge der Bemerkung, dass in einem rechtwinkligen Dreiecke die Spitze des rechten Winkels ebenso weit vom Mittelpunkte der Hypotenuse entfernt ist, als dieser von den Endpunkten der Hypotenuse, ergiebt sich folgende Construction: man halbire die Gerade AB in M und beschreibe aus M mit $MA = MB$ als Halbmesser einen Kreis;

Fig. 37.



schneidet dieser die Gerade *DE* in den Punkten *C* und *C'*, so sind *ACB* und *AC'B* die gesuchten Lagen des rechten Winkels. Dass in der That sowohl *ACB* als *AC'B* ein rechter Winkel ist, kann mittelst der Hilfslinie *MC* oder *MC'* gezeigt werden; es entstehen nämlich zwei gleichschenklige Dreiecke *ACM* und *BCM*; in dem ersten ist $\angle MAC = \angle MCA$ und der Aussenwinkel $CMB = \angle MAC + \angle MCA = 2 \angle MCA$; im zweiten Dreiecke hat man ähnlich $\angle MBC = \angle MCB$ und den Aussenwinkel $CMA = \angle MBC + \angle MCB = 2 \angle MCB$. Da nun die Summe der beiden Aussenwinkel zwei Rechte beträgt, so hat man auch

$$2 \angle MCA + 2 \angle MCB = 2R \text{ oder } \angle MCA + \angle MCB = R,$$

also $\angle ACB = R$, wie verlangt wurde. Für den Winkel *AC'B* ist der Beweis ganz analog, indem nur *C'* für *C* eintritt.

Wenn, wie oben vorausgesetzt wurde, der Kreis die Gerade zweimal schneidet, so giebt es auch immer zwei Auflösungen des Problems; diese können verschieden oder gleich sein. Der erste Fall findet statt, sobald die Geraden *AB* und *DE* sich unter irgend einem spitzen Winkel schneiden, denn es sind dann die Dreiecke *ABC* und *ABC'* nicht congruent; dagegen entstehen zwei gleiche Auflösungen ($\triangle ABC \cong \triangle ABC'$) wenn *DE* entweder parallel oder rechtwinklig zu *AB* ist; geht die Gerade *DE* durch einen der gegebenen Punkte *A* und *B*, so degenerirt eines der Dreiecke *ABC* und *ABC'* zu einer geraden Linie, hat sie ferner mit dem Kreise nur einen Punkt gemein, so giebt es nur eine Auflösung, trifft endlich der Kreis die Gerade gar nicht, so hat die Aufgabe keine Lösung. Will man sich alle diese Fälle der Reihe nach zur Anschauung bringen, so braucht man die Gerade *DE* nur um einen Punkt *D* von ihr, dessen Abstand von *AB* kleiner als der Kreishalbmesser ist, herumzudrehen und in verschiedenen Lagen die Construction zu wiederholen; man wird dabei bemerken, dass jederzeit zwei Auflösungen existiren, so lange der Durchschnitt von *AB* und *DE* zwischen die Punkte *A* und *B* fällt.

Cap. III.

Die Vergleichung und Ausmessung der Flächen geradliniger Figuren.

---

§. 11.

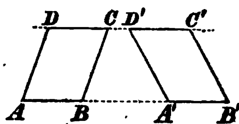
Vergleichung der Flächen von Dreiecken und Parallelogrammen.

Wir nehmen den am Ende von §. 10 abgebrochenen Faden wieder auf, um jetzt die geradlinigen Gebilde aus einem neuen von selbst sich darbietenden Gesichtspunkte zu betrachten. Die bisherige Untersuchung beschränkte sich auf die, so zu sagen, äusseren Bestandtheile der geradlinigen Gestalten, auf die Geraden nämlich, aus denen sie zusammengesetzt sind, und auf die Winkel, welche die letzteren mit einander bilden. Sobald aber ein Gebild zu einer geschlossenen Figur wird, tritt etwas ganz Neues hervor, nämlich die begränzte Fläche, welche gewissermaassen den Inhalt der Figur bildet. Haben wir nun bisher die Vielecke nach ihren Seiten und Winkeln verglichen, so liegt es uns jetzt ob, auch die Flächen derselben einer Betrachtung zu unterwerfen. Diese Untersuchung würde sehr kurz ausfallen, wenn wir uns dabei auf congruente Vielecke beschränken wollten, denn es ist unmittelbar klar, dass congruente Vielecke auch gleiche Flächen haben; aber man sieht leicht ein, dass zur Gleichheit der Flächen die Congruenz der betreffenden Vielecke gar nicht nothwendig ist. Schneiden wir z. B. von einem Vielecke durch eine

Diagonale ein Dreieck ab und setzen dieses in einer andern Lage irgend wo an das Uebrige wieder an, so entsteht ein zweites Vieleck, das offenbar dieselbe Fläche wie das ursprüngliche besitzt, ohne ihm congruent zu sein. Es ergiebt sich daraus sogleich die Frage, womit wir uns zu beschäftigen haben; sie lautet: unter welchen Umständen sind Vielecke, abgesehen von ihrer Gestalt, einander an Fläche gleich? Die hierauf bezügliche Untersuchung würde mit dem einfachsten Polygone, nämlich mit dem Dreieck, anzufangen sein, man kann aber, ohne etwas Wesentliches zu ändern, auch das Parallelogramm zum Ausgangspunkte wählen, weil jedes Dreieck als die Hälfte eines Parallelogrammes angesehen werden darf.

I. Sind zwischen parallelen Geraden zwei Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gezogen, welche in den Seiten AB und $A'B'$ (den Grundlinien) übereinstimmen, so entstehen zwei Trapeze $AA'D'D$ und $BB'C'C$, die zur Deckung gebracht werden können, wenn man das zweite um $AB = A'B'$ verschiebt, bis BC auf AD fällt. Hieraus folgt unmittelbar die Congruenz dieser Trapeze und daraus die Gleichheit ihrer Flächen. Nimmt man von jedem derselben das Trapez $BA'D'C$ weg, so bleibt von dem ersten das Parallelogramm $ABCD$, vom zweiten das Parallelogramm $A'B'C'D'$; diese Reste müssen aber nach einem bekannten Grundsatze gleich sein, d. h.: **Parallelogramme, welche zwischen denselben Parallelen liegen und gleiche Grundlinien haben, besitzen gleiche Flächen.**

Fig. 38.



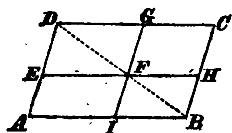
Man kann diesen wichtigen Satz noch auf einen anderen Ausdruck bringen, welcher sich durch seine Kürze empfiehlt. Lässt man nämlich von zwei Punkten M und N einer Parallelen Senkrechte auf die andere Parallele herabfallen, so sind diese Senkrechten MP und NQ einander parallel, weil sie mit der Geraden PQ gleiche correspondirende Winkel bilden; das Viereck $MNQP$ ist mithin ein Parallelogramm (spezieller ein Rechteck), und in diesem sind die Gegenseiten MP und NQ gleich; d. h.: Parallele

Gerade haben überall gleiche Entfernung von einander. Nennen wir nun *Höhe* eines Parallelogrammes die Entfernung der Grundlinie von der Gegenseite, so lautet der oben ausgesprochene Satz folgendermaassen: *Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen haben gleiche Flächen.*

Da von zwei gleichen Grössen auch die Hälften gleich sind, so folgt hieraus unmittelbar der Satz: *Dreiecke von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen besitzen gleiche Flächen.*

II. Der vorigen Vergleichung zweier Parallelogramme, die in einer Seite (der Basis), nicht aber in den Winkeln übereinstimmen, lässt sich eine andere Vergleichung gegenüberstellen, bei welcher die Parallelogramme einen gemeinsamen Winkel, aber verschiedene Seiten besitzen. Zieht man nämlich durch einen Punkt F in der Diagonale BD eines Parallelogrammes $ABCD$ Parallelen zu den Seiten des Vierecks, so zerfällt dieses in vier Parallelogramme $DEFG$, $AEFI$, $CGFH$, $BHFI$, von denen das erste und letzte in Dreiecke getheilt sind; dabei gelten folgende Beziehungen:

Fig. 39.



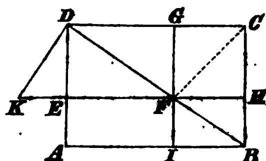
in dem Parallelogramme $ABCD$; $\triangle ABD = \triangle CDB$,
„ „ „ $DEFG$, $\triangle DEF = \triangle GDF$,
„ „ „ $BHFI$, $\triangle FBI = \triangle HBF$.

Nehmen wir die beiden letzten Flächen von der ersten weg, so müssen gleiche Flächen übrig bleiben; linker Hand besteht dieser Rest aus dem Parallelogramme $AIFE$, rechts aus dem Parallelogramme $CGFH$, diese Flächen sind also gleich, und man hat daher den Satz: *Legt man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogrammes Parallelen zu den Seiten desselben, so sind die auf entgegengesetzten Seiten der Diagonale liegenden neuen Parallelogramme an Fläche gleich.*

§. 12.
Vergleichung der Flächen von Rechtecken und Quadraten.

I. Das am Ende des vorigen Paragraphen ausgesprochene Theorem gestattet eine wichtige Anwendung auf das Rechteck *ABCD*, und zwar ist es hier von Interesse, den Punkt *F* so zu wählen, dass eins der Rechtecke *AIFE* und *CGFH*, etwa das letztere, zu einem Quadrate wird; man erreicht dies leicht, indem man den rechten Winkel bei *C* halbirt und zum Punkte *F* den Durchschnitt der Halbirungslinie mit der Diagonale *BD* nimmt. Es ist nun das Quadrat *CGFH* gleich dem Rechtecke *AEFI*, dessen Seiten sich näher angeben lassen, wenn man auf *FD* in *D* eine Senkrechte errichtet, welche die Verlängerung von *FE* in *K* schneidet. Zufolge dieser Construction ist nämlich

Fig. 40.



$$\angle EDF + \angle EDK = R,$$

andererseits in dem rechtwinkligen Dreiecke *DEF*

$$\angle EDF + \angle DFE = R,$$

mithin durch beiderseitige Vergleichung

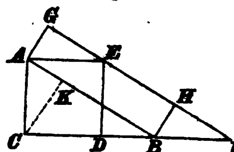
$$\angle EDK = \angle DFE = \angle HFB.$$

Die Dreiecke *FDK* und *HFB* stimmen also in den gleichnamigen Winkeln überein, sie sind ferner beide rechtwinklig, endlich ist noch $ED = HF$, weil beide Linien $= FG$ sind; aus dieser Uebereinstimmung in einer Seite und zwei Winkeln folgt nun die Congruenz der Dreiecke *EDK* und *HFB*, daraus $EK = HB$ oder $EK = EA$. In Beziehung auf das rechtwinklige Dreieck *FDK* betrachtet, hat das Quadrat *CGFH* das Perpendikel *DE* zur Seite, und die Seiten des Rechtecks *AEFI* bestehen aus den Abschnitten *EF* und $EK = EA$ der Hypotenuse, und wenn das rechtwinklige Dreieck *FDK* zuerst gegeben wäre, so würde man dasselbe immer zu der obigen Figur ergänzen können; demnach gilt allgemein der Satz: In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über dem von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefäll-

ten Perpendikel an Fläche gleich dem Rechtecke aus den Abschnitten der Hypotenuse.

II. Das rechtwinklige Dreieck bietet noch eine zweite Gelegenheit zur Vergleichung der Flächen eines Quadrates und eines Rechteckes. Ist nämlich *ACB* ein bei *C* recht-

Fig. 41.

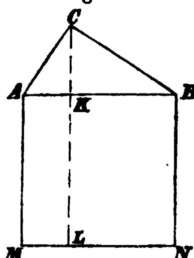


winkliges Dreieck und *ACDE* das Quadrat der einen Kathete desselben, mithin *AE* // *CD*, so kann man aus den Seiten *AB* und *AE* leicht auf die Weise ein Parallelogramm construiren, dass man *CD* über *D* hinaus verlängert und durch *E* eine Parallele zu *AB* legt, bis sie jene Verlängerung in *F* schneidet. Die Parallelogramme *ACDE* und *ABFE* besitzen jetzt gleiche Höhen und gleiche Grundlinien ($CD = AE = BF$), mithin ist das Quadrat *ACDE* an Fläche gleich dem Parallelogramme *ABFE*. — Fällt man weiter von *A* und *B* aus auf die (nöthigenfalls verlängerte) Gerade *EF* die Senkrechten *AG* und *BH*, so haben die Parallelogramme *ABFE* und *ABHG* die Gerade *AB* zur gemeinsamen Grundlinie und ausserdem die nämliche Höhe $AG = BH$, also wiederum gleiche Flächen. Es ist also einerseits $ABFE = ACDE$, andererseits $ABFE = ABHG$, mithin das Quadrat *ACDE* gleich dem Rechtecke *ABHG*. Letzteres hat zur einen Seite *AB* die Hypotenuse des Dreiecks *ABC*, die andere Seite *BH* bestimmt sich, wenn man von *C* auf *AB* die Senkrechte *CK* herablässt. Aus ähnlichen Gründen wie in No. I. ist dann $\angle ACK = \angle CBK$, oder wenn man für letztern den correspondirenden Winkel *BFH* setzt, $\angle ACK = \angle BFH$, ferner $\angle AKC = \angle BHF = R$, endlich $AC = BF$, weil beide Linien $= AE$ sind. Die Dreiecke *ACK* und *BFH* stimmen also in einer Seite und zwei Winkeln überein, sind mithin congruent und liefern die Beziehung $AK = BH$, welche zeigt, dass die Rechtecksseite *BH* gleich dem an der Kathete *AC* liegenden Abschnittte der Hypotenuse ist. Dies giebt den Satz: Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke eine Senkrechte von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse, so ist das Quadrat irgend einer Kathete gleich dem Rechtecke aus der Hypotenuse und dem an jener Kathete liegenden Abschnitte derselben.

Man kann diesen Satz mit Hilfe einer neuen Benennung etwas anders ausdrücken. Lässt man nämlich von den Endpunkten *P* und *Q* einer beliebigen geraden oder krummen Linie Senkrechte auf eine Gerade *AB* herab und bezeichnet die Fusspunkte dieser Senkrechten mit *P'* und *Q'*, so nennt man nicht selten die Strecke *P'Q'* die Projection der Linie *PQ*; der obige Satz lautet dann: Projicirt man die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse, so ist das Quadrat irgend einer Kathete gleich dem Rechtecke aus ihrer Projection und der Hypotenuse.

III. Das vorstehende Theorem führt zu einer bemerkenswerthen Folgerung, wenn man dem Rechtecke eine etwas andere Lage giebt. Ist nämlich *ABNM* das Quadrat der Hypotenuse und *CKL* die bis zum Durchschnitte mit *MN* verlängerte Senkrechte, so hat man

Fig. 42.



Quadr. über *AC* gleich dem Rechteck *AKLM*,
„ „ *BC* „ „ „ *BKLN*;

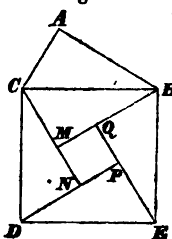
durch Addition ergiebt sich links die Summe der Quadrate über *AC* und *BC*, rechts das Quadrat *ABNM*, welches jener Summe gleich sein muss; d. h.: In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

Nach seinem Erfinder führt dieses Theorem den Namen des Pythagoräischen Lehrsatzes. *).

---

*) Ein sehr anschaulicher Beweis desselben ist folgender. *ABC* sei das rechtwinklige Dreieck, über dessen Hypotenuse *BC* das Quadrat *BCDE* construirt ist; klappt man das Dreieck *ABC* um, so dass es in die Lage *MBC* kommt, so zerfällt der rechte Winkel *BCD* in zwei Winkel *BCM* und *MCD* oder $\angle BCM + \angle MCD = R$; ausserdem ist aber auch $\angle BCM + \angle CBM = R$; durch Vergleichung mit dem Vorigen und durch beiderseitige Subtraction von $\angle BCM$ folgt hieraus, dass $\angle MCD = \angle CBM$ ist. Man gewinnt also Platz, um das Dreieck *ABC* zum zweiten Male in das Quadrat *BCDE* zu legen, und zwar so, dass die Hypotenuse auf *CD* und die längere Kathete an *CM* zu liegen kommt und demnach *CDN* das zweite zu *ABC* congruente Dreieck ist. Man übersieht auf der Stelle, wie sich dieses Verfahren fort-

Fig. 43.



§. 13.

Die Verwandlung der Vielecke in andere von gleicher Fläche.

I. Die Sätze der vorigen Paragraphen liefern die Mittel, um Vielecke in andere zu verwandeln, welche die-

---

setzen lässt und dass hierbei das Quadrat *BCDE* in fünf Stücke zerfällt: in die vier zu *ABC* congruenten Dreiecke *BCM*, *CDN*, *DEP*, *EBQ* und in das Quadrat *MNPQ*, dessen Seite nichts Anderes als der Unterschied unter den Katheten des ursprünglichen Dreiecks ist (man hat nämlich $MN = CN - CM = AB - AC$, ebenso $NP = DP - DN = AB - AC$ u. s. w.) Diese fünf Bestandtheile lassen sich aber auch auf andere Weise anordnen, wenn man nämlich die vier Dreiecke nicht mit den Katheten, wie es hier der Fall ist, sondern mit den Hypotenusen aneinander legt. Dies geschieht auf folgende Weise.

Fig. 44α.

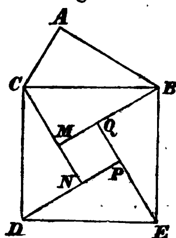
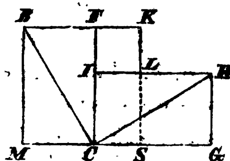


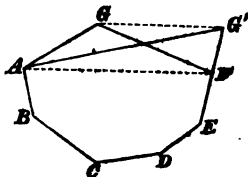
Fig. 44β.



Wir stellen in Fig. 43β zuerst das Dreieck *BCM* auf und lehnen daran das zweite Dreieck (*CDN* in Fig. 43α) so, dass die Hypotenusen zusammenfallen und ein Rechteck *BMCF* entsteht. Daneben legen wir das dritte Dreieck *CGH* (in Fig. 43α *DEP*) und an dieses das vierte, ähnlich wie vorhin, so dass beide zusammen das Rechteck *CGHI* ausmachen. In den Winkel *FIH* bringen wir endlich noch das fünfte Stück (in Fig. 43α *MNPQ*), so dass jetzt ein Sechseck *BMGHLK* entstanden ist, welches dieselbe Fläche wie das frühere Quadrat *BCDE* besitzt. Verlängern wir die Gerade *KL*, bis sie *MG* in *S* schneidet, so zerfällt jenes Sechseck in zwei Rechtecke *BMSK* und *SGHL*, über welche Folgendes zu bemerken ist. Es war $IL = CS$ der Unterschied beider Katheten und *CM* die kleinere Kathete, beides zusammen giebt die grössere Kathete, mithin ist $MS = MB$, folglich das Rechteck *BMSK* ein Quadrat und zwar das über der grössern Kathete construirte Quadrat; ferner war *CG* die grössere Kathete, der Unterschied beider Katheten *CS* davon abgezogen, giebt die kleinere Kathete, mithin ist $SG = GH$, folglich das Rechteck *SGHL* ein

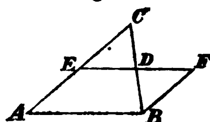
selben Flächen aber weniger Seiten besitzen. Ist z. B. das Vieleck *ABCDEFG* gegeben, so schneide man davon mittelst der Diagonale *AF* ein Dreieck *AFG* ab und lege durch *G* eine Parallele zur Diagonale. Verlängert man darauf die Seite *EF*, bis sie jener Parallele in *G'* begegnet, und zieht *AG'*, so entsteht ein Dreieck *AFG'*, welches dieselbe Fläche wie *AFG* besitzt. Wenn man nun zu dem übrigen Vielecke *FABCDE* das Dreieck *AFG'* hinzusetzt, so ist an die Stelle des weggenommenen Dreiecks (*AFG*) ein gleich grosses getreten und demnach hat sich die Fläche des ganzen Vielecks nicht geändert, dagegen enthält das neue Vieleck *ABCDEFG'* eine Seite weniger als das ursprüngliche, weil *EF* und *FG'* in gerader Linie liegen, also nur eine Seite *EG'* ausmachen. — Dieses Verfahren kann mehrmals nach einander angewendet werden, um successiv die Seitenzahl des Vielecks (jedesmal um Eins) zu vermindern; beim Dreieck aber verbietet sich die weitere Anwendung von selbst durch den Umstand, dass das Dreieck keine Diagonalen besitzt. Jedes Vieleck lässt sich demnach in ein Dreieck von gleicher Fläche verwandeln.

Fig. 45.



Wäre man auf dem vorigen Wege zu dem Dreiecke *ABC* gelangt, so kann man dieses noch in ein Parallelogramm umsetzen; halbirt man nämlich eine Seite *BC* in *D*, zieht durch *D* eine Parallele zu *AB* und durch *B* eine Parallele zu *AC*, welche die erste Parallele in *F* schneidet, so ist in den Dreiecken *DCE* und *DBF* der Construction zufolge $BD = CD$, ferner $\angle BDF = \angle CDE$ (Scheitelwinkel) und $\angle DBF = \angle DCE$ (Wechselwinkel). Die Dreiecke *BFD* und *CED* sind demnach congruent

Fig. 46.

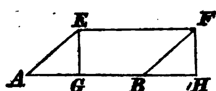


Quadrat und zwar das Quadrat der kleinern Kathete. Die beiden Quadrate *BMSK* und *SGHL* füllen zusammen das Sechseck *BGMHLK* und dieses kommt dem Quadrate *BCDE* in Fig. 43 α gleich, es ist also in der That das Hypotenusenquadrat aus denselben Stücken zusammengesetzt, wie die Summe der Kathetenquadrate.

(§. 7) also auch von gleicher Fläche. Schneidet man von dem Dreiecke *ABC* das Dreieck *CDE* ab und setzt statt dessen das gleiche Dreieck *BDF* zu, so ist das entstehende Parallelogramm *ABFE* dem Dreiecke *ABC* an Fläche gleich; man hat daher den Satz: Jedes Vieleck lässt sich in ein Parallelogramm von gleicher Fläche verwandeln.

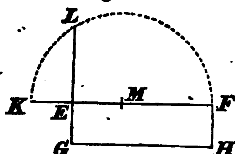
Fällt man von den Punkten *E* und *F* auf die verlängerte *AB* die Senkrechten *EG* und *FH*, so entsteht ein Rechteck *EFHG*, welches dem Parallelogramme *AEFB* an Fläche gleich kommt, d. h.: Jedes Vieleck kann in ein Rechteck von gleicher Fläche verwandelt werden.

Fig. 47.



Um endlich aus diesem Rechtecke ein Quadrat zu machen, benutzen wir den in §. 12, I. bewiesenen Satz in Verbindung mit der Aufgabe 11. im Anhange zu Cap. II. Es kommt nämlich darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, in welchem die Rechteckseiten *EF* und *EG* als Abschnitte der Hypotenuse erscheinen; das Quadrat des auf die Hypotenuse gefällten Perpendikels wäre dann das gesuchte Quadrat. Man erreicht dies leicht, wenn man auf der Verlängerung von *FE* die Strecke *EK* = *EG* nimmt, ferner *GE* verlängert und einen rechten Winkel so legt, dass seine Schenkel durch die Punkte *F* und *K* gehen und seine Spitze auf die Verlängerung von *GE* fällt, wenn man also *FK* im *M* halbirt und mit *MK* als Halbmesser aus *M* einen Kreis beschreibt, welcher die verlängerte *EG* in dem gesuchten Winkelscheitel schneidet. Ist hiermit die Seite *EL* des gesuchten Quadrats bestimmt, so kann man sagen: Jedes Vieleck lässt sich in ein Quadrat von derselben Fläche verwandeln.

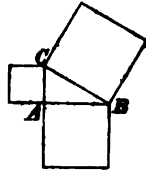
Fig. 48.



II. Wir denken uns jetzt mehrere neben einander liegende Vielecke und jedes derselben mittelst der obigen Constructionen in ein Quadrat verwandelt; wir haben dann ebensoviel einzelne Quadrate, und es entsteht von selbst die Frage, ob sich diese Flächen nicht zu einem einzigen

Quadrate vereinigen lassen. In der Beantwortung dieser Frage liegt nun die Bedeutung des Pythagoräischen Satzes: Sind nämlich zwei Quadrate vorhanden, von denen das eine die Seite AB, das andere die Seite AC besitzt, so kann man diese Seiten zu Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks BAC nehmen und es ist das Quadrat über der Hypotenuse BC gleich der Summe der Quadrate über den Katheten AC und BC. Durch mehrmalige Anwendung dieses Verfahrens ist man im Stande, beliebig viele Quadrate zu einem einzigen Quadrate zusammenzuziehen. Mit Rücksicht auf das Vorige giebt dies den Satz: Beliebig viel gegebene Vielecke lassen sich jederzeit zu einem Quadrate vereinigen, dessen Fläche die Summe von den Flächen jener Vielecke ausmacht.

Fig. 49.



Der Pythagoräische Satz vermittelt übrigens nicht nur die Addition, sondern auch die Subtraction der Flächen, sobald letztere jederzeit auf Quadrate zurückgeführt sind. Das Quadrat irgend einer Kathete ist nämlich der Unterschied zwischen dem Hypotenusenquadrate und dem Quadrate der anderen Kathete; will man also zwei quadratische Flächen von einander subtrahiren, so braucht man nur ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, welches die Seite des grössern Quadrats zur Hypotenuse und die des kleinern zur Kathete hat; die andere Kathete ist dann die Seite desjenigen Quadrats, dessen Fläche den Unterschied unter den Flächen der gegebenen Quadrate darstellt.

Nicht minder leicht ist die Multiplication der Quadrate, d. h. die Construction eines Quadrats, dessen Fläche ein Vielfaches, etwa das $n$fache einer gegebenen Quadratfläche ausmacht. Stellt man nämlich das gegebene Quadrat $n$mal zwischen zwei Parallelen auf, und rückt diese n Quadrate auseinander, so entsteht zunächst ein Rechteck, welches das gegebene Quadrat $n$mal enthält. Dieses Rechteck lässt sich wieder in ein Quadrat verwandeln und letzteres ist das gesuchte Quadrat.

Um endlich die Division der Quadrate auszuführen, d. h. um ein Quadrat zu construiren, dessen Fläche der

n^{te} Theil einer gegebenen Quadratfläche ist, theilt man zunächst die eine Seite des gegebenen Quadrats in n gleiche Theile und zieht durch alle Theilpunkte senkrechte Gerade. Das Quadrat zerfällt jetzt in n congruente Rechtecke und es ist mithin eine solche Rechteckfläche gleich dem n^{ten} Theile der Quadratfläche; verwandelt man dieses Rechteck in ein Quadrat, so genügt letzteres den Bedingungen der Aufgabe.

An die hiermit beendigten Vergleichungen und Verwandlung der Flächen geradliniger Vielecke schliesst sich die sogenannte Ausmessung derselben. Dieser muss aber die Ausmessung der Seiten vorangehen, und wir holen daher an dieser Stelle nach, was im Anfange des §. 2 übergangen wurde.

§. 14.

Die Längenvergleichung gerader Linien.

Wenn zwei begränzte Gerade vorliegen, so können zwei verschiedene Fälle eintreten; entweder ist nämlich die längere von beiden ein Vielfaches der kürzeren oder nicht. Im ersten Falle, wo also, wie man zu sagen pflegt, die kleinere Linie in der grösseren aufgeht, nennt man die erste das genaue Maass der zweiten; wenn dagegen die kleinere Linie in der grösseren nicht aufgeht, so sind zwei Unterfälle möglich; es giebt nämlich entweder eine dritte Linie, welche sowohl in der einen als in der andern aufgeht, oder es existirt keine solche Linie. Bezeichnen wir zwei gegebene Linien kurz mit a und b, wobei a die kleinere sein möge, so nennen wir eine dritte Linie m, welche in a und b gleichzeitig aufgeht, das gemeinschaftliche Maass von a und b und wir sagen dann von a und b: sie seien commensurabel, dagegen heissen a und b incommensurabel, wenn sie kein gemeinschaftliches Maass haben *).

---

*) Wir sind hier zu den incommensurabeln Linien durch eine rein logische Unterscheidung gekommen, aus welcher sich nicht beurtheilen lässt, ob es dergleichen Linien giebt oder nicht. Dass aber in Wirklichkeit incommensurable Linien vorkommen, werden wir bald an einem Beispiele sehen.

Es knüpft sich an diese Erklärungen noch eine einfache Bemerkung. Geht m in d auf, so geht es offenbar auch in $2d$, $3d$, $4d$ u. s. w. auf, d. h.: das Maass einer Linie ist zugleich ein Maass ihrer Vielfachen. Nehmen wir eine zweite grössere Linie e hinzu, welche ebenfalls m zum Maasse hat, so geht nun m auch in $e \pm d$, $e \pm 2d$, $e \pm 3d$ u. s. w. auf; bezeichnen wir daher mit λ eine ganze positive Zahl, so haben wir den Satz: W e n n m e i n g e m e i n s c h a f t l i c h e s M a a s s v o n d u n d e i s t, s o m u s s e s j e d e r z e i t i n $e \pm \lambda d$ a u f g e h e n.

Sind nun zwei Gerade a und b gegeben, so kommt es vor Allem darauf an, zu entscheiden, ob sie ein gemeinschaftliches Maass besitzen oder nicht, ob sie also commensurabel oder incommensurabel sind. Hierzu dienen folgende Betrachtungen. — Wir nehmen die kleinere der Linien (a) so oft von der grösseren (b) weg, als es geht, d. h. wir untersuchen, wievielmal a in b enthalten ist; hierbei wird (wenn nicht b gerade ein Vielfaches von a ausmacht) ein Rest r bleiben, welcher weniger als a beträgt. Nennen wir λ die Zahl, welche angiebt, wievielmal a von b weggenommen wurde, so haben wir die Gleichung $b - \lambda a = r$ oder

$$b = \lambda a + r.$$

Nehmen wir jetzt r, welches kleiner als a ist, sovielmal als möglich von a weg, so bleibt im Allgemeinen wieder ein Rest, der r_1 heissen möge und kleiner als r ist; bezeichnen wir mit λ_1 die Zahl, welche angiebt, wie oft r von a weggenommen würde, so ist weiter $a - \lambda_1 r = r_1$ oder

$$a = \lambda_1 r + r_1.$$

Wiederum nehmen wir jetzt r_1 so oft als möglich von r weg und kommen so auf einen ferneren Rest $r_2 < r_1$, und wenn jene Wegnahme λ_2 mal geschah, so ist $r - \lambda_2 r_1 = r_2$ oder

$$r = \lambda_2 r_1 + r_2.$$

Man übersieht auf der Stelle, wie sich dieses Verfahren weiter fortsetzen lässt und dass man damit die folgende Reihe von Gleichungen erhält:

$$b = \lambda a + r,$$
$$a = \lambda_1 r + r_1,$$
$$r = \lambda_2 r_1 + r_2,$$
$$r_1 = \lambda_3 r_2 + r_3,$$
$$r_2 = \lambda_4 r_3 + r_4,$$
u. s. w.

worin die Grössen b, a, r, r_1, r_2, r_3 u. s. w. eine abnehmende Reihe bilden, indem jede derselben kleiner als die vorhergehende oder grösser als die nachfolgende ist. — Bei der Ausführung dieses Verfahrens können nur zwei verschiedene Fälle eintreten; entweder nämlich kommt man einmal auf einen Rest gleich Null, oder die Reste gehen, immer kleiner werdend, in's Unendliche fort, ohne zu Null zu werden (wie z. B. die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ u. s. w.). Diese Fälle bedürfen einer genauen Untersuchung.

I. Wird irgend einer der Reste gleich Null, etwa r_5, so erhalten wir eine endliche Reihe von Gleichungen, nämlich:

$$b = \lambda a + r,$$
$$a = \lambda_1 r + r_1,$$
$$r = \lambda_2 r_1 + r_2,$$
$$r_1 = \lambda_3 r_2 + r_3,$$
$$r_2 = \lambda_4 r_3 + r_4,$$
$$r_3 = \lambda_5 r_4.$$

Hier ist nun r_4 ein Maass von r_3, weil es darin λ_5 mal enthalten ist, und man kann daser sagen, r_4 sei das gemeinschaftliche Maass von r_4 und r_3. Da λ_4 eine ganze Zahl bedeutet, so folgt hieraus nach dem früheren Satze, dass r_4 in $\lambda_4 r_3 + r_4$, d. h. in r_2 aufgeht; weil aber r_4 vorhin auch in r_3 aufging, so ist jetzt r_4 das gemeinschaftliche Maass von r_3 und r_2. Nach dem schon einmal benutzten Satze geht jetzt r_4 auch in $\lambda_3 r_2 + {}_3$, d. h. in r_1 auf, mithin geht es in r_2 und r_1 zugleich auf, ist also das gemeinschaftliche Maass von r_2 und r_1. Ebendeswegen geht nun r_4 in $\lambda_2 r_1 + r_2$, d. h. in r auf, folglich gleichzeitig in r_1 und r, und ist daher das gemeinschaftliche Maass von r_1 und r. Daraus folgt weiter, dass r_4 in $\lambda_1 r + r_1$, d. h. in a aufgeht und somit das gemeinschaftliche Maass von r und a ist. Weil endlich r_4 in r und a zugleich auf-

geht, so geht es auch in $\lambda a + r$, d. h. in b auf und ist folglich das gemeinschaftliche Maass von b und a. Der letzte Rest r_4 ist also das gemeinschaftliche Maass von a und b, und da man auf der Stelle übersieht, dass die obigen Schlüsse in jedem Falle angewendet werden können, wo es überhaupt einen letzten Rest giebt, so haben wir den Satz: **Sobald einer der Reste r, r_1, r_2 u. s. w. verschwindet, sind die Linien a und b commensurabel und der letzte nicht verschwindende Rest ist ihr gemeinschaftliches Maass.**

II. Wenn dagegen keiner der Reste r, r_1, r_2 u. s. w. verschwindet, so sind die vorigen Schlüsse nicht mehr anwendbar, und dies scheint darauf hinzudeuten, dass es in diesem Falle kein gemeinschaftliches Maass für a und b giebt. Um darüber in's Klare zu kommen, wollen wir annehmen, es existire ein solches gemeinschaftliches Maass m, und zusehen, was daraus folgt. Stellen wir die vorigen Gleichungen in der nachstehenden Form dar:

$$r = b - \lambda a\ ,$$
$$r_1 = a - \lambda_1 r\ ,$$
$$r_2 = r - \lambda_2 r_1,$$
$$r_3 = r_1 - \lambda_3 r_2$$

u. s. f.,

so gelten folgende Schlüsse. Weil m der Voraussetzung nach in a und b aufgeht und λ eine ganze Zahl ist, so muss es nach dem Früheren auch in $b - \lambda a$, d. h. in r aufgehen und ist folglich zugleich das gemeinschaftliche Maass von a und r. Ebendeswegen muss m in $a - \lambda_1 r$, d. h. in r_1 aufgehen, d. h. das gemeinschaftliche Maass von r und r_1 sein. Eine weitere Folge hiervon ist, dass m in $r - \lambda_2 r_1$, d. h. in r_2 aufgeht u. s. w. Man übersieht gleich, dass die Fortsetzung dieser Schlussweise zeigt, dass m gleichzeitig in allen Resten r, r_1, r_2, r_3 u. s. w. aufgehen muss. Diese Reste sind also Vielfache von m und daher können wir, mit μ, μ_1, μ_2, μ_3 u. s. w. ganze positive Zahlen bezeichnend, $r = \mu m$, $r_1 = \mu_1 m$, $r_2 = \mu_2 m$ u. s. w. setzen. Nun bilden aber die Reste r, r_1, r_2 u. s. w. eine abnehmende Reihe, und daher müsste jetzt

$$\mu m > \mu_1 m > \mu_2 m > \mu_3 m \ldots ,$$

das heisst

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 \ldots$$

sein. Wenn nun eine Reihe ganzer positiver Zahlen, von irgend einer Stelle anfangend, fortwährend abnimmt, so muss nothwendig eine von ihnen der Null gleich werden; also gäbe es auch einen Rest $= 0$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass die Reihe der Reste in's Unendliche fortgeht, ohne dass einer verschwindet; es muss daher die Voraussetzung, dass für a und b ein gemeinschaftliches Maass m existire, falsch gewesen sein, und wir können deshalb behaupten: **Wenn keiner der Reste r, r_1, r_2 u. s. w. verschwindet, giebt es kein gemeinschaftliches Maass für die Linien a und b; letztere sind dann incommensurabel.**

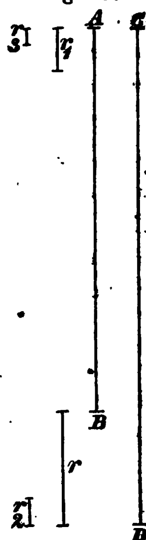
Hiermit sind wir also zu einem Kennzeichen gelangt, nach welchem sich in jedem Falle die Commensurabilität oder Incommensurabilität zweier Linien sicher entscheiden lässt.

§. 15.

Das Verhältniss zweier begränzten Geraden.

I. Hat man von zwei commensurabeln Geraden a und b das gemeinschaftliche Maass m gefunden, so ist es immer leicht, das numerische Verhältniss derselben anzugeben; nennen wir nämlich α die Zahl, welche angiebt, wie oft m in a enthalten ist, und ebenso β die Zahl, welche sagt, wievielmal m in b steckt, so nennen wir den Quotienten $\frac{\alpha}{\beta}$ das Verhältniss der Geraden a und b (indem sich b zu a wie β zu α verhält). Die Zahlen α und β lassen sich immer ausmitteln, wenn man das gemeinschaftliche Maass m sowohl in a als in b einträgt und zusieht, wie oft das Eintragen möglich ist; man kann aber auch einen etwas anderen Weg einschlagen, welchen man am besten aus einem Beispiele erkennen wird. Es seien AB und CD die gegebenen Geraden a und b; man findet dann nach dem im vorigen Paragraphen beschriebenen Verfahren

$$b = 1a + r,$$
$$a = 3r + r_1,$$
$$r = 2r_1 + r_2,$$
$$r_1 = 1r_2 + r_3,$$
$$r_2 = 2r_3,$$



und da r_3 der letzte nicht verschwindende Rest ist, so haben wir hiermit das gemeinschaftliche Maass ($r_3 = m$) von a und b gefunden. Setzen wir statt r_2 in der vorletzten Gleichung seinen aus der letzten Gleichung fliessenden Werth $2r_3$, so wird

$$r_1 = 1 \,.\, 2r_3 + r_3 = 3r_3,$$

und dies giebt, in die drittletzte Gleichung eingeführt,

$$r = 2 \,.\, 3r_3 + 2r = 8r_3.$$

Setzen wir ferner in der zweiten Gleichung für r und r_1 ihre Werthe, so wird

$$a = 24r_3 + 3r_3 = 27r_3,$$

und jetzt verwandelt sich die erste Gleichung in

$$b = 27r_3 + 8r_3 = 35r_3;$$

so dass also das gemeinschaftliche Maass r_3 in a 27mal und in b 35mal enthalten ist. Demnach giebt der Bruch $\frac{35}{27}$ das Verhältniss beider Geraden an, oder man hat $b:a = 35:27$. Dass eine solche von der letzten Gleichung an rückwärts schreitende oder aufsteigende Substitution jederzeit möglich ist, wird aus diesem Beispiele hinreichend erhellen.

II. Anders gestaltet sich die Sache in dem Falle, wo a und b incommensurabel sind, weil hier keine letzte Gleichung existirt und folglich eine von unten nach oben gehende Substitution keinen Anfang fände. Wir wenden dann folgendes Verfahren an. — Von der grösseren Linie b nehmen wir wie vorhin die kleinere a sovielmal als möglich weg, wodurch wir die Gleichung

$$b = \varkappa a + r$$

erhalten, worin $\varkappa$ wie früher λ eine ganze positive Zahl und der Rest $r < a$ ist. Von dem Reste r bilden wir nun ein Vielfaches, am bequemsten das Zehnfache, und tragen

a sovielmal als möglich in die neue Linie $10r$ ein; da a und r kein gemeinschaftliches Maass haben, so muss hierbei ein Rest bleiben, und wir erhalten so eine Gleichung von der Form

$$10r = \varkappa_1 a + r_1,$$

wobei $\varkappa_1$ diejenige ganze Zahl bezeichnet, welche angiebt, wie oft sich a von der Linie $10r$ wegnehmen lässt, und der Rest $r_1 < a$ ist. Verfahren wir mit r_1 ganz so, wie vorhin mit r, so ergiebt sich eine zweite Gleichung von der Form

$$10r_1 = \varkappa_2 a + r_2,$$

worin r_2 ebenfalls weniger als a beträgt. Gehen wir auf diese Weise weiter, so gelangen wir zu einer ganzen Reihe solcher Gleichungen, nämlich

$$10r_2 = \varkappa_3 a + r_3,$$
$$10r_3 = \varkappa_4 a + r_4$$
u. s. w.

Lassen wir nun die erste Gleichung ($b = \varkappa a + r$) ungeändert, dividiren dagegen die zweite Gleichung durch 10, die dritte durch 10^2, die vierte durch 10^3 u. s. w., so wird

$$b = \varkappa a \quad + r \quad ,$$
$$r = \frac{\varkappa_1}{10} a + \frac{r_1}{10},$$
$$\frac{r_1}{10} = \frac{\varkappa_2}{10^2} a + \frac{r_2}{10^2},$$
$$\frac{r_2}{10^2} = \frac{\varkappa_3}{10^3} a + \frac{r_3}{10^3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{r^{s-1}}{10^{s-1}} = \frac{\varkappa_s}{10^s} a + \frac{r_s}{10^s},$$

wobei sämmtliche bisher erschienenen Reste $r, r_1, r_2 \ldots r_s$ weniger als a betragen.

Durch successive Substitution erhalten wir hieraus die folgende Gleichung:

$$b = \varkappa a + \frac{\varkappa_1}{10} a + \frac{\varkappa_2}{10^2} a + \ldots + \frac{\varkappa_s}{10^s} a + \frac{r_s}{10^s}$$

oder

$$b = \left(\varkappa + \frac{\varkappa_1}{10} + \frac{\varkappa_2}{10^2} + \ldots + \frac{\varkappa_s}{10^s}\right) a$$
$$+ \frac{r_s}{10^s}.$$

Lassen wir nun das letzte Glied weg, so ist offenbar

$$b > \left(\varkappa + \frac{\varkappa_1}{10} + \frac{\varkappa_2}{10^2} + \ldots + \frac{\varkappa_s}{10^s}\right) a$$

oder

1) $$\frac{b}{a} > \varkappa + \frac{\varkappa_1}{10} + \frac{\varkappa_2}{10^2} + \ldots + \frac{\varkappa_s}{10^s};$$

setzen wir dagegen an die Stelle von r_s im letzten Gliede a, so haben wir zuviel genommen, weil $r_s < a$ ist und mithin haben wir

$$b < \left(\varkappa + \frac{\varkappa_1}{10} + \frac{\varkappa_2}{10^2} + \ldots + \frac{\varkappa_s}{10^s} + \frac{1}{10^s}\right) a$$

oder

2) $$\frac{b}{a} < \varkappa + \frac{\varkappa_1}{10} + \frac{\varkappa_2}{10^2} + \ldots + \frac{\varkappa_s + 1}{10^s}.$$

Durch die beiden Gleichungen 1) und 2) ist nun das Verhältniss der Linien b und a in zwei Gränzen eingeschlossen, deren Differenz $\frac{1}{10^s}$ beträgt. Daraus folgt auf der Stelle, dass man diese Gränzen einander so nahe, als es nur verlangt wird, bringen kann, wenn man die Zahl s fortwährend zunehmen lässt, d. h., wenn man das beschriebene Verfahren immer weiter fortsetzt. Das genaue Verhältniss selbst ist diejenige Zahl, welcher sich jene Gränzen bei ihrem Zusammenrücken fortwährend nähern, sie existirt aber nur in der Idee und ist die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{b}{a} = \varkappa + \frac{\varkappa_1}{10} + \frac{\varkappa_2}{10^2} + \frac{\varkappa_3}{10^3} + \ldots \text{ in inf.}$$

Von zwei incommensurabeln Grössen lässt sich daher das Verhältniss nicht vollkommen genau, wohl aber mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit angeben. Man nennt ein solches Verhältniss ein **irrationales**, während ein vollkommen genau angebbares Verhältniss (das der commensurabeln Linien) ein **rationales** heisst.

Um diese Lehren auf einen bestimmten Fall anzuwenden, betrachten wir das Verhältniss zwischen der Diago-

nale und Seite eines Quadrates. Nehmen wir auf der Diagonale AC von C aus den Abschnitt $CB' = CB$, so ist

$$AC = B'C + AB'$$

oder

3) $$AC = AB + AB'.$$

Fig. 51.

Stellen wir ferner $B'C'$ senkrecht auf AC, so ist aus sehr naheliegenden Gründen $AB' = B'C' = C'B$, und wenn wir $C'B'' = C'B'$ nehmen,

$$AB = BC' + C'B'' + AB''$$

oder nach der vorigen Bemerkung

4) $$AB = 2AB' + AB''.$$

Ziehen wir weiter $B''C''$ senkrecht auf AB und nehmen $C''B''' = C''B''$, so ist $AB'' = B''C'' = B'C'' = C''B'''$ und

$$AB' = B'C'' + C''B''' + AB''',$$

d. i.

5) $$AB' = 2AB'' + AB'''.$$

Man übersieht leicht den Fortgang dieser Schlüsse; bezeichnen wir wie folgt:

$$AB = a, \quad AC = b,$$
$$AB' = r, \; AB'' = r_1, \; AB''' = r_2 \text{ u. s. w.},$$

so nehmen die Gleichungen 3), 4), 5) folgende Gestalt an:

$$b = a + r,$$
$$a = 2r + r_1,$$
$$r = 2r_1 + r_2,$$
$$r_1 = 2r_2 + r_3$$
u. s. f.

und da hier keiner der Reste r, r_1, r_2, r_3 u. s. w. verschwindet, so folgt aus ihnen der schöne Satz: Die Diagonale eines Quadrates ist gegen die Seite desselben incommensurabel.

Um nun das angenäherte Verhältniss beider Linien zu finden, setzen wir wieder

$$b = a + r,$$

nehmen von $r = AB'$ das Zehnfache und tragen AB sovielmal als möglich in $10r$ ein; es findet sich, dass dies viermal geht, also

$$10r = 4a + r_1$$

ist. Trägt man weiter a in das Zehnfache von r_1 ein, so geht dies einmal, also

$$10 r_1 = 1a + r_2;$$

weiter ist dann nach demselben Verfahren

$$10 r_2 = 4a + r_3,$$
$$10 r_3 = 2a + r_4$$
u. s. w.,

mithin nach der in diesem Paragraphen auseinandergesetzten Methode

$$\frac{b}{a} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \ldots,$$

d. i.

$$\frac{b}{a} = 1{,}4142\ldots$$

Bricht man den Dezimalbruch ab, so ist $\frac{b}{a} > 1{,}4142$, dagegen $< 1{,}4143$.

Nach den bisherigen Erörterungen hat es nun keine Schwierigkeit mehr, gerade Linien auszumessen. Bestimmt man nämlich von jeder der gegebenen Geraden das Verhältniss, in welchem sie zu einer willkührlich angenommenen, sich aber immer gleich bleibenden Geraden steht, so dient die letztere als Maassstab oder Einheit für die übrigen Linien, und man sagt von diesen, sie seien auf Zahlen gebracht oder in Zahlen gegeben. Diese Verhältnisszahlen selbst wollen wir die Längenzahlen der Geraden nennen.

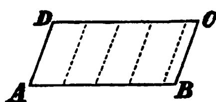
§. 16.

Die Ausmessung der Flächen geradliniger Figuren.

Das einfachste der Parallelogramme, nämlich das Rechteck, ist bekanntlich durch zwei in einer Ecke zusammenstossende Seiten bestimmt und mithin muss sich aus diesen zwei Seiten auch seine Fläche nach irgend einer, noch aufzusuchenden Regel herleiten lassen. Wie dies geschieht, zeigen folgende Betrachtungen.

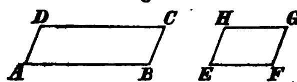
I. Wenn auf der einen Seite *AB* (der Basis) eines Parallelogrammes *ABCD* mehrere gleiche Strecken nach einander aufgetragen sind und durch den Endpunkt jeder Strecke eine Parallele zur Nebenseite *BC* gelegt wird, so zerfällt das Parallelogramm in eben soviel congruente kleinere Parallelogramme, und wenn auf der Grundlinie ein Stück übrig bleibt, kleiner als einer der aufgetragenen Theile, so fällt auch das entsprechende Parallelogramm kleiner aus als die übrigen.

Fig. 52.



Zwei Parallelogramme *ABCD* und *EFGH*, welche gleiche Winkel ($\angle B = \angle F$), gleiche Nebenseiten ($BC = FG$) und verschiedene Grundlinien (AB und EF) besitzen, lassen sich daher ebenso von einander wegnehmen oder vervielfachen, wie ihre Grundlinien, d. h. man kann auf die Flächen beider Parallelogramme genau dieselben Operationen der Vergleichung (§§. 14 und 15) wie auf ihre Grundlinien anwenden, und es muss hierbei die Vergleichung der Flächen dasselbe Verhältniss liefern, wie die Vergleichung der Grundlinien, welches auch sonst dieses Verhältniss sein möge.

Fig. 53.



Findet sich also $EF = \frac{m}{n} AB$, wo m und n irgend welche Zahlen bedeuten, so muss entsprechend $EFGH = \frac{m}{n} ABCD$ sein; hieraus folgt die Proportion

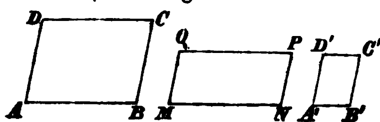
$$ABCD : EFGH = AB : EF,$$

d. h.: Die Flächen zweier gleichwinkligen Parallelogramme von verschiedenen Grundlinien und gleichen Nebenseiten verhalten sich wie die Grundlinien.

Man kann diesen Satz weiter benutzen, um die Flächen zweier nur in den Winkeln übereinstimmender Parallelogramme auf ein bestimmtes Verhältniss zu bringen. Sind nämlich *ABCD* und *A'B'C'D'* zwei derartige Parallelogramme, so lässt sich ein drittes Parallelogramm *MNPQ* construiren, welches dieselben Winkel besitzt, dessen eine Seite dem Parallelogramme *ABCD*, dessen andere Seite dem

Parallelogramme $A'B'C'D'$ entnommen ist ($MN = AB$, $NP = B'C'$), und welches nun sowohl mit $ABCD$ als mit $A'B'C'D'$ verglichen werden kann. Betrachtet man erstlich AB und MN als gleiche Nebenseiten, BC und NP als verschiedene Grundlinien, so ist

Fig. 54.



$$ABCD : MNPQ = BC : NP;$$

sieht man zweitens $B'C'$ und NP als gleiche Nebenseiten, $A'B'$ und MN als verschiedene Grundlinien an, so ist

$$A'B'C'D' : MNPQ = A'B' : MN;$$

die Zusammenziehung beider Proportionen giebt

$$ABCD : A'B'C'D' = MN \,.\, BC : A'B' \,.\, NP,$$

oder wegen $MN = AB$, $NP = B'C'$,

$$ABCD : A'B'C'D' = AB \,.\, BC : A'B' \,.\, B'C',$$

d. h.: **Die Flächen zweier gleichwinkligen Parallelogramme verhalten sich wie die Producte aus den zwei Seiten derselben.**

Da die Hälften zweier Grössen in dem nämlichen Verhältnisse zu einander stehen, wie die Grössen selbst, so knüpft sich an den obigen Satz noch die Folgerung: **Die Flächen zweier in einem Winkel übereinstimmender Dreiecke verhalten sich wie die Producte der jenen Winkel einschliessenden Seiten.**

II. In gleicher Weise, wie die Ausmessung einer begränzten Geraden nichts Anderes ist als die Bestimmung des Verhältnisses ihrer Länge zur Länge einer unveränderlichen Geraden (der Längeneinheit), verstehen wir unter Ausmessung einer begränzten Fläche die Ermittelung des Verhältnisses, in welchem ihre Grösse zu der Grösse einer bestimmten Fläche steht; letztere bildet dann den Maassstab, nach welchem Flächen gemessen werden. Man bedient sich hierzu des Quadrates der Längeneinheit, die Fläche desselben heisst die **Flächeneinheit**, die Zahl, welche angiebt, wieviel mal die Flächeneinheit in irgend einer andern Fläche enthalten ist, oder mit andern Worten, das Verhältniss einer gegebenen Fläche zur Flächeneinheit nennt man die **Flächenzahl** jener geschlossenen Figur.

Vergleichen wir zunächst ein beliebiges Rechteck mit der Flächeneinheit, so können wir beide als gleichwinklige Parallelogramme ansehen und haben wie vorhin

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{AB \cdot BC}{A'B' \cdot B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{BC}{B'C'};$$

verstehen wir unter $A'B'C'D'$ das Quadrat der Längeneinheit, so ist der linker Hand vorkommende Quotient das Verhältniss der Rechtecksfläche $ABCD$ zur Flächeneinheit, $A'B'C'D'$ also die Flächenzahl des Rechtecks; rechter Hand bedeutet $\frac{AB}{A'B'}$ das Verhältniss der Grundlinie AB des Rechtecks zur Längeneinheit $A'B'$, d. h. die Längenzahl der Grundlinie, und in ganz derselben Weise ist (wegen $B'C' = A'B'$) der Quotient $\frac{BC}{B'C'}$ einerlei mit der Längenzahl der Rechteckshöhe BC; Alles zusammengenommen giebt den Satz: Die Flächenzahl eines Rechtecks ist das Product aus den Längenzahlen seiner Grundlinie und Höhe.

Sind die Seiten des Rechtecks einander gleich, so haben wir den einfacheren Satz: Die Flächenzahl eines Quadrates ist die zweite Potenz von der Längenzahl seiner Seite.

Da nach §. 11 jedes Parallelogramm dieselbe Fläche besitzt wie ein Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe, so gilt die weitere Regel: Die Flächenzahl eines Parallelogrammes ist das Product aus den Längenzahlen seiner Grundlinie und Höhe.

Aus der einfachen Bemerkung, dass jedes Dreieck als die Hälfte eines Parallelogrammes angesehen werden darf, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat, folgt weiter: Die Flächenzahl eines Dreiecks ist das halbe Product aus den Längenzahlen seiner Grundlinie und Höhe.

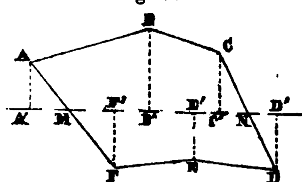
Zieht man in einem Trapeze eine Diagonale, so zerfällt dasselbe in zwei Dreiecke, welche die parallelen Seiten des Trapezes zu Grundlinien und die Entfernung der parallelen Seiten zur gemeinschaftlichen Höhe haben. Berechnet man die Flächen dieser Dreiecke nach der vorigen Regel und vereinigt sie darauf, so gelangt man leicht zu

dem Satze: **Die Flächenzahl eines Trapezes ist das Product aus der halben Summe der parallelen Seiten und der Höhe.**

Mit Hilfe dieser Sätze hat es nicht die mindeste Schwierigkeit, die Fläche jeder geradlinigen Figur zu berechnen, indem man letztere durch Diagonalen, welche sich nicht im Innern des Vielecks schneiden dürfen, in Dreiecke zerlegt.

Sehr häufig wird auch die Zerlegung in Dreiecke und Trapeze angewendet, und zwar erreicht man dieselbe dadurch, dass man von allen Endpunkten $A, B, C \ldots$ eines gegebenen Vielecks Senkrechte AA', BB', $CC' \ldots$ auf eine willkührlich gewählte Gerade MN herablässt. Hierdurch wird z. B. das Sechseck $ABCDEF$ zerlegt in

Fig. 55.



das Viereck $ABB'M =$ Trapez $ABB'A'$ — Dreieck $AA'M$,
das Trapez $BCC'B'$,
das Dreieck $CC'N$,
das Viereck $DEE'N =$ Trapez $DEE'D'$ — Dreieck $DD'N$,
das Trapez $EFF'E'$,
das Dreieck $FF'M$,

und daher ist seine Fläche:

$$\frac{AA'+BB'}{2} \cdot A'B' - \frac{AA' \cdot A'M}{2} + \frac{BB'+CC'}{2} \cdot B'C' + \frac{CC' \cdot C'N}{2}$$
$$+ \frac{DD'+EE'}{2} \cdot D'E' - \frac{DD' \cdot D'N}{2} + \frac{EE'+FF'}{2} \cdot E'F' + \frac{FF' \cdot F'M}{2},$$

wobei die Längenzahlen der einzelnen Strecken ebenso bezeichnet worden sind, wie letztere selbst. Die Rechnung vereinfacht sich etwas, wenn man die Gerade MN so legt, dass sie zwei gegenüber liegende Ecken (hier A und D) verbindet.

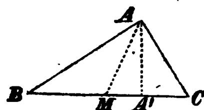
Im Fall die Gerade MN ausserhalb des Vielecks liegt, tritt eine kleine Modification ein, die man leicht finden wird.

§. 17.

Zahlenverhältnisse zwischen den wichtigsten Linien des Dreiecks.

I. Man kann von den im vorigen Paragraphen entwickelten Lehren noch einen anderweiten Gebrauch machen, wenn man sich erinnert, dass wir in §. 12 Beziehungen zwischen verschiedenen Flächen kennen gelernt haben; diese geometrischen Beziehungen müssen sich nämlich in arithmetische verwandeln, sobald man die betreffenden Flächen in Zahlen ausdrückt. Setzen wir, um dies gleich bestimmter nachzuweisen, in einem rechtwinkligen Dreiecke ABC die Hypotenuse $BC = a$, ferner die Katheten $AC = b$, $AB = c$, wo nun a, b, c die Längenzahlen der betreffenden Geraden bezeichnen, so verwandelt sich der Pythagoräische Satz in die arithmetische Formel

Fig. 56.



$$a^2 = b^2 + c^2,$$

nach welcher es möglich ist, aus zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die dritte Seite zu berechnen. Sind nämlich die Katheten b und c gegeben, so findet sich a mittelst der Formel

1) $$a = \sqrt{b^2 + c^2};$$

ist dagegen die Hypotenuse a und die eine Kathete b gegeben, so folgt

2) $$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

Nennen wir ferner α die Längenzahl der Senkrechten AA' und setzen die Abschnitte $A'B = a_1$ und $A'C = a_2$, so liefert der in §. 12 bewiesene Satz die Gleichung

$$\alpha^2 = a_1 a_2;$$

hieraus folgt die Formel

3) $$\alpha = \sqrt{a_1 a_2},$$

welche dazu dienen kann, um α aus a_1 und a_2 zu berechnen.

II. Wir denken uns jetzt unter ABC ein ganz beliebiges Dreieck, dessen längste Seite $BC = a$ sein möge, setzen wie vorhin $AC = b$, $AB = c$, $AA' = \alpha$, halbiren ferner die Basis BC in M und bezeichnen die Längenzahlen

von AM und MA' mit m und d; es gelten dann folgende Anwendungen des Pythagoräischen Satzes

im Dreieck $AA'B$, $(\frac{1}{2}a+d)^2 + \alpha^2 = c^2$,

" " $AA'M$ $d^2 + \alpha^2 = m^2$,

daraus folgt nun durch Subtraction

4) $$(\tfrac{1}{2}a)^2 + ad = c^2 - m^2.$$

In ähnlicher Weise hat man

im Dreieck $AA'C$, $(\frac{1}{2}a-d)^2 + \alpha^2 = b^2$

" " $AA'M$ $d^2 + \alpha^2 = m^2$

durch Subtraction

5) $$(\tfrac{1}{2}a)^2 - ad = b^2 - m^2.$$

Durch Addition der Gleichungen 4) und 5) ergiebt sich

$$2\,(\tfrac{1}{2}a)^2 = b^2 + c^2 - 2m^2$$

oder

6) $$(\tfrac{1}{2}a)^2 + m^2 = \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2),$$

was sich leicht in Worte fassen lässt, wenn man m die Mittellinie, b und c ihre einschliessenden Seiten nennt. Für die Länge der Mittellinie findet man

$$m = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2}$$

und kann auf ähnliche Weise die übrigen Mittellinien des Dreiecks berechnen.

III. Ausser den Mittellinien sind noch die Höhen des Dreiecks von Interesse, zu deren Bestimmung man wiederum mittelst der Dreiecke $AA'B$ und $AA'C$ gelangt, in welchen wir die Abschnitte $A'B = \frac{1}{2}a + d$ und $A'C = \frac{1}{2}a - d$ durch a_1 und a_2 bezeichnen wollen. Die vorhin schon erwähnten Beziehungen lauten dann

7) $$\begin{cases} (a_1)^2 + \alpha^2 = c^2, \\ (a_2)^2 + \alpha^2 = b^2, \end{cases}$$

und aus ihnen folgt durch Subtraction

$$(a_1)^2 - (a_2)^2 = c^2 - b^2.$$

Dividirt man diese Gleichung durch

8) $$a_1 + a_2 = a,$$

so erhält man die Gleichung

9) $$a_1 - a_2 = \frac{c^2 - b^2}{a},$$

welche in Verbindung mit 8) zur Berechnung der Abschnitte a_1 und a_2 benutzt werden kann. Die halbe Summe der Gleichungen 8) und 9) ist nämlich

10) $$a_1 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

und die halbe Differenz

11) $$a_2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Mit Hilfe von einer der Gleichungen 7) lässt sich nun auch die Höhe α berechnen, wenn man z. B. der zweiten Formel die Gestalt

12) $$\alpha^2 = b^2 - (a_2)^2 = (b + a_2)(b - a_2)$$

giebt und darauf den Werth von a_2 aus 11) substituirt. Man hat so

$$b + a_2 = \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$
$$= \frac{(a+b)^2 - c^2}{2a} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2a};$$

ferner

$$b - a_2 = \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$
$$= \frac{c^2 - (a-b)^2}{2a} = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2a}$$

und folglich, wenn man die Werthe von $b + a_2$ und $b - a_2$ in die Formel 12) substituirt,

$$\alpha^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-c+b)(-a+b+c)}{4a^2}$$

oder besser geordnet

13) $$\alpha^2 = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2}.$$

Man kann diesem Ausdrucke eine elegantere Form ertheilen, wenn man

$$a + b + c = S$$

setzt, wo also S den Umfang des Dreiecks bezeichnet. Es ist dann

$$a + b + c = S \qquad = 2 \,.\, \tfrac{1}{2}S,$$
$$-a + b + c = S - 2a = 2 \,.\, (\tfrac{1}{2}S - a),$$
$$a - b + c = S - 2b = 2 \,.\, (\tfrac{1}{2}S - b),$$
$$a + b + c = S - 2b = 2 \,.\, (\tfrac{1}{2}S - c),$$

und wenn man dies in No. 13) substituirt, so wird

$$\alpha^2 = \frac{4}{a^2} \,.\, \tfrac{1}{2}S\,(\tfrac{1}{2}S - a)(\tfrac{1}{2}S - b)(\tfrac{1}{2}S - c)$$

und mithin durch Wurzelausziehung

14) $$\alpha = \frac{2}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}S\,(\tfrac{1}{2}S - a)(\tfrac{1}{2}S - b)(\tfrac{1}{2}S - c)}.$$

Bezeichnen wir noch die Flächenzahl des Dreiecks mit F, so ist $F = \frac{a\alpha}{2}$, mithin vermöge des Werthes von α

15) $$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}S\,(\tfrac{1}{2}S - a)\,(\tfrac{1}{2}S - b)\,(\tfrac{1}{2}S - c)},$$

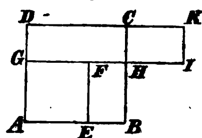
nach welcher Formel sich also die Fläche des Dreiecks aus seinen drei gegebenen Seiten berechnen lässt. Ein passendes Beispiel hierzu bieten die Zahlen 13, 14, 15 dar, woraus man $F = 84$ findet.

IV. So wie wir hier geometrische Beziehungen (zwischen Flächen) in arithmetische Beziehungen verwandelt haben, können wir auch umgekehrt arithmetische Theoreme, so zu sagen, ins Geometrische übersetzen, wenn in jenen Theoremen nur Producte aus zwei Factoren vorkommen. Das Mittel zu einer derartigen Uebertragung besteht in der einfachen Bemerkung, dass jedes Product aus zwei Zahlen g und h als die Flächenzahl eines Rechtecks angesehen werden darf, dessen Seiten durch die Längenzahlen g und h gemessen sind und folglich mittelst einer willkührlichen Längeneinheit construirt werden können. Als Beispiel für eine derartige Uebertragung wählen wir die bekannte arithmetische Formel

16) $$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b).$$

Denken wir uns a als die Längenzahl einer Geraden AB, so ist a^2 die Flächenzahl des über ihr construirten Quadrates $ABCD$; verstehen wir unter b ähnlich die Längenzahl von AE, so ist b^2 die Flächenzahl des Quadrates $AEFG$; die Differenz $a^2 - b^2$ bedeutet folglich die Flächenzahl des Sechsecks $EBCDGF$. Ziehen wir aber FH parallel zu EB, so zerfällt dieses Sechseck in die beiden Rechtecke $CDGH$ und $EBHF$, von denen wir das zweite in die Lage $CHIK$ bringen können, weil $CH = FH$ ist. Hierdurch entsteht das neue Rechteck $DGIK$, welches $GI = GH + HI = AB + AE = a + b$ zur Grundlinie und $GD = AD - AG = a - b$ zur Höhe hat und dessen Fläche demnach $GI \,.\, GD = (a+b)\,(a-b)$ ist, wie es zufolge der Gleichung 16) sein muss. Man konnte daher die letztere gleich unmittelbar geometrisch deuten, wenn man sagte: Die Differenz zweier Quadrate ist

Fig. 57.



an Fläche einem Rechtecke gleich, welches die Summe von den Seiten jener Quadrate zur Grundlinie und ihre Differenz zur Höhe hat.

Aehnliche Beispiele für solche Uebertragungen bieten die bekannten Formeln $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ dar.

Cap. IV.

Die Aehnlichkeit geradliniger Figuren.

---

§. 18.

Die Aehnlichkeit der Dreiecke.

An jeder geometrischen Figur lassen sich im Allgemeinen zwei Merkmale unterscheiden, nämlich die Grösse und die Gestalt, und es kann daher eine dreifache Vergleichung der Figuren statt finden, wenn man nämlich entweder eine gleichzeitige Uebereinstimmung in Grösse und Gestalt verlangt (Congruenz Cap. I.), oder nur Gleichheit der Grösse ohne Rücksicht auf die Gestalt (Flächenvergleichung Cap. II.), oder endlich gleiche Gestalt ohne Rücksicht auf die Grösse. Diese letzte Beziehung zwischen geradlinigen Figuren ist es nun, mit welcher wir uns hier zu beschäftigen haben; sie führt den Namen Aehnlichkeit.

I. Bleiben wir wieder bei der einfachsten geradlinigen Figur, dem Dreiecke, stehen, so können wir leicht die Bedingung ermitteln, unter welcher zwei Dreiecke für ähnliche zu halten sind. Es ist dies nämlich dann der Fall, wenn die gegenseitige Lage der Seiten in beiden Dreiecken dieselbe ist, d. h., wenn die Winkel des einen Dreiecks der Reihe nach den Winkeln des anderen gleich sind. Wir sagen daher: Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$

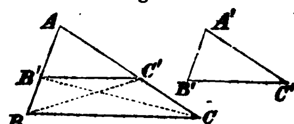


Fig. 58.

heissen ähnlich, sobald $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ und mithin auch $\angle C = \angle C'$ ist und bezeichnen dies durch $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. — Legt man den Winkelscheitel A' so, dass zugleich die Schenkel $A'B'$ und $A'C'$ in die Richtungen von AB und AC fallen, so wird $B'C'$ parallel zu BC, weil hier gleiche correspondirende Winkel vorhanden sind; man kann daher ähnliche Dreiecke jederzeit in eine solche Lage bringen, dass zwei Seiten des einen auf zwei Seiten des anderen fallen und die übrig bleibenden Seiten parallel laufen. Umgekehrt ist auch leicht zu sehen, dass sie ähnlich sein müssen, wenn ihnen diese Eigenschaft zukommt.

Um eine Beziehung zwischen den Seiten ähnlicher Dreiecke zu finden, ziehen wir die Geraden BC', CB' und wenden auf die Dreiecke ABC' und ACB', welche den Winkel bei A gemein haben, den in §. 16 I. bewiesenen Dreieckssatz an; wir erhalten so

$$\frac{\triangle ABC'}{\triangle ACB'} = \frac{AB \,.\, AC'}{AC \,.\, AB'}.$$

Jedes der linker Hand vorkommenden Dreiecke besteht aus zwei Stücken:

$$\triangle ABC' = \triangle AB'C' + \triangle B'C'B$$
$$\triangle ACB' = \triangle AB'C' + \triangle C'B'C$$

und diese Stücken sind in beiden Fällen von gleicher Grösse nämlich $AB'C'$ sich selbst gleich und $\triangle B'C'B = \triangle C'B'C$, weil diese Dreiecke die Gerade $B'C'$ zur gemeinschaftlichen Grundlinie haben und ihre Spitzen B und C auf einer Parallelen zur Grundlinie $B'C'$ liegen. Aus der Gleichheit der einzelnen Bestandtheile folgt nun die Gleichheit der ganzen Flächen ABC' und ACB', die obige Beziehung wird daher einfacher

$$1 = \frac{AB \,.\, AC'}{AC \,.\, AB'} \text{ oder } AB \,.\, AC' = AC \,.\, AB';$$

statt dieser Gleichung kann man auch die Proportion

$$AB : AC = AB' : AC'$$

schreiben, oder wegen $AB' = A'B'$ und $AC' = A'C'$

$$AB : AC = A'B' : A'C'.$$

Legt man die ähnlichen Dreiecke mit den gleichen Winkeln B und B' oder C und C' in eben der Weise aufeinander, wie es vorhin mit den Winkeln A und A' geschah, so gelangt man durch ganz ähnliche Schlüsse zu den entsprechenden Proportionen

$$BC : BA = B'C' : B'A'$$

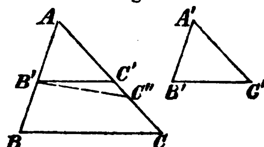
und

$$CA : CB = C'A' : C'B',$$

d. h.: **In ähnlichen Dreiecken stehen ähnlich liegende Seiten in gleichen Verhältnissen zu einander.**

II. Man kann den bemerkenswerthen Satz, zu dem wir so eben gelangt sind, auch umkehren und auf die Aehnlichkeit der Dreiecke zurückschliessen, indem man voraussetzt, dass in den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ ein gleicher Winkel $A = A'$ vorkommt und ausserdem die ihn einschliessenden Seiten proportional sind. Legt man nämlich die Dreiecke mit dem gleichen Winkel $A = A'$ so auf einander, dass $A'B'$ in AB und $A'C'$ in AC fällt, so ist die Gerade $B'C'$ entweder parallel zu BC oder nicht. Wäre nun das letztere der Fall, so ziehe man durch B eine Parallele $B'C''$ zu BC, so ist $\triangle AB'C'' \sim \triangle ABC$ und mithin

Fig. 59.



$$AB : AC = AB' : AC''.$$

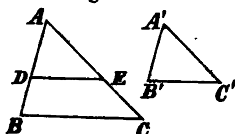
Diese Proportion verträgt sich aber mit der Voraussetzung

$$AB : AC = AB' : AC'$$

so lange nicht, als AC'' von AC' verschieden ist, und daher muss $AC'' = AC'$ d. h. BC'' einerlei mit BC', d. h. parallel zu BC und mithin $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$ sein. Dies giebt den Satz: **Wenn in zwei Dreiecken ein gleicher Winkel vorkommt und die ihn einschliessenden Seiten in gleichem Verhältnisse stehen, so sind die Dreiecke ähnlich.**

III. Haben zwei Dreiecke einen gleichen Winkel $B = B'$, welcher aber von den proportionalen Seiten nicht eingeschlossen wird, so mache man $AD = A'B'$ und $\angle ADE$

$= \angle A'B'C' = \angle ABC$, so läuft DE parallel zu BC, mithin ist $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ und



$$AB : AC = AD : AE,$$

d. i.

$$AB : AC = A'B' : AE.$$

Aus der Vergleichung dieser Proportion mit der Voraussetzung

$$AB : AC = A'B' : A'C'$$

folgt nun augenblicklich $AE = A'C'$; die Dreiecke ADE und $A'B'C'$ stimmen also in zwei Seiten und einem Gegenwinkel überein und sind demnach congruent, wenn jene Stücke zur Bestimmung des Dreiecks hinreichen. Aus $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ folgt dann, indem für $\triangle ADE$ das congruente $\triangle A'B'C'$ gesetzt wird, $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, d. h.: Wenn in zwei Dreiecken ein gleicher Winkel vorkommt und zwei ihn nicht einschliessende Seiten in gleichem Verhältnisse stehen, so sind die Dreiecke ähnlich, vorausgesetzt, dass jene drei Stücke zur Dreiecksbestimmung hinreichen würden.

IV. Sind in zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ zwei Seitenverhältnisse gleich, also

$$AB : AC = A'B' : A'C'$$

und

$$AB : BC = A'B' : B'C',$$

so mache man wie vorhin $AD = A'B'$ und ziehe DE parallel zu BC; die Dreiecke ABC und ADE sind dann ähnlich und es gelten nach No. I. in ihnen folgende Proportionen:

$$AB : AC = AD : AE,$$
$$AB : BC = AD : DE,$$

d. i. wegen $AD = A'B'$

$$AB : AC = A'B' : AE,$$
$$AB : BC = A'B' : DE.$$

Aus der Vergleichung derselben mit den oben vorausgesetzten Proportionen folgt augenblicklich $AE = A'C'$ und $DE = B'C'$, so dass also die Dreiecke ADE und $A'B'C'$ wegen ihrer Uebereinstimmung in den Seiten congruent sind. So wie nun vorher $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ war, muss nun

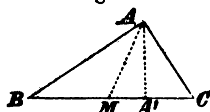
jetzt $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ sein, d. h.: **Wenn in einem Dreiecke zwei Seitenverhältnisse so gross sind, wie in einem anderen, so sind beide Dreiecke ähnlich.**

§. 19.

Anwendung auf das rechtwinklige Dreieck.

Lässt man in einem rechtwinkligen Dreiecke ABC von der Spitze A des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse herabsteigen, so zerfällt das Urdreieck in zwei andere rechtwinklige Dreiecke, deren Winkel leicht zu bestimmen sind. Da nämlich in jedem rechtwinkligen Dreiecke die beiden spitzen Winkel zusammen einen Rechten ausmachen, so ist

Fig. 61.



$$\angle B + \angle C = R \text{ und } \angle CAA' + \angle C = R,$$

folglich

$$\angle B = \angle CAA';$$

ferner

$$\angle C + \angle B = R \text{ und } \angle BAA' + \angle B = R,$$

mithin

$$\angle C = \angle BAA'.$$

Es folgt hieraus, dass die Dreiecke $A'BA$, $A'AC$ und ABC gleiche Winkel besitzen und mithin einander ähnlich sind.

Vergleichen wir nun zunächst die beiden kleineren Dreiecke unter sich, so folgt wegen $\triangle A'BA \sim \triangle A'AC$

$$A'B : A'A = A'A : A'C$$

und vermöge der Gleichheit der Producte aus den inneren und äusseren Gliedern einer geometrischen Proportion

$$\overline{A'A}^2 = A'B \,.\, A'C.$$

Bezeichnen wir die Längenzahlen von $A'A$, $A'B$ und $A'C$ der Reihe nach mit α, a_1, a_2, so ist das so gewonnene Resultat

1) $$\alpha^2 = a_1 a_2$$

einerlei mit dem in §. 12 I. auf ganz anderem Wege gefundenen.

Vergleichen wir weiter die Dreiecke $A'BA$ und $A'AC$ mit dem ganzen Dreiecke ABC, so ist wegen $\triangle A'BA \sim \triangle ABC$

$$A'B : BA = AB : BC$$

oder

$$\overline{AB}^2 = A'B \,.\, BC;$$

ferner, wegen $\triangle A'AC \sim \triangle ABC$, ist

$$A'C : CA = AC : CB$$

oder

$$\overline{AC}^2 = A'C \,.\, BC.$$

Bezeichnen wir die Längenzahlen zon BC, AC, AB der Reihe nach mit a, b, c, so nehmen die gefundenen Gleichungen die Form an:

2) $$c^2 = a_1 a,$$

3) $$b^2 = a_2 a$$

und drücken in Zeichen den Satz aus, den wir in §. 13 II. kennen gelernt haben. Durch Addition der Gleichungen 2) und 3) ergiebt sich noch

$$b^2 + c^2 = (a_2 + a_1)\, a,$$

oder wenn man die Gleichung $a_2 + a_1 = a$ berücksichtigt,

4) $$b^2 + c^2 = a^2,$$

was nichts Anderes als der Pythagoräische Lehrsatz ist.

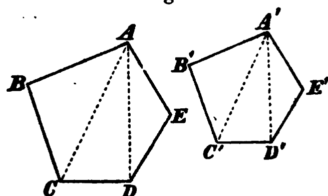
§. 20.

Die Aehnlichkeit der Vielecke.

Es hat nicht die mindeste Schwierigkeit, den Begriff der Aehnlichkeit, den wir in §. 18 für Dreiecke kennen gelernt haben, auf beliebige Vielecke auszudehnen, indem man sich letztere durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt denkt. Sind nämlich zwei Vielecke durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke getheilt und diese einzelnen Dreiecke einander ähnlich, so sind offenbar auch die ganzen Vielecke von gleicher Gestalt und wir stellen daher die Definition auf: Vielecke heissen ähnlich, wenn sie aus gleichviel ähnlichen Dreiecken, in derselben Reihenfolge genommen, so zusammengesetzt sind, dass jedes Dreieck mit dem nächstfolgen-

den eine Seite gemein hat. So sind z. B. die Fünfecke $ABCDE$ und $A'B'C'D'E'$ ähnlich, wenn jedes aus drei Dreiecken, ABC, ACD, ADE einerseits und $A'B'C'$, $A'C'D'$, $A'D'E'$ andererseits, zusammengesetzt ist, welche, in derselben Reihenfolge genommen, einander ähnlich sind, nämlich $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$, $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$, und so liegen, dass jedes mit dem nächstfolgenden eine Seite gemein hat.

Fig. 62.



Berücksichtigt man, dass aus dieser Definition folgt:

$$\angle BCA = \angle B'C'A',$$
$$\angle ACD = \angle A'C'D',$$
$$\angle CDA = \angle C'D'A',$$
$$\angle ADE = \angle A'D'E'$$

u. s. w.

mithin durch Addition zweier aufeinander folgender Gleichungen

$$\angle BCD = \angle B'C'D', \angle CDE = C'D'E'$$

u. s. w.,

so hat man den Satz: **In ähnlichen Vielecken sind die ähnlich liegenden Winkel einander gleich.**

Wenden wir auf die einzelnen Bestandtheile zweier ähnlichen Vielecke die Sätze des §. 18 an, so ist wegen $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

1) $$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ oder } AB : BC = A'B' : B'C';$$

ferner

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'},$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ACD und $A'C'D'$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{A'C'}{C'D'},$$

mithin durch Multiplication der beiden letzten Gleichungen

2) $$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ oder } AB : CD = A'B' : C'D'.$$

Ferner hat man wieder

$$\frac{CD}{DA}=\frac{C'D'}{D'A'}$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DEA und $D'E'A'$

$$\frac{DA}{DE}=\frac{D'A'}{D'E'},$$

mithin durch Multiplication

$$\frac{CD}{DE}=\frac{C'D'}{D'E'}.$$

Multiplizirt man noch mit der Gleichung 2), so wird weiter

$$3) \qquad \frac{AB}{DE}=\frac{A'B'}{D'E'}, \text{ oder } AB:DE=A'B':D'E'.$$

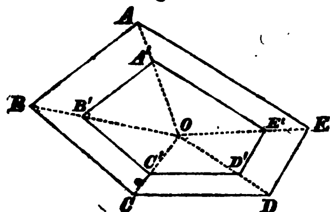
Man übersieht sogleich den Fortgang dieser Schlüsse, welche zu dem allgemeinen Satze führen: In ähnlichen Vielecken stehen ähnlich liegende Seiten in gleichen Verhältnissen.

Man kann diese Sätze zusammen umkehren und auch sagen: Zwei Vielecke, in denen ähnlich liegende Winkel einander gleich sind und sämmtliche ähnlich liegende Seiten in gleichen Verhältnissen stehen, sind einander ähnlich; denn man wird sich ohne Mühe überzeugen, dass jetzt die einzelnen durch ähnlich liegende Diagonalen entstehenden Dreiecke sammt und sonders einander ähnlich werden, woraus die Aehnlichkeit der ganzen Vielecke unmittelbar folgt. Zu bemerken ist jedoch, dass zur Aehnlichkeit zweier Vielecke nicht sämmtliche ebengenannte Beziehungen nothwendig erfordert werden und zwar ebenso wenig, als zur Congruenz zweier Vielecke die Gleichheit aller Seiten und Winkel nothwendig vorausgesetzt werden musste. Es reicht nämlich eine geringere Anzahl von jenen Beziehungen zur Aehnlichkeit hin. Bleiben wir zuerst bei dem Dreiecke stehen, so finden wir nach §. 18, dass zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn sie entweder in zwei Winkeln, oder in einem Winkel und einem Seitenverhältnisse, oder in zwei Seitenverhältnissen übereinstimmen, dass also zur Aehnlichkeit zweier Dreiecke nur zwei Gleichungen erfordert werden, letztere mögen sich nun auf Winkel, oder auf Seitenverhältnisse, oder auf beide beziehen. Hieraus folgt

unmittelbar, dass die Aehnlichkeit zweier Vierecke durch vier Gleichungen bestimmt wird, die zweier Fünfecke durch sechs Gleichungen u. s. w. Dies giebt den Satz: Zur Aehnlichkeit zweier n-Ecke gehören $2n-4$ Gleichungen, die sich entweder auf Winkel, oder auf Seitenverhältnisse, oder theils auf die einen und theils auf die anderen beziehen. Die Aehnlichkeit der Vielecke bedarf also einer Gleichung weniger als die Congruenz derselben und sie geht in die letztere über, sobald noch die unmittelbare Gleichheit zweier ähnlich liegenden Diagonalen oder Seiten hinzutritt. Man könnte daher auch den Satz aufstellen: Findet zwischen zwei Vielecken eine solche Beziehung statt, dass sie durch Gleichheit zweier entsprechend liegenden Linien congruent werden würden, so sind die Vielecke ähnlich.

Es hat nach diesen Erörterungen nicht die mindeste Schwierigkeit, zu einem gegebenen Vielecke ein ihm ähnliches zu construiren. Wäre z. B. das Fünfeck $ABCDE$ gegeben, so ziehe man die Diagonalen AC, AD und lege nun an eine willkührliche Gerade $A'B'$ die Winkel $B'A'C' = \angle BAC$ und $\angle A'B'C' = \angle ABC$ an, so entsteht zunächst das Dreieck $A'B'C'$, welches dem Dreiecke ABC ähnlich ist. Wiederholt man dieses Verfahren, indem man $\angle C'A'D' = \angle CAD$ und $\angle A'C'D' = \angle ACD$ macht, so erhält man das zweite Dreieck $A'C'D' \sim ACD$; wie man auf diese Weise weiter gehen kann, ist ohne Weiteres klar. Es giebt aber noch einen anderen Weg. Nimmt man innerhalb des gegebenen Vielecks $ABCDE$ einen beliebigen Punkt O an, verbindet diesen mit den Ecken durch Gerade (OA, OB, OC, OD, OE) und zieht nun, von einem willkührlichen Punkte A' der Geraden OA ausgehend, die Geraden $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $C'D' \parallel CD$, $D'E' \parallel DE$ und verbindet endlich E' mit A' durch eine Gerade $E'A'$, so erhält man gleichfalls ein Vieleck $A'B'C'D'E'$, welches dem gegebenen Vielecke $ABCDE$ ähn-

Fig. 63.



lich ist, wie man aus der Gleichheit aller Winkel und der Proportionalität der Seiten sogleich erkennen wird. Den willkührlichen Punkt O nennt man gewöhnlich den **Aehnlichkeitspunkt** der beiden Vielecke.

§. 21.

Die Flächen ähnlicher Vielecke.

I. Fangen wir wieder beim einfachsten Vielecke, dem Dreiecke, an und bezeichnen die Längenzahlen der Geraden und die Flächenzahlen der Dreiecke wie die Geraden und die Dreiecke selbst, so ist, wenn CD und $C'D'$ die Höhen der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind,

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} AB \cdot CD, \quad \triangle A'B'C' = \tfrac{1}{2} A'B' \cdot C'D',$$

folglich durch Division

1) $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB \cdot CD}{A'B' \cdot C'D'}.$$

Sind nun aber die in Rede stehenden Dreiecke ähnlich, so sind es auch die Dreiecke ACD und $A'C'D'$, BCD und $B'C'D'$, folglich

$$\frac{AD}{CD} = \frac{A'D'}{C'D'}, \quad \frac{BD}{CD} = \frac{B'D'}{C'D'}$$

und durch Addition beider Gleichungen

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'},$$

oder

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Multiplicirt man beiderseits mit $\frac{AB}{A'B'}$, so wird hieraus

2) $$\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \frac{AB \cdot CD}{A'B' \cdot C'D'};$$

multiplicirt man aber beiderseits mit $\frac{CD}{C'D'}$, so erhält man

3) $$\frac{AB \cdot CD}{A'B' \cdot C'D'} = \left(\frac{CD}{C'D'}\right)^2$$

und durch Vergleichung beider Resultate

4) $$\frac{AB \cdot CD}{A'B' \cdot C'D'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \left(\frac{CD}{C'D'}\right)^2.$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks nimmt die Gleichung 1) die folgende Form an:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \left(\frac{CD}{C'D'}\right)^2,$$

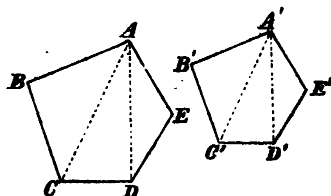
oder in Form einer Proportion geschrieben

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{C'D'}^2,$$

d. h.: Die Flächenzahlen zweier ähnlichen Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der Längenzahlen zweier ähnlich liegenden Seiten, ingleichen wie die Quadrate der Längenzahlen ihrer Höhen.

II. Hat man allgemeiner zwei ähnliche Vielecke $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$

Fig. 64.



so ist nach dem vorigen Satze

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2,$$

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'} = \left(\frac{CD}{C'D'}\right)^2,$$

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'} = \left(\frac{DE}{D'E'}\right)^2$$

u. s. f.

Wegen der Aehnlichkeit sämmtlicher einzelnen Dreiecke hat man aber

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \ldots = \frac{AB}{A'B'},$$

mithin sind die rechten Seiten der vorhergehenden Gleichungen einander gleich und

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'} = \frac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'} = \ldots = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^3.$$

Nach dem bekannten arithmetischen Satze, dass aus den Gleichungen

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \ldots = \mu$$

jederzeit folgt*)

$$\frac{b + c + d + \ldots}{b' + c' + d' + \ldots} = \mu,$$

erhält man aus den vorigen Gleichungen

$$\frac{\triangle\, ABC + \triangle\, ACD + \triangle\, ADE + \ldots}{\triangle\, A'B'C' + \triangle\, A'C'D' + \triangle\, A'D'E' + \ldots} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2,$$

d. i.

$$\frac{\text{Vieleck } ABCDE\ldots}{\text{Vieleck } A'B'C'D'E'\ldots} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2,$$

oder in Form einer Proportion ausgesprochen: **Die Flächenzahlen zweier ähnlichen Vielecke verhalten sich wie die Quadrate der Längenzahlen zweier ähnlich liegenden Seiten.**

III. Dieses Theorem lässt noch eine nette Combination mit dem Pythagoräischen Satze zu. Denken wir uns nämlich über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren so construirt, dass die Dreiecksseiten ähnlich liegende Seiten dieser Figuren sind, und nennen wir a die Längenzahl der Hypotenuse, b und c die Längenzahlen der Katheten, ferner A die Flächenzahl der über der Hypotenuse stehenden Figur, B und C die Flächenzahlen der über den Katheten gezeichneten Figuren, so ist

$$\frac{B}{A} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{C}{A} = \frac{c^2}{a^2},$$

folglich durch Addition

$$\frac{B + C}{A} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

Dem Pythagoräischen Satze zufolge ist aber $a^2 = b^2 + c^2$, d. h. der Quotient rechter Hand $= 1$, oder

---

*) Wegen $\frac{b}{b'} = \mu$, $\frac{c}{c'} = \mu$, $\frac{d}{d'} = \mu$ u. s. w. hat man nämlich zunächst

$$b = b'\mu, \quad c = c'\mu, \quad d = d'\mu \ldots,$$

folglich durch Addition

$$b + c + d + \ldots = (b' + c' + d' \ldots)\,\mu$$

und durch Division

$$\frac{b + c + d + \ldots}{b' + c' + d' + \ldots} = \mu.$$

$$\frac{B+C}{A}=1 \text{ und folglich } A=B+C,$$

d. h.: **Beschreibt man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Vielecke der Art, dass die Dreiecksseiten ähnlich liegende Seiten jener Vielecke sind, so beträgt die Fläche des Vielecks über der Hypotenuse soviel als die Flächen der Vielecke über den Katheten zusammengenommen.**

Mittelst dieses Satzes kann man sehr leicht ein Vieleck construiren, dessen Fläche die Summe oder Differenz der Flächen zweier gegebenen ähnlichen Vielecke ausmacht, und welches jenen zugleich ähnlich ist.

Constructionen zu Cap. IV.

---

1. **Zu drei gegebenen Geraden die vierte Proportionallinie zu finden.** Wenn drei Gerade gegeben sind, deren Längenzahlen a, b und c sein mögen, so nennt man die vierte Proportionallinie zu denselben diejenige Gerade, deren Längenzahl d die Eigenschaft besitzt, dass

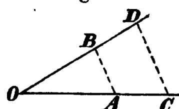
$$a:b=c:d,$$

mithin

$$d=\frac{bc}{a},$$

ist. Schneidet man nun auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels die Strecken $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ ab und zieht darauf CD parallel zu der Geraden AB, so entstehen zwei ähnliche Dreiecke OAB und OCD, in welchen die Längenzahlen der Seiten in den obigen Verhältnissen stehen; mithin ist OD die gesuchte vierte Proportionale. Man sieht hier zugleich die geometrische Lösung aller der Aufgaben, welche ins Gebiet der sogenannten Regeldetri gehören.

Fig. 65.



Ist im besonderen Falle $c=b$, also

$$a:b=b:d$$

oder

$$d = \frac{b^2}{a},$$

so nennt man d die dritte Proportionale zu a und b; die obige Construction bleibt dieselbe, indem nur $OC = OB$ zu nehmen ist.

2. Zwischen zwei Geraden die mittlere Proportionale zu finden. Sind a und b die Längenzahlen zweier gegebenen Geraden und ist p die Längenzahl einer unbekannten Geraden, welche die Eigenschaft besitzt

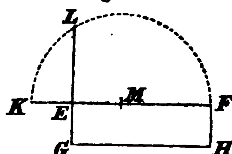
$$a : p = p : b$$

oder

$$p^2 = ab, \quad p = \sqrt{ab},$$

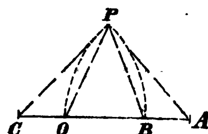
so heisst p die mittlere Proportionale zwischen a und b. Die einfache Bemerkung, dass es sich hier nur darum handelt, die Seite eines Quadrates zu finden, welches einem gegebenen Rechtecke (ab) an Fläche gleich ist, weist hier gleich auf die am Ende von §. 13 I. gegebene Construction zurück, wonach also $EF = a$ und $EK = b$ aneinander zu setzen sind und über FK mit $KM = \frac{1}{2} FK$ ein Halbkreis zu beschreiben ist, welcher eine in E errichtete Senkrechte im Punkte L schneidet, wodurch $EL = p$ gefunden wird.

Fig. 66.



Kürzer noch kommt man auf folgendem Wege zum Ziele. Man schneide von der grösseren Linie OA ($= a$) die kleinere OB ($= b$) ab, verlängere OA rückwärts um $OC = AB$ und beschreibe über AC als Grundlinie mit dem Schenkel AO das gleichschenklige Dreieck ACP; dann ist $OP = BP$ ($= p$) die gesuchte mittlere Proportionale. Da nämlich die Dreiecke AOP und POB den Winkel OAP gemeinschaftlich besitzen und die Seitenverhältnisse $AO : AP$ und $PO : PB$ gleich (beide $= 1$) sind, so folgt daraus die Aehnlichkeit dieser Dreiecke und mithin ist, wenn wir für den Augenblick die Längenzahlen wie die Geraden selber bezeichnen,

Fig. 67.



$$AO : OP = PQ : OB,$$

d. i.

$$a : p = p : b,$$

wie es in der That sein muss.

Mittelst dieser Construction ist es leicht, die arithmetische Aufgabe der Quadratwurzelausziehung geometrisch zu lösen. Um z. B. $\sqrt{10}$ zu finden, construire man die mittlere Proportionale zwischen zwei Geraden, deren Längenzahlen entweder $a = 1$ und $b = 10$ oder $a = 2$ und $b = 5$ sind. Man hat dann im ersten Falle

$$1 : p = p : 10,$$

d. h.

$$p^2 = 10, \text{ folglich } p = \sqrt{10},$$

und im zweiten

$$2 : p = p : 5,$$

d. h.

$$p^2 = 2 . 5, \text{ folglich } p = \sqrt{10}.$$

3. Die algebraische Lösung geometrischer Aufgaben. Unsere bisherigen Untersuchungen haben uns jetzt an die Stelle geführt, wo es möglich und zugleich höchst vortheilhaft ist, die Algebra mit der Geometrie zu verbinden. Sind nämlich in einer geometrischen Aufgabe bestimmte gerade Linien oder geradlinig begränzte Flächen gegeben und werden andere gesucht, so kann man sich zuvörderst sämmtliche Grössen durch Zahlen ausgedrückt denken, die bekannten durch bekannte Zahlen, die unbekannten durch unbekannte Zahlen (x, y z u. s. w.). Stellt man ferner die Beziehungen, welche zwischen den bekannten und unbekannten Grössen statt finden sollen, in Gleichungen dar, so hat jetzt die geometrische Aufgabe ein arithmetisches Gewand erhalten, und indem man jene Gleichungen nach den Regeln der Algebra auflöst, bekommt man zunächst Formeln zur Berechnung der unbekannten Zahlen; man kann nun aber auch in die Geometrie zurückgehen, indem man die Constructionen aufsucht, welche diesen Formeln entsprechen. Dies hat keine Schwierigkeit, wenn man sich an die folgende Tabelle hält, in welcher immer a, b, c die Längenzahlen gegebener Geraden bezeichnen. Es bedeutet nämlich

$a+b$	geometrisch:	die Summe zweier Geraden,
$a-b$	„	die Differenz zweier Geraden,
ab	„	die Fläche eines aus den Seiten a und b beschriebenen Rechtecks,
a^2	„	die Fläche des über der Seite a construirten Quadrates,
$\frac{bc}{a}$	„	die vierte Proportionale zu a, b, c,
$\sqrt{ab}$	„	die mittlere Proportionale zwischen a und b,
$\sqrt{a^2+b^2}$	„	die Hypotenuse des aus den Katheten a und b construirten rechtwinkligen Dreiecks,
$\sqrt{a^2-b^2}$	„	die Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, welches a zur Hypotenuse und b zur andern Kathete hat.

Das Technische des Verfahrens wird man aus den folgenden Beispielen ersehen, worin die unbekannten Grössen theils Linien, theils Flächen sind.

4. Aus der Kathetensumme und Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren. Nennen wir die unbekannten Katheten des Dreiecks: x und y, ihre gegebene Summe: s und die gleichfalls gegebene Hypotenuse: a*), so haben wir zunächst

A) $$x+y=s;$$

ferner, weil das Dreieck ein rechtwinkliges sein soll, also der Pythagoräische Lehrsatz gelten muss,

B) $$x^2+y^2=a^2.$$

Subtrahirt man das Quadrat der Gleichung A) von dem Doppelten der Gleichung B), so bleibt

$$x^2-2xy+y^2=2a^2-s^2,$$

und durch Ausziehung der Quadratwurzel ist

C) $$x-y=\sqrt{2a^2-s^2}.$$

---

*) Es versteht sich von selbt, dass hier sämmtliche Buchstaben Längenzahlen bedeuten, denn mit Linien kann man nicht rechnen; doch hat obige Redeweise den Vortheil der Kürze und wird deswegen häufig angewendet.

Die halbe Summe und die halbe Differenz der Gleichungen A) und C) geben nun

D) $$x = \tfrac{1}{2}(s + \sqrt{2a^2 - s^2}),$$

E) $$y = \tfrac{1}{2}(s - \sqrt{2a^2 - s^2}),$$

womit die Katheten gefunden sind. Setzt man noch $2a^2 = \alpha^2$, also

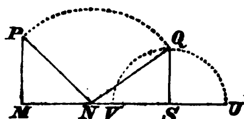
$$\alpha = \sqrt{2a^2} = \sqrt{a^2 + a^2},$$

so wird

$$x = \tfrac{1}{2}(s + \sqrt{\alpha^2 - s^2}),$$
$$y = \tfrac{1}{2}(s - \sqrt{\alpha^2 - s^2}),$$

und nun ist es sehr leicht, die Katheten zu construiren, wenn man überlegt, dass α die Hypotenuse eines aus den gleichen Katheten a und a beschriebenen rechtwinkligen Dreiecks und $\sqrt{\alpha^2 - s^2}$ die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, welches α zur Hypotenuse und s zur andern Kathete hat. Dies giebt folgende Construction: Man mache $MN = MP = a$, stelle MP senkrecht MN, und ziehe NP ($NP = \sqrt{a^2 + a^2} = \alpha$); man nehme ferner $NS = s$, errichte in S eine Senkrechte auf NS und beschreibe aus N als Mittelpunkt mit NP als Halbmesser einen Kreis, welcher jene Senkrechte in Q schneidet ($NS = \sqrt{NQ^2 - s^2} = \sqrt{NP^2 - s^2} = \sqrt{\alpha^2 - s^2} = \sqrt{2a^2 - s^2}$); man mache endlich $SU = SV = SQ$, so ist die Hälfte von NU die grössere Kathete und die Hälfte von NV die kleinere Kathete des gesuchten Dreiecks.

Fig. 68.



5. **Aus der Hypotenuse und der darauf stehenden Höhe ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren.** Nennen wir wieder x und y die Katheten, h die gegebene Senkrechte von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse a, so ist erstlich

A) $$x^2 + y^2 = a^2.$$

Eine zweite Gleichung ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die Fläche des unbekannten Dreiecks auf doppelte Weise berechnet werden kann; einerseits ist sie das halbe Product aus den Katheten, andererseits das halbe Product

aus der Hypotenuse und der zugehörigen Höhe; also hat man $\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}ah$ oder

B) $$2xy = 2ah.$$

Aus den Gleichungen A) und B) folgt durch Addition und Subtraction

$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + 2ah,$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 2ah;$$

ferner durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$x + y = \sqrt{a(a + 2h)},$$
$$x - y = \sqrt{a(a - 2h)}.$$

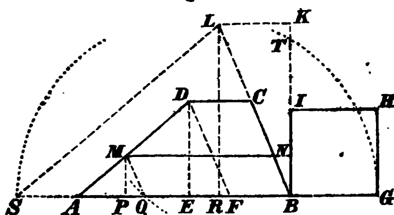
Die halbe Summe und die halbe Differenz dieser Gleichungen geben

$$x = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{a(a + 2h)} + \sqrt{a(a - 2h)}\right\},$$
$$y = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{a(a + 2h)} - \sqrt{a(a - 2h)}\right\},$$

und hiervon ist die Construction sehr leicht, wenn man berücksichtigt, dass $\sqrt{a(a+2h)}$ die mittlere Proportionale zwischen den Linien a und $a + 2h$, ebenso $\sqrt{a(a-2h)}$ die mittlere Proportionale zwischen den Linien a und $a - 2h$ bedeutet.

6. Von einem Trapeze soll durch eine Parallele zur Grundlinie ein Trapez abgeschnitten werden, welches einem gegebenen Quadrate an Fläche gleich ist. Es sei $ABCD$ das gegebene Trapez, $AB = a$, $CD = b$ und die Höhe $DE = h$; das gegebene Quadrat $BGHI$ habe die Seite $= q$. Das abzuschneidende Trapez $ABNM$ würde vollkommen bestimmt sein, wenn $MN = x$ und seine Höhe $MP = y$ bekannt wäre; ziehen wir nun DF und MQ parallel zu BC, so entstehen die ähnlichen Dreiecke ADF und AMQ, in welchen

Fig. 69.



$$AF : DE = AQ : MP,$$

d. h.

$$a - b : h = a - x : y,$$

oder

A) $$y = \frac{a - x}{a - b} h$$

ist. Da ferner die Fläche von $ABNM$ gleich der Fläche von $BGHI$ sein soll, so muss

$$\frac{a + x}{2} y = q^2$$

oder

$$(a + x) y = 2q^2$$

sein und hieraus wird durch Substitution des Werthes von y

$$\frac{a^2 - x^2}{a - b} h = 2q^2.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung findet man

B) $$x = \sqrt{a^2 - \frac{(a - b) 2q}{h} q}.$$

Um diesen Ausdruck geometrisch zu construiren, sei

$$\frac{(a - b) 2q}{h} = \alpha,$$

oder

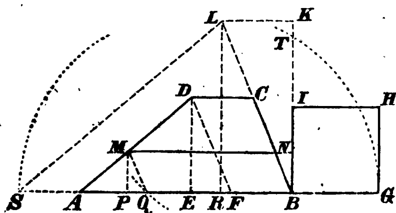
$$h : a - b = 2q : \alpha,$$

so findet man zunächst α als eine vierte Proportionale; ferner sei $\alpha q = \beta^2$ oder $\beta = \sqrt{\alpha q}$, so ist β die mittlere Proportionale zwischen α und q, und nun hat man

$$x = \sqrt{a^2 - \beta^2},$$

wie man sogleich erkennt, wenn erst für β sein Werth und dann wieder der Werth von α substituirt wird; hier ist aber x mittelst eines rechtwinkligen Dreiecks, welches α zur Hypotenuse und β zur einen Kathete hat, leicht zu finden. Dies giebt folgende Construction: Man mache $BK = 2BI = 2q$, ziehe KL parallel zu AB, bis sie die verlängerte BC in L schneidet, und lege durch L eine Parallele zu AD; dann ist in den Dreiecken ADF und SLB

Fig. 69.



$$DE : AF = LR : SB,$$

d. h.

$$h : a - b = 2q : SB,$$

mithin $SB = \alpha$. Zwischen BS und BG suche man die mittlere Proportionale $BT = \sqrt{BS.BG} = \sqrt{aq} = \beta$; mit $AB = a$ als Halbmesser beschreibe man endlich aus T als Mittelpunkt einen Kreis, welcher AB in Q schneidet, so ist

$$BQ = \sqrt{(QT^2 - BT^2)} = \sqrt{a^2 - \beta^2} = x.$$

Man hat jetzt weiter nichts zu thun, als $QM \parallel BC$ und $MN \parallel AB$ zu ziehen, um sogleich das verlangte Trapez zu bekommen.

Bemerkenswerth ist der Fall, in welchem das Trapez $ABNM$ die Hälfte des gegebenen Trapezes $ABCD$ ausmacht, also

$$q^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(a+b)\,h}{2},$$

oder

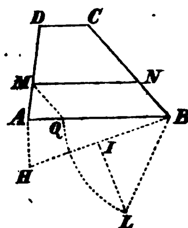
$$\frac{2q^2}{h} = \frac{a+b}{2}$$

ist. Man erhält dann aus der Formel B)

$$x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,(a^2+b^2)},$$

was sich auf folgende Weise construiren lässt. Man stelle $AH = CD$ senkrecht auf AB, halbire die Hypotenuse BH in I, errichte ferner $IL = BI$ senkrecht auf BH und ziehe BL, so ist $BL = BQ = x$.

Fig. 70.



Nimmt man in den bisherigen Formeln $b = 0$, so geht das Trapez in ein Dreieck über, so dass also die entsprechenden Aufgaben für das Dreieck hier zugleich mit gelöst sind. — Eine vortheilhafte praktische Anwendung von diesen Formeln ist die Theilung beliebiger Vielecke in Theile von bestimmten Verhältnissen, wenn zugleich die Theilungslinien einer gegebenen Geraden parallel laufen sollen.

7. Aus der Hypotenuse und der Kathetensumme die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks zu finden. Behalten wir dieselbe Bezeichnung wie in No. 4 bei, so ist

$$x + y = s, \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

und wenn wir die zweite Gleichung vom Quadrate der ersten subtrahiren, so bleibt

$$2xy = s^2 - a^2,$$

endlich durch Division mit 4

$$\frac{xy}{2} = \frac{s^2 - a^2}{4},$$

und damit ist die Fläche des Dreiecks gefunden. Setzen wir dieselbe gleich der Fläche eines noch unbekannten Quadrates, welches die Seite q besitzt, so haben wir

$$q^2 = \frac{s^2 - a^2}{4},$$

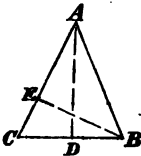
folglich

$$q = \frac{\sqrt{s^2 - a^2}}{2},$$

und nun ist diese Quadratseite leicht zu finden, wenn man berücksichtigt, dass sie die Hälfte von der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ausmacht, welches s zur Hypotenuse und a zur anderen Kathete hat.

8. Aus den beiden Höhen eines gleichschenkligen Dreiecks die Fläche desselben zu finden.

Fig. 71.



Es sei BC die unbekannte Basis x des gleichschenkligen Dreiecks, $AB = AC = y$ der gleichfalls unbekannte Schenkel desselben, ferner die Höhe $AD = h$ und die Höhe $BE = k$. Die Fläche unseres Dreiecks lässt sich auf doppelte Weise berechnen; es ist nämlich

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} BC \,.\, AD = \tfrac{1}{2} xh,$$
$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} AC \,.\, BE = \tfrac{1}{2} yk,$$

also

$$hx = ky \quad \text{oder} \quad y = \frac{hx}{k};$$

ferner ist $CD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} x$ und mithin zufolge des Pytha-thagoräischen Lehrsatzes

$$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2,$$

d. i.

$$h^2 + (\tfrac{1}{2} x)^2 = y^2 = \left(\frac{hx}{k}\right)^2,$$

wenn man gleich den Werth von y aus der vorhergehenden

Gleichung substituirt. Aus der vorstehenden quadratischen Gleichung erhält man

A) $$x = \frac{2hk}{\sqrt{(2h)^2 - k^2}}.$$

Setzen wir die Fläche $\frac{1}{2}hx = q^2$, so folgt vermöge des Werthes von x

B) $$q = \sqrt{\frac{hk}{\sqrt{(2h)^2 - k^2}}\,h}.$$

Sowohl x als q sind leicht zu-construiren, indem man zuerst berücksichtigt, dass, wenn

$$\sqrt{(2h)^2 - k^2} = \alpha$$

gesetzt wird, α die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ausmacht, welches $2h$ zur Hypotenuse und k zur anderen Kathete hat. Es ist dann

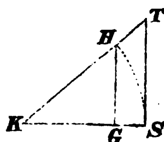
$$x = \frac{2hk}{\alpha} \text{ oder } \alpha : k = 2h : x$$

und mithin x die vierte Proportionale zu α, k und $2h$. Um aber q zu finden, setzen wir

$$\frac{hk}{\sqrt{(2h)^2 - k^2}} = \frac{hk}{\alpha} = \beta,$$

wo nun β die vierte Proportionale zu α, k und h, endlich $q = \sqrt{\beta h}$, d. h. die mittlere Proportionale zwischen β und h ist. Dies giebt folgende zwei Constructionen. Man macht $GH = k$ und errichtet in G eine Senkrechte auf GH; aus H als Mittelpunkt beschreibt man mit $2h$ als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher jene Senkrechte in K schneidet; es ist dann

Fig. 72.



$$GK = \sqrt{(HK^2 - GH^2)} = \sqrt{(2h)^2 - k^2}$$

und mithin $GK = \alpha$. Nimmt man jetzt $KS = KH = 2h$ und zieht $ST \parallel GH$, so ist

$$GK : GH = SK : ST,$$

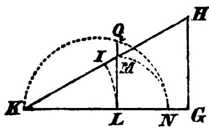
d. i.

$$\alpha : k = 2k : ST,$$

und mithin $ST = x$; aus der so gefundenen Basis ist das gleichschenklige Dreieck leicht zu construiren.

Um dagegen q zu finden, beschreibt man wie vorhin das rechtwinklige Dreieck GHK, in welchem $HK = 2HI = 2h$ ist, nimmt $KL = KI = h$ und zieht $LM \parallel GH$, so ist

Fig. 73.



$$GK : GH = LK : LM,$$

d. i.

$$\alpha : k = h : LM,$$

mithin $LM = \beta$. Darauf macht man $LN = LM = \beta$ und sucht zwischen LK und LN die mittlere Proportionale LQ; dieselbe ist $= \sqrt{LK \,.\, LN} = \sqrt{h\beta}$, d. h. $= q$, womit also die Linie q ihre Bestimmung gefunden hat.

ZWEITES BUCH.

Der Kreis.

Cap. V.

Die Bögen, Winkel und Linien am Kreise.

---

§. 22.

Die Bögen und die Centriwinkel.

I. Kennt man von einem Kreise den Halbmesser, so kann nach Dem, was wir über die Entstehung des Kreises gesagt haben (S. 8), der Kreis selbst jederzeit beschrieben werden; dies geht jedoch nur auf eine einzige Art, oder, was dasselbe ist, ein gegebener Halbmesser liefert nicht mehrere verschiedene Kreise, sondern nur einen einzigen Kreis. Daher ist der Kreis durch seinen Halbmesser unzweideutig bestimmt, und Kreise von demselben Halbmesser sind congruent; legt man sie mit ihren Mittelpunkten auf einander, so decken sich die Kreise völlig.

Die erste Frage nun, welche wir zu beantworten haben, wäre die, ob der Kreis eine gerade, eine krumme, oder was sonst für eine Linie ist, was sich aus der Definition des Kreises unmittelbar nicht, nach den Lehren des ersten Capitels dagegen sehr leicht erkennen lässt. Gesetzt nun, ein Theil des Kreises, etwa das zwischen die Punkte A und B fallende Stück desselben, wäre eine gerade Linie,

so nehme man zwischen A und B einen dritten Punkt C an und ziehe die Halbmesser AM, BM, CM; dann müssten, wegen der Gleichheit aller Radien, die Dreiecke ABM und ACM gleichschenklig sein, woraus folgen würde:

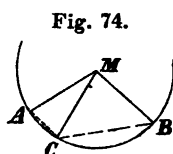


Fig. 74.

$$\angle MAB = \angle MBA \text{ und } \angle MAC = \angle MCA,$$

mithin, weil $\angle MAB = \angle MAC$, auch $\angle MBA = \angle MCA$, was unmöglich ist, weil $\angle MCA$ den Aussenwinkel des Dreiecks BCM bildet; **kein** Stück des Kreises kann also geradlinig verlaufen und mithin ist der Kreis selbst eine **krumme Linie**. Irgend ein Theil desselben, wie z. B. der zwischen A und B liegende, heisst ein **Kreisbogen** und wird dadurch bezeichnet, dass man die an seinen Endpunkten stehenden Buchstaben nebeneinander und die Sylbe *Arc* (Abkürzung von *Arcus*) davorsetzt (*Arc* AB).

II. Zieht man von den Endpunkten eines Bogens Gerade nach dem Mittelpunkte des Kreises, so bilden letztere einen Winkel miteinander, welcher seinen Scheitel am Mittelpunkte hat, und wie man zu sagen pflegt, **über** dem gegebenen Bogen steht; ein derartiger Winkel heisst ein **Centriwinkel** (der Centriwinkel AMB z. B. steht über dem Bogen AB). Man erkennt aus diesem Winkel die Grösse der Drehung, welche nöthig war, um mit dem gegebenen Halbmesser den gegebenen Bogen zu beschreiben. Wie eng überhaupt der Zusammenhang zwischen dem Bogen und seinem Centriwinkel ist, wird man aus folgenden Betrachtungen ersehen.

Kommen in zwei mit demselben Halbmesser beschriebenen Kreisen zwei gleiche Centriwinkel $\angle AMC = \angle A'M'B'$ vor, so kann man den zweiten Kreis so auf den ersten legen, dass sich die gleichen Centriwinkel decken, also M' auf M, $A'M'$ auf AM, $B'M'$ auf BM fällt; wegen der vorausgesetzten Gleichheit der Halbmesser decken sich aber (nach No. I.) die Kreise ganz und gar und mithin müssen auch die Bögen AB und $A'B'$ zusammenfallen; d. h.: **In Kreisen von**

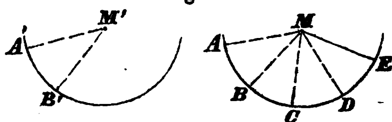


Fig. 75.

gleichen Halbmessern gehören gleiche Bögen zu gleichen Centriwinkeln. Weiss man umgekehrt, dass die Halbmesser und die Bögen einander gleich sind, so kann man die Kreise so aufeinander legen, dass M' auf M und $M'A'$ auf MA (also A' auf A) fällt; dann decken sich die Kreise wieder vollständig, es fällt B' auf B und mithin auch $M'B'$ auf MB, weil es zwischen zwei Punkten nur eine Gerade giebt; d. h.: In Kreisen von gleichen Halbmessern gehören gleiche Centriwinkel zu gleichen Bögen.

Setzen wir, wie vorhin, gleiche Centriwinkel voraus und bringen die beiden in Rede stehenden Kreise jetzt so über einander, dass M' auf M und $M'A'$ auf MB zu liegen kommt, so fällt $M'B'$ etwa nach MC und wir haben $Arc\ BC = Arc\ A'B'$, d. i. $= Arc\ AB$, und mithin $Arc\ AC = 2\,Arc\ AB$. Die Verdoppelung des Centriwinkels ($\angle AMC = 2\angle AMB$) hat also eine Verdoppelung des entsprechenden Bogens zur Folge. Ebenso leicht erhellt, dass, wenn $\angle AMD = 3\angle AMB$ ist, auch $Arc\ AD = 3\,Arc\ AB$ sein muss, woraus von selbst hervorgeht, dass sich ein gegebener Kreisbogen beliebig vervielfachen lässt, indem man seinen zugehörigen Centriwinkel vervielfacht. Wird dagegen umgekehrt der zu einem gegebenen Bogen AD gehörende Centriwinkel AMD in mehrere gleiche Theile getheilt, wie z. B. $\angle AMB = \frac{1}{3}\angle AMD$, so entsprechen diesen gleichen Theilen des Centriwinkels auch gleiche Theile des zugehörigen Bogens, nämlich $Arc\ AB = \frac{1}{3}\,Arc\ AD$. Fassen wir dies Alles zusammen, so ergiebt sich der Satz: Es lässt sich jederzeit ein Kreisbogen finden, welcher ein vorgeschriebenes Vielfaches oder einen vorgeschriebenen Theil eines gegebenen Kreisbogens ausmacht.

Eine wichtige Anwendung hiervon ist die Theilung des Kreises. Denkt man sich nämlich den Kreisumfang in 360 gleiche Theile zerlegt, so entsteht ein Bogen, welcher ein Bogengrad heisst; den 60sten Theil desselben nennt man eine Minute (Bogenminute), der 60ste Theil der Minute führt den Namen Secunde (Bogensecunde); noch kleinere Theile des Kreises drückt man durch Dezimalbrüche von Secunden aus. Für den Grad dient das Zei-

chen: °, für Minute: ′ und für Secunde: ″; wonach z. B. 57° 17′ 44″,8 soviel bedeutet als 57 Grad, 17 Minuten, $44\frac{8}{10}$ Secunden. Nach dieser Eintheilung enthält also der ganze Kreisumfang 360° = 21600′ = 1296000″; der Halbkreis 180° = 10800′ = 648000″, der Viertelkreis (Quadrant) 90° = 5400′ = 324000″, der Achtelkreis (Octant) 45° = 2700′ = 162000″ und der Sechstelkreis (Sextant) 60° = 3600′ = 216000″. Wie man sieht, ist diese Theilung des Kreises analog der in §. 2 erwähnten Winkeltheilung.

§. 23.

Die Centriwinkel und die Peripheriewinkel.

Zieht man von zwei auf dem Umfange eines Kreises liegenden Punkten gerade Linien nach einem dritten Punkte des Umfanges, so schliessen diese Geraden einen Winkel ein, der Peripheriewinkel genannt wird, weil sein Scheitel auf dem Umfange (der Peripherie) des Kreises liegt; dergleichen Winkel sind z. B. die Winkel *APB* in den Fig. α, β, γ.

Fig. 76 α.

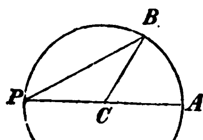


Fig. 76 β.

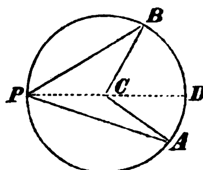
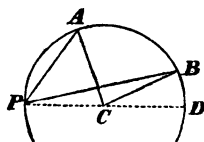


Fig. 76 γ.



Bleiben wir zunächst bei der einfachen Figur α stehen, wo der Schenkel *AP* durch den Kreismittelpunkt *C* geht, und construiren den zugehörigen Centriwinkel *ACB* durch Ziehen von *BC*, so ist der letztere Aussenwinkel zu dem Dreiecke *BCP* und daher

$$\angle ACB = \angle BPC + \angle CBP.$$

Wegen der Gleichheit der Halbmesser ist aber das Dreieck *BCP* gleichschenklig, mithin $\angle BPC = \angle CBP$, und folglich

1) $$\angle ACB = 2 \angle BPC = 2 \angle APB,$$

d. h. der Centriwinkel gleich dem Doppelten des mit ihm auf gleichem Bogen stehenden Peripheriewinkels.

Ziehen wir weiter in Fig. β die Gerade *PCD*, so haben wir nach dem Vorigen die Gleichungen

$$\angle ACD = 2 \angle APD,$$
$$\angle BCD = 2 \angle BPD,$$

und folglich durch Addition

2) $\angle ACB = 2 (\angle APD + \angle BPD) = 2 \angle APB.$

Ziehen wir ebenso in Fig. γ die Gerade *PCD*, so ist wieder

$$\angle ACD = 2 \angle APD,$$
$$\angle BCD = 2 \angle BPD,$$

und folglich durch Subtraction

3) $\angle ACB = 2 (\angle APD - \angle BPD) = 2 \angle APB.$

Die hier betrachteten drei Fälle stellen, wie leicht zu sehen ist, die allein möglichen Lagen dar, welche ein Peripheriewinkel und sein zugehöriger Centriwinkel gegen einander haben können; denn entweder fällt der Punkt *D* mit einem der Punkte *A* oder *B* zusammen (Fig. α), oder *D* fällt zwischen *A* und *B* (Fig. β), oder endlich *D* liegt ausserhalb des Bogens *AB* (Fig. γ). Da nun in jedem Falle die Gleichung $\angle ACB = 2 \angle APB$ besteht, so haben wir den Satz: Wenn ein Centriwinkel und ein Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen stehen, so ist der Centriwinkel das Doppelte des Peripheriewinkels, oder umgekehrt der Peripheriewinkel die Hälfte des Centriwinkels.

Ueber einem gegebenen Bogen giebt es nur einen Centriwinkel, dagegen unzählige Peripheriewinkel; da jeder von den letzteren die Hälfte des einen Centriwinkels ausmacht, so folgt noch: Alle über einem und demselben Bogen stehenden Peripheriewinkel sind einander gleich.

Besonderes Interesse hat der Fall, wenn der Centriwinkel ein gestreckter $= 2R$ ist, also der Peripheriewinkel über dem Halbkreise steht; letzterer beträgt dann jederzeit einen rechten Winkel, was man in der kurzen Formel auszudrücken pflegt: Jeder Winkel im Halbkreise ist ein Rechter.

Construirt man zwei Peripheriewinkel *APB* und *AQB*, deren Scheitel auf entgegengesetzten Seiten der Verbin-

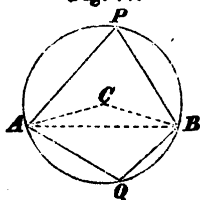


Fig. 77.

dungslinie AB liegen, so ist $\angle APB$ die Hälfte des concaven Winkels ACB und $\angle AQB$ die Hälfte des convexen Winkels ACB, denn beide stehen über dem Bogen APB; die Winkel APB und AQB betragen daher zusammen die Hälfte von der Summe des concaven und convexen Winkels bei C, d. h. die Hälfte von vier Rechten; es ist demnach $\angle APB + \angle AQB = 2R$.

§. 24.

Die Sehnen und die Secanten.

I. Jede gerade Linie, welche zwei Punkte eines Kreisumfanges mit einander verbindet, heisst eine Sehne (Chorde) des Kreises; ist sie noch über jene Punkte hinaus verlängert, so führt sie den Namen Secante. Da aus den Betrachtungen §. 22, I. hervorgeht, dass eine Gerade nur höchstens zwei Punkte mit einem Kreise gemein haben kann, so liessen sich obige Erklärungen auch so fassen: Secante heisst jede Gerade, welche mit einem Kreise zwei Punkte gemein hat, Sehne das Stück der Secante, welches zwischen jenen Punkten liegt.

Verbindet man die Endpunkte einer Sehne durch Radien mit dem Kreismittelpunkte, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis die Sehne ist, z. B. ABM; zieht man noch eine Gerade von der Mitte N der Sehne nach dem Mittelpunkte M, so zerfällt das Dreieck ABM in zwei andere Dreiecke AMN und BMN, welche in allen Seiten mit einander übereinstimmen und daher congruent sind. Daraus folgt weiter, dass MN den Centriwinkel AMB halbirt und senkrecht auf AB steht; dass mithin MN der Abstand der Sehne vom Centrum ist. In dem rechtwinkligen Dreiecke AMN haben wir nun

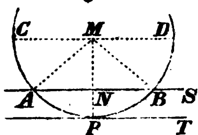


Fig. 78.

$$AN = \sqrt{(\overline{AM}^2 - \overline{MN}^2)},$$

d. i.

$$\tfrac{1}{2}AB = \sqrt{(\overline{AM}^2 - \overline{MN}^2)},$$

oder, wenn wir zur Abkürzung $AB = a$, $AM = r$, $MN = c$ setzen und die vorige Gleichung mit 2 multipliciren,

1) $$a = 2\sqrt{r^2 - c^2}.$$

Dieser Ausdruck erhält seinen grössten Werth, wenn so wenig als möglich von r^2 subtrahirt wird, also $c = 0$ ist; es wird dann $a = 2\sqrt{r^2} = 2r$, in der Figur $= CD$. Nennen wir den doppelten Halbmesser des Kreises kurz seinen Durchmesser, so heisst dies: Der Durchmesser ist die grösste aller Sehnen.

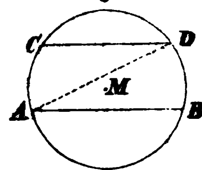
Lassen wir in der Formel 1) c von Null an zunehmen, so wird immer mehr subtrahirt und es kommt also immer weniger heraus, d. h.: Je grösser die Entfernung einer Sehne vom Mittelpunkte ist, desto kleiner ist die Sehne selbst.

Geben wir endlich c seinen grössten Werth $c = MP = r$, so wird $a = 0$, also die Sehne am kleinsten, und in der That zieht sich dann die Sehne auf einen blossen Punkt zusammen. a

II. Wenn wir nach Erledigung dessen, was über eine Sehne gesagt werden kann, uns zur Betrachtung von zwei Sehnen wenden, so sind wieder die beiden Fälle zu unterscheiden, ob jene gleiche Richtung haben oder nicht.

a. Laufen die beiden Sehnen AB und CD einander parallel und zieht man AD, so entstehen zwei gleiche Wechselwinkel, BAD und CDA, die zugleich Peripheriewinkel sind. Der erste steht über dem Bogen BD, ihm würde der Centriwinkel BMD entsprechen; der zweite steht über Arc AC und sein Centriwinkel wäre AMC; aus der Gleichheit jener Peripheriewinkel folgt aber die Gleichheit der zugehörigen Centriwinkel und aus dieser die Gleichheit der entsprechenden Bögen BD und AC; d. h.: Zwischen zwei parallelen Sehnen liegen gleiche Bögen.

Fig. 79.



Der Satz gilt übrigens auch umgekehrt, denn sind die Bögen gleich, so sind auch jene Winkel gleich und folglich die Sehnen wegen der Gleichheit der Wechselwinkel parallel.

b. Haben zwei Seiten ungleiche Richtung, so müssen sie sich (nöthigenfalls verlängert) schneiden; ihr Durchschnittspunkt kann nun in Beziehung auf den Kreis eine dreifach verschiedene Lage haben; entweder nämlich liegt er auf der Peripherie des Kreises selbst (Fig. α), oder

innerhalb des Kreises (Fig. β), oder endlich ausserhalb desselben (Fig. γ). Dies giebt folgende Betrachtungen.

α. Schneiden sich die Sehnen *AB* und *AC* in dem Punkte *A* des Kreisumfanges und sind *P* und *Q* die Halbirungspunkte derselben, so stehen die Geraden *MP* und *MQ* senkrecht auf *AB* und *AC* (No. I.); umgekehrt müssen auch Gerade, welche man von *P* senkrecht auf *AB* und von *Q* senkrecht auf *AC* aufsteigen lässt, durch *M* gehen, da sie von *PM* und *QM* nicht verschieden sein können. Wenn also der Mittelpunkt des Kreises nicht bekannt wäre, so würde man ihn dadurch finden können, dass man die gegebenen Sehnen durch Senkrechte halbirte und letztere bis zu ihrem Durchschnittspunkte verlängerte. Einen solchen Durchschnittspunkt muss es immer geben, weil der Winkel *ATQ* ein spitzer, $\angle AMQ$ dagegen ein rechter ist, und mithin die Geraden *PM* und *QT* (oder *QM*) verschiedene Richtungen haben. — Das genannte Verfahren bleibt aber ganz dasselbe, wenn man sich den Kreis selber weg denkt und von den Sehnen nur ihre Endpunkte *A*, *B*, *C* beibehält, die natürlich nicht in einer geraden Linie liegen dürfen (es würde sonst *QT* // *MP*); man zieht dann die Sehnen *AB*, *AC*, macht die vorige Construction und nun muss *M* der Mittelpunkt des Kreises sein, auf welchem die Punkte *A*, *B*, liegen. In der That lässt sich mit Hilfe congruenter Dreiecke sehr leicht nachweisen, dass die, in der Figur nicht gezogenen, Geraden *AM*, *BM*, *CM* einander gleich sind und folglich als Halbmesser eines Kreises angesehen werden können. Dies giebt den Satz: **Ein Kreis ist durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte bestimmt.**

Fig. 80.

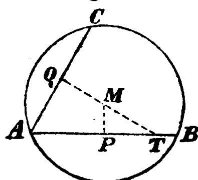


Fig. 81 β.

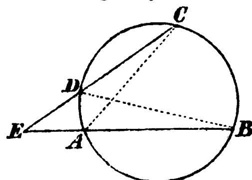
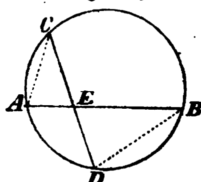


Fig. 81 γ.



β. Schneiden sich zwei Sehnen AB und CD innerhalb oder ausserhalb des Kreises in E, so ist, wenn man AC und BD zieht (sowohl in Fig. β als γ), $\angle AEC = \angle BED$ und $\angle ACE = \angle DBE$ (als Peripheriewinkel über demselben Bogen); die Dreiecke ACE und DBE sind daher ähnlich und es gilt die Proportion

$$AE : CE = DE : BE$$

oder

$$AE . BE = CE . DE,$$

d. h.: Das Product aus den Abschnitten der einen Sehne ist gleich dem Producte aus den Abschnitten der anderen.

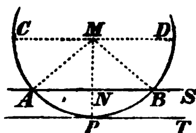
Findet umgekehrt bei zwei Geraden AB und CD, die sich in E schneiden, die obige Gleichung statt, so müssen die vier Punkte A, B, C, D auf dem Umfange eines und desselben Kreises liegen. Denn ginge der durch A, B und C mögliche Kreis nicht durch D, sondern durch einen anderen Punkt D' der Geraden CD, so wäre gleichzeitig, $AE . BE = CE . DE$ und $AE . BE = CE . D'E$, was sich zusammen nicht verträgt. Während also durch drei Punkte im Allgemeinen immer ein Kreis gelegt werden kann, ist dies durch vier Punkte nur dann möglich, wenn die oben entwickelte Gleichung statt findet; letztere enthält daher die Bedingung, unter welcher ein Kreis durch vier gegebene Punkte gehen kann.

§. 25.

Die Tangenten des Kreises.

I. Wir haben bisher solche gerade Linien betrachtet, welche zwei Punkte mit dem Kreisumfange gemein haben, und es bleibt daher noch der Fall zu untersuchen übrig, in welchem eine Gerade und ein Kreis nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich besitzen. Lassen wir die Secante AS so fortrücken, dass sie immer senkrecht auf MP bleibt, so kommen die Punkte A und B einander um so näher, je weiter sich N von M entfernt; ist endlich N in P angelangt, so fallen die zwei Punkte A und B in einen einzigen zusammen, die Secante nimmt die Lage PT an und

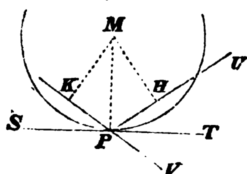
Fig. 82.



hat jetzt nur einen Punkt, nämlich *P*, mit dem Kreise gemein. Eine derartige Gerade heisst eine Tangente des Kreises und der Punkt *P*, welchen sie mit dem Kreise gemein hat, ihr Berührungspunkt.

Die Entstehungsweise der Tangente scheint darauf hinzudeuten, dass die Tangente *PT* senkrecht auf dem nach ihrem Berührungspunkte gezogenen Halbmesser *MP* stehen müsse; ob dies immer der Fall ist, entscheidet sich leicht, wenn man solche Gerade *PU* oder *PV* betrachtet, welche mit *MP* einen spitzen oder stumpfen Winkel machen. Fällt man von *M* eine Senkrechte *MH* auf *PU*; so ist $MH < MP$, mithin liegt der Punkt *H* im Inneren des Kreises und folglich muss die Gerade *PU* den Kreisumfang zweimal schneiden (beim Eintritte in den Kreis und beim Austritte aus demselben); fällt man ebenso auf die Verlängerung von *PV* das Perpendikel *MK*, so ist wieder $MK < MP$, es liegt daher auch *K* im Innern des Kreises und die Gerade *PV* schneidet, hinreichend verlängert, den Kreis zweimal. Die Geraden *PU* und *PV* sind daher Secanten und keine Tangenten. Dass aber jeder von *P* verschiedene Punkt *S* der senkrecht stehenden Geraden *PT* ausserhalb des Kreises liegt, erkennt man daraus, dass die Hypotenuse *MS* grösser als die Kathete *MP* sein muss. Dies giebt den Satz: Jede auf dem Endpunkte eines Halbmessers senkrecht stehende Gerade ist eine Tangente des Kreises; und umgekehrt: Jede Tangente eines Kreises steht senkrecht auf dem nach ihrem Berührungspunkte gezogenen Halbmesser. (Denn wenn sie nicht senkrecht stünde, so wäre sie wie *PU* und *PV* eine Secante, was der Voraussetzung widerspricht.)

Fig. 83.



Aus dem Obigen folgt noch der Satz: Durch einen gegebenen Punkt auf dem Umfange eines Kreises ist nur eine einzige Tangente möglich.

II. Auf die Betrachtung von einer Tangente müsste nun die von zwei Tangenten folgen; man wird aber leicht finden, dass hierbei die Ausbeute sehr gering ist, und wir

wenden uns daher zu der Vergleichung zwischen den Tangenten und Sehnen. Hier sind wieder die beiden Fälle zu unterscheiden, ob die Tangente und die Sehne gleiche Richtung haben (Fig. α) oder nicht (Fig. β).

Fig. 84 α.

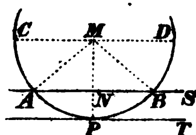
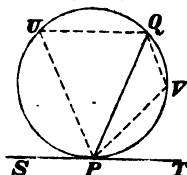


Fig. 84 β.



a. Laufen die Sehne *AB* und die Tangente *PT* (Fig. α) einander parallel, so steht der nach dem Berührungspunkte *P* gezogene Halbmesser nicht nur auf der Tangente, sondern auch auf der Sehne *AB* senkrecht, woraus die Congruenz der Dreiecke *AMN* und *BMN* und die Gleichheit der Winkel *AMP* und *BMP* folgt. Diese zieht die Gleichheit der entsprechenden Bögen *AP* und *BP* nach sich, was man mit den Worten ausdrücken kann: Wenn eine Sehne einer Tangente parallel läuft, so halbirt der Berührungspunkt der letzteren den zwischen beiden Geraden liegenden Bogen.

Man wird leicht bemerken, dass sich der Satz auch umkehren lässt.

b. Wenn eine Tangente und eine Sehne ungleiche Richtung haben, so müssen sie sich nothwendig schneiden, und da dies begreiflicherweise nicht im Innern des Kreises geschehen kann, so muss der Durchschnittspunkt entweder auf dem Umfange oder ausserhalb des Kreises liegen.

α. Schneiden sich die Sehne *PQ* und die Tangente *ST* im Punkte *P* der Peripherie (Fig. β), so ist, wenn die Sehne $QU \parallel PT$ gezogen wird, $Arc\,PQ = Arc\,PU$ und folglich (weil über gleichen Bögen gleiche Peripheriewinkel stehen) $\angle PUQ = \angle PQU$, und da letzterer als Wechselwinkel $= \angle QPT$ ist, $\angle PUQ = \angle QPT$, wo man bemerken möge, dass $\angle U$ der Peripheriewinkel über dem kleineren Bogen *PQ* ist. — Zieht man ferner nach dem Punkte *V* auf diesem Bogen die Geraden *PV* und *QV*, so ist $\angle PVQ = \angle V$

der Peripheriewinkel über dem grösseren Bogen *PUQ* oder *PQ* und man hat nach §. 23 (letzter Satz)

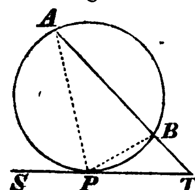
$$\angle PUQ + \angle PVQ = 2R$$
$$= \angle QPT + \angle QPS,$$

und wenn man hiervon die vorige Gleichung $\angle PUQ = \angle QPT$ subtrahirt, so bleibt $\angle PVQ = \angle QPS$. Dies giebt folgenden Doppelsatz: Gehen durch einen Punkt auf dem Umfange eines Kreises eine Sehne und eine Tangente, so ist der spitze Winkel, den beide Gerade mit einander bilden, gleich dem Peripheriewinkel über dem kleineren Bogen und der stumpfe Winkel gleich dem Peripheriewinkel über dem grösseren Bogen.

Auch umgekehrt gilt dieser Satz, wie man leicht finden wird.

β. Schneiden sich die Sehne *AB* und die Tangente *SP* ausserhalb des Kreises in *T*, so lässt sich der vorige Satz anwenden, wenn man die Sehnen *AP* und *BP* zieht; es ist dann $\angle BPT$ gleich dem Peripheriewinkel über dem kleineren Bogen *BP*, also $= \angle BAP$. Da ausserdem die Dreiecke *APT* und *PBT* noch in dem Winkel *T* übereinstimmen, so folgt $\triangle APT \sim \triangle PBT$ und daraus die Proportion

Fig. 85.



$$AT : PT = PT : BT,$$

oder

$$AT \,.\, BT = \overline{PT}^2.$$

In Worten heisst dies: Schneiden sich eine Secante und eine Tangente ausserhalb des Kreises, so ist der Abschnitt der Tangente die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Secante.

Findet umgekehrt zwischen *AT*, *CT* und *PT* die obige Beziehung statt, so muss *PT* eine Tangente an dem durch die Punkte *A*, *B* und *P* gehenden Kreise sein. Wegen des gleichen Winkels *T* und der vorausgesetzten Proportion sind nämlich die Dreiecke *APT* und *PBT* ähnlich, mithin $\angle BAP = \angle BPT$ und folglich nach *α* die Gerade *PT* eine Tangente des Kreises. Die obige Gleichung stellt also die

Bedingung dar, unter welcher ein durch drei Punkte gehender Kreis eine durch den letzten dieser Punkte gezogene Gerade berühren kann.

§. 26.
Zwei und mehrere Kreise.

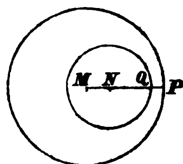
Die Vergleichung zweier oder mehrerer Kreise hat zweierlei zu berücksichtigen, einmal die Halbmesser und zweitens die Entfernung der Mittelpunkte der Kreise; durch das Erste bestimmt sich nämlich die Grösse der Kreise, durch das Zweite ihre gegenseitige Lage. Nennen wir einfür allemal r und ϱ die Halbmesser und e die Entfernung der Kreismittelpunkte (die Centrale), so haben wir zu untersuchen, welche Beziehungen zwischen r, ϱ und e statt finden müssen, wenn die Kreise diese oder jene Lage zu einander haben sollen.

Der einfachste Fall wäre nun offenbar, wenn die beiden Mittelpunkte auf einander fallen, also $e = 0$ ist. Die Kreise heissen dann concentrisch und es fällt der eine entweder gänzlich auf den andern (Congruenz), wenn $r = \varrho$, oder der mit dem kleinern Halbmesser beschriebene liegt innerhalb des andern, wenn r von ϱ verschieden ist. In jenem Falle haben beide Kreise alle Punkte, in diesem keinen Punkt mit einander gemein.

Sind aber die Kreise nicht concentrisch, also e von Null verschieden, so können drei verschiedene Fälle eintreten; die Kreise haben nämlich gar keinen Punkt gemein, oder einen Punkt oder endlich zwei Punkte, wie die folgenden Betrachtungen zu erkennen geben.

I. Liegt nämlich der eine Kreis ganz innerhalb, wie in Fig. α, oder ganz ausserhalb des andern, wie in Fig. β, so haben sie keinen Punkt gemein und es ist in Fig. α

Fig. 86 α.



$$MP = MN + NQ + PQ,$$

d. i.

$$r = e + \varrho + PQ$$

oder

1) $$r - \varrho = e + PQ,$$

und folglich, wenn man PQ rechter Hand weglässt,

2) $$r - \varrho > e.$$

Dagegen ist in Fig. β

$$MP + PQ + NQ = MN,$$

Fig. 86β.

d. i.

$$r + PQ + \varrho = e$$

oder

3) $$r + \varrho = e - PQ,$$

und wenn man PQ rechter Hand weglässt,

4) $$r + \varrho < e.$$

Umgekehrt ist auch leicht zu sehen, dass, wenn eine der Bedingungen

$$r - \varrho > e \text{ oder } r + \varrho < e$$

erfüllt ist, die Kreise keinen Punkt mit einander gemein haben und im ersten Falle der eine Kreis innerhalb des andern, im zweiten Falle ausserhalb des andern liegt.

Fig. 87α.

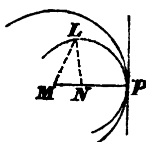
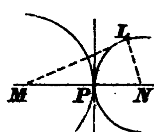


Fig. 87β.



II. Wenn sich die beiden Punkte P und Q in einen einzigen zusammenziehen, also $PQ = 0$ ist (Fig. α und β), so gehen die Gleichungen 1) und 3) in die folgenden über:

5) $$r - \varrho = e \text{ und } r + \varrho = e.$$

Die Kreise haben jetzt einen Punkt P mit einander gemein, oder sie berühren sich, und zwar inwendig, wenn der eine Kreis innerhalb der ersten liegt (Fig. α), oder auswendig, wenn der eine Kreis ausserhalb des andern liegt. Dass in der That die beiden Kreise keinen Punkt weiter als P gemein haben, ist leicht zu sehen, denn zieht man in Fig. α nach einem von P verschiedenen Punkte L auf der Peripherie des kleinern Kreises die Geraden LM und LN, so ist $LM < MN + LN$, d. i. $LM < e + \varrho$, oder, weil aus No. 5) $e + \varrho = r$ folgt, $LM < r$, woraus unmittelbar hervorgeht, dass L innerhalb des grösseren Kreises liegt. Zieht man ebenso LM und LN in Fig. β,

so ist $MN < LM + LN$, d. h. $r + \varrho < LM + \varrho$ also $r < LM$, woraus wieder folgt, dass L ausserhalb des um M beschriebenen Kreises liegt. Die Gleichungen 5) enthalten also die Bedingungen, unter denen sich zwei Kreise berühren.

Wenn umgekehrt zwei Kreise sich berühren, so liegen auch ihre Mittelpunkte und der Berührungspunkt auf einer und derselben Geraden und zugleich findet die eine oder andere der Gleichungen 5) statt. Wären nämlich in Fig. 87γ

Fig. 87 γ.

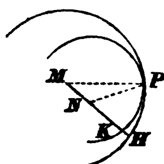
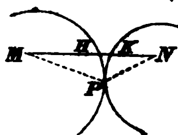


Fig. 87 δ.



M und N die Kreismittelpunkte und es ginge die Centrale MN nicht durch den Berührungspunkt P, so würde sie durch zwei andere Punkte H und K auf den Peripherien der Kreise gehen müssen, und nun hätte man $MH > MN + NK$ oder, wenn man statt MH und NK die Radien MP und NP setzt, $MP > MN + NP$, was aber unmöglich ist. Ebenso wäre in Fig. δ $MN > MH + NK$ oder $MN > MP + NP$, was ebenfalls unmöglich ist. Die Centrale MN muss also jedenfalls durch den Berührungspunkt P gehen, wie in den Figuren α und β, und nun finden wie dort die Gleichungen $r - \varrho = e$ oder $r + \varrho = e$ statt, je nachdem die Berührung von Innen oder von Aussen geschieht.

Errichtet man im Berührungspunkte eine Senkrechte auf der Centrale, so ist diese die **gemeinschaftliche Tangente** beider Kreise; bei einer innern Berührung liegen beide Kreise auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente, bei einer äussern Berührung auf entgegengesetzten Seiten.

III. Wenn endlich die Kreise zwei Punkte mit einander gemein haben, so können wieder zwei verschiedene Lagen statt finden (Fig. 88α und 88β). Im ersten Falle ist

Fig. 88 α.

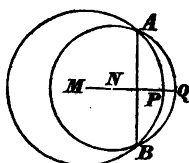
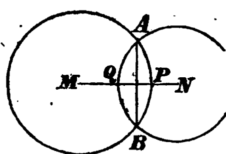


Fig. 88 β.



$$MP + PQ = MN + NQ,$$

d. h.

$$r + PQ = e + \varrho,$$

oder

$$r - \varrho + PQ = e,$$

und wenn PQ links weggelassen wird, so folgt

6) $$r - \varrho < e.$$

Ganz ähnlich haben wir in Fig. β

$$MP + NP = MN,$$

oder

$$MP + NQ - PQ = MN,$$

d. h.

$$r + \varrho - PQ = e,$$

und wenn wir links PQ weglassen,

7) $$r + \varrho > e.$$

In jedem Falle ist AB die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise und die Punkte P, Q liegen entweder beide auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Sehne, oder auf entgegengesetzten Seiten derselben.

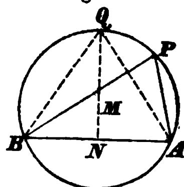
Constructionen zu Cap. V.

I. Der Satz, dass alle über demselben Bogen oder über derselben Sehne (auf gleicher Seite der letzteren) stehenden Peripheriewinkel einander gleich sind, giebt zu einer sehr brauchbaren Aufgabe Veranlassung, nämlich:

Einen Kreis zu beschreiben, wenn eine Sehne desselben und der über ihr stehende Peripherie-

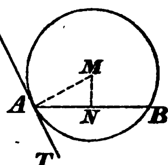
winkel gegeben sind. Halbirt man die Sehne AB durch die auf ihr senkrechte Gerade NQ und zieht AQ, BQ, so ist $\angle AQB = \angle APB$, also gleich dem gegebenen Peripheriewinkel P, ferner $\angle AQN = \frac{1}{2}P$ und $\angle NAQ = R - \frac{1}{2}P = NBQ$. Von dem Dreiecke ABQ kennt man also eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (jeder $= R - \frac{1}{2}P$) und folglich ist dasselbe leicht zu construiren. Beschreibt man jetzt einen durch A, B und Q gehenden Kreis, so ist dieser offenbar der gesuchte Kreis.

Fig. 89.



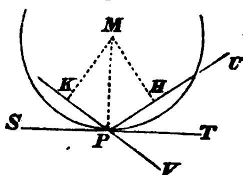
Eine zweite und kürzere Construction ergiebt sich aus dem Satze II. α in §. 25. Macht man nämlich $\angle BAT =$ dem gegebenen Peripheriewinkel P, so muss AT eine Tangente des fraglichen Kreises sein; der Mittelpunkt derselben ist also einerseits auf einer Geraden AM zu suchen, welche senkrecht auf ST steht, andererseits auf einer Geraden MN, welche die Sehne senkrecht halbirt. Der Durchschnitt M beider Geraden giebt daher den Mittelpunkt des gesuchten Kreises und AM ist dessen Halbmesser.

Fig. 90.



2. Durch einen gegebenen Punkt an einen gegebenen Kreis eine Tangente zu legen. Es sind hier zunächst zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich der gegebene Punkt auf der Peripherie des Kreises oder ausserhalb desselben liegt. Im ersten Falle hat man nur den Punkt P mit dem Kreismittelpunkte M zu verbinden und auf dem so entstandenen Halbmesser MP eine Senkrechte PT im Punkte P zu errichten.

Fig. 91.



Im zweiten Falle kommt es darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck MPQ zu construiren, welches die Gerade MP zur Hypotenuse hat und dessen Spitze Q auf der Peripherie des gegebenen Kreises liegt. Man erhält dasselbe leicht, wenn man über MP als Durchmesser einen

Kreis beschreibt, welcher den gegebenen Kreis in Q schneidet; es ist dann $\angle PQM$ (als Winkel im Halbkreise) $= R$ und folglich PQ die gesuchte Tangente.

Fig. 92.

Da der Hilfskreis über PQ den gegebenen Kreis zum zweiten Male in Q' schneidet, so giebt es noch eine zweite Tangente PQ'. Aus der Congruenz der Dreiecke MPQ und MPQ' folgt noch $PQ = PQ'$ und $\angle MPQ = \angle MPQ'$, so dass also M auf der Halbirungslinie des Winkels QPQ' liegt.

3. Die gemeinschaftliche Tangente zweier gegebenen Kreise zu finden. Sind die beiden mit den ungleichen Halbmessern MP und NQ beschriebenen Kreise gegeben und ist PQT eine Gerade, welche sie beide berührt, so sind die Winkel MPT und NQT gleichzeitig rechte; wenn ferner $NH \parallel PQ$ gezogen wird, so ist auch $\angle MHN = R$, und man kann folglich NH als Tangente eines mit dem Halbmesser $MH = MP - HP = MP - NQ$ beschriebenen Kreises ansehen. Dies führt unmittelbar zur folgenden

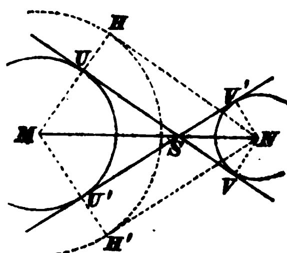
Fig. 93.

Construction: Man beschreibe aus dem Mittelpunkte M des grösseren Kreises einen Halbkreis, welcher die Differenz der gegebenen Halbmesser zum Radius hat und lege an ihn vom Mittelpunkte N des kleineren Kreises aus eine Tangente, deren Berührungspunkt H sein möge. Verlängert man jetzt den Halbmesser MH bis P und zieht $PQ \parallel HN$, so ist PQ die gesuchte Tangente. Da sich von N aus zwei Tangenten an den Hilfskreis legen lassen, so folgt, dass auf der anderen Seite von MN noch eine zweite gemeinschaftliche Tangente $P'Q'$ liegt, welche, wie leicht zu sehen ist, durch denselben Punkt T der verlängerten Centrale geht.

Ausser den soeben gefundenen zwei gemeinschaftlichen Tangenten unserer Kreise giebt es übrigens noch ein zweites Paar, deren Berührungspunkte aber nicht auf derselben

Seite der Centrale (wie P und Q oberhalb), sondern auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen, wie U und V, oder U', V'. Jene Berührungslinien (PQ und $P'Q'$) nennt man die äusseren, diese (UV und $U'V'$) die inneren gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise. Man findet letztere, wenn man nicht mit der Differenz, sondern mit der Summe der gegebenen Halbmesser einen Hilfskreis beschreibt und dann wie vorhin verfährt, wovon die Gründe leicht genug einzusehen sind.

Fig. 94.



Die beiden Punkte S und T, in welchen sich die inneren und äusseren gemeinschaftlichen Tangenten schneiden, heissen die Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise; S der innere, T der äussere. Ihre Entfernungen vom Mittelpunkte des grösseren Kreises sind leicht zu finden, sobald die Halbmesser $MP = r$, $NQ = \varrho$ und die Centrale $MN = e$ gegeben sind. Für $MS = s$ und $MT = t$ ist nämlich

$$MH : MN = MU : MS,$$

d. i.

$$r + \varrho : e = r : s,$$

also

$$\alpha) \qquad s = \frac{er}{r + \varrho},$$

und man hat ganz ähnlich

$$MH : MN = MP : MT,$$

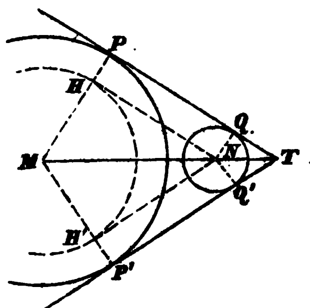
d. i.

$$r - \varrho : e = r : t,$$

folglich

$$\beta) \qquad t = \frac{er}{r - \varrho}.$$

Fig. 95.

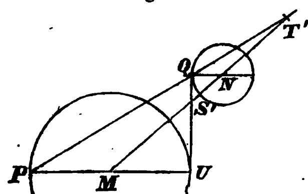


Wenn sich die beiden Kreise von Aussen berühren, so fallen die beiden inneren Tangenten zu einer einzigen zusammen und man hat dann nur noch drei gemeinschaftliche Tangenten; schneiden sich die Kreise, so giebt es gar keine inneren, sondern nur zwei äussere gemeinschaftliche Tan-

genten; berühren sich die Kreise von Innen, so bleibt nur eine äussere gemeinschaftliche Tangente übrig; liegt endlich der kleinere Kreis so innerhalb des grösseren, dass er keinen Punkt mit ihm gemein hat (Fig. 86 α), so ist gar keine gemeinschaftliche Tangente mehr vorhanden.

Zieht man überhaupt ein Paar parallele Radien MP und NQ oder MU und NQ und nennt S' und T' die Durchschnitte von QU und MN einerseits, sowie von PQ und MN andererseits, so hat man

Fig. 96.



$$MU : MS' = NQ : NS';$$

d. i.

$$r : MS' = \varrho : e - MS',$$

oder

$$\varrho MS' = r(e - MS'),$$

und hieraus findet man leicht

$$MS' = \frac{er}{r + \varrho}.$$

Ferner ist

$$MP : MT' = NQ : NT',$$

d. i.

$$r : MT' = \varrho : MT' - e,$$

oder

$$\varrho MT' = r(MT' - e),$$

woraus man erhält

$$MT' = \frac{er}{r - \varrho}.$$

Aus der Vergleichung dieser Formeln mit denen für s und t ergiebt sich augenblicklich, dass S' und T' die Aehnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise sind und dass man also den schönen Satz aufstellen kann: Die Verbindungslinie der Endpunkte irgend zweier parallelen Halbmesser geht durch den inneren oder äusseren Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise, je nachdem jene Endpunkte auf verschiedenen Seiten der Centrale liegen oder nicht.

Umgekehrt ist auch leicht zu sehen, dass, wenn man von einem Punkte Q auf der Peripherie des einen Kreises die Geraden $S'Q$ und $T'Q$ nach den Aehnlichkeitspunkten und nachher MP und MU zieht, nothwendig MP und ebenso $MU \parallel NQ$ sein muss.

4. **Die Berührungsaufgaben.** Verstehen wir unter dem Ausdrucke „einen Punkt berühren" dasselbe, wie unter den Worten „durch einen Punkt gehen", so giebt es folgendes allgemeines Problem:

> Es sind von Punkten, Geraden und Kreisen in einer Ebene irgend drei gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, welcher die bezeichneten drei Stücke berührt.

Diese Aufgabe enthält, wenn man alle einzelnen Fälle durchgeht, zehn besondere Probleme in sich; es können nämlich zugleich gegeben sein

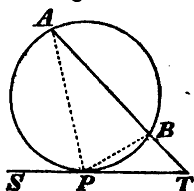
von den Kreisen:	0,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	2,	2,	3,
von den Geraden:	0,	1,	2,	3,	0,	1,	2,	0,	1,	0,
von den Punkten:	3,	2,	1,	0,	2,	1,	0,	1,	0,	0.

Die Lösungen dieser Aufgaben wollen wir mit kurzen, aber wohl genügenden Worten andeuten.

I. Durch drei Punkte einen Kreis zu beschreiben, ist bereits in §. 24 II. *b. α.* gelehrt worden.

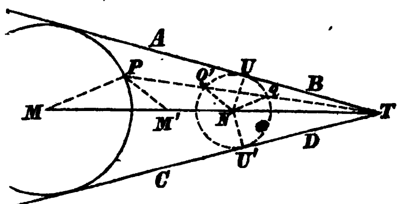
II. Gegeben zwei Punkte A, B und eine Gerade ST. Zieht man AB bis sie ST in T schneidet, und ist P der (noch unbekannte) Berührungspunkt, so muss $\overline{TP}^2 = TA . TB$ sein; man findet also P, wenn man $TP = \sqrt{TA . TB}$ construirt und von T aus abschneidet.

Fig. 97.



III. Gegeben zwei Gerade AB, CD und ein Punkt P. Schneiden sich die Geraden in T, so muss der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf der Halbirungslinie TN des Winkels ATC liegen, denn jeder beliebige Punkt derselben, wie z. B. N, hat von AB und CD gleiche Entfernung $NU = NU'$.

Fig. 98.

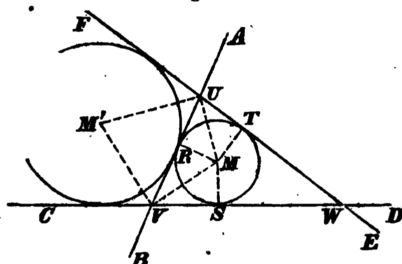


Construirt man mit NU einen Hilfskreis, so muss weiter T der äussere Aehnlichkeitspunkt des Hilfskreises und des gesuchten Kreises sein; zieht man also PT, welche den Hilfskreis in Q und Q' schneidet, und dann $PM \parallel QN$, so

erhält man den Mittelpunkt *M* und Halbmesser des gesuchten Kreises. Legt man dagegen *PM'* // *Q'N*, so erhält man einen zweiten Kreis aus dem Mittelpunkte *M'* mit dem Halbmesser *M'P*, welcher gleichfalls das Verlangte leistet.

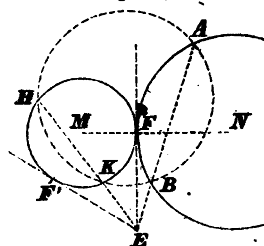
IV. Es sind drei Gerade gegeben *AB*, *CD*, *EF*; ihre Durchschnitte seien *U*, *V* und *W*. Da der gesuchte Kreis die Geraden *UV* und *UW* berühren soll, so muss sein Mittelpunkt auf der Halbirungslinie des Winkels *VUW* liegen; weil ferner der Kreis auch *UV* und *VW* berühren soll, so muss sein Centrum ebenso auf der Halbirungslinie des Winkels *UVW* liegen; der Durchschnitt *M* beider Halbirungslinien ist daher der Mittelpunkt des gesuchten Kreises und sein Halbmesser gleich der Senkrechten *MR* von *M* auf *UV*, wobei *MR* = *MS* = *MT*. Halbirt man ebenso die Winkel *VUF* und *UVC*, so führt der Durchschnitt *M'* derselben auf ähnliche Weise zu einem zweiten Kreise, welcher ebenfalls der Aufgabe genügt; überhaupt giebt es im Ganzen vier verschiedene Kreise, welche die gegebenen drei Geraden berühren.

Fig. 99.



V. Gegeben ein Kreis um *M* und zwei Punkte *A* und *B*. Wäre der gesuchte Kreis, welcher durch *A* und *B* gehen und den gegebenen Kreis berühren soll, schon gefunden, so würden sich die gemeinschaftliche innere Tangente beider Kreise und die nöthigenfalls verlängerte Gerade *AB* in einem Punkte *E* so schneiden, dass $\overline{EF}^2 = EA \cdot EB$ wäre. Zieht man ausserdem durch *E* eine beliebige Gerade, welche den gegebenen Kreis in *H* und *K* schneidet, so ist auch $\overline{EF}^2 = EH \cdot EK$, mithin $EA \cdot EB = EH \cdot EK$, woraus folgt, dass die vier

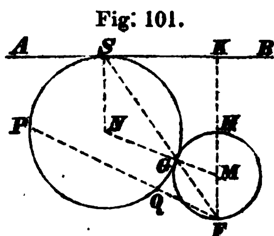
Fig. 100.



Punkte A, B, H, K auf der Peripherie eines neuen Kreises liegen (§. 24 II. b, β). Dies führt unmittelbar zu folgender Construction: Man beschreibe einen durch A und B gehenden Hilfskreis, welcher den gegebenen Kreis in H und K schneidet; von dem Durchschnittspunkte E der Geraden AB und HK aus lege man eine Tangente EF an den um M beschriebenen Kreis, so ist der durch A, B und F gehende Kreis der gesuchte. Da man von E aus zwei Tangenten EF und EF' an den gegebenen Kreis ziehen kann, so giebt es zwei Kreise, welche der Aufgabe genügen; der eine berührt den gegebenen Kreis von Aussen, der andere von Innen.

VI. Gegeben ein Kreis um M, eine Gerade AB und ein Punkt P. Wäre der gesuchte Kreis schon gefunden, N sein Mittelpunkt, und sind FMK und NS senkrecht auf AB, so laufen die Halbmesser MF und NS parallel und mithin geht die Gerade FS durch den innern Aehnlichkeitspunkt, hier den Berührungspunkt, beider Kreise. Nun ist $\triangle FGH \sim \triangle FKS$, mithin $FG : FH = FK : FS$ oder $FH . FK = FG . FS$; ausserdem ist aber, wenn FP gezogen wird, $FP . FQ = FG . FS$, folglich $FP . FQ$ auch gleich $FH . FK$ und endlich $FQ = \frac{FH . FK}{FP}$. Dies führt zu folgender Construction: Man ziehe die Gerade $FMHK$ senkrecht auf AB, verbinde F mit P und schneide auf FP ein Stück $FQ = \frac{FH . FK}{FP}$ ab, construire endlich einen Kreis, welcher P, Q und AB berührt (nach No. II.), so ist dieser der gesuchte Kreis.

Fig. 101.



VII. Gegeben ein Kreis um M und zwei Gerade AB und CD. Es sei N der Mittelpunkt des gesuchten Kreises und $NU = NV$ sein Halbmesser; wir beschreiben aus N mit NM als Halbmesser einen mit ihm concentrischen Kreis und legen durch die Punkte U' und V', in welchen derselbe die Senkrechten NU und NV schneidet, ein Paar Gerade $A'B' \parallel AB$ und $C'D' \parallel CD$; dann berührt der

Fig. 102.

neue Kreis offenbar diese Geraden; zugleich ist $UU' = NU - NU' = NP - NM = MP$, d. i. gleich dem Halbmesser des gegebenen Kreises, und VV' ebenfalls $= MP$. Dies giebt folgende Construction: Man ziehe $A'B' \parallel AB$ und $C'D' \parallel CD$ so, dass die jedesmalige Entfernung der beiden Parallelen dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleich ist, und beschreibe darauf einen Hilfskreis, welcher die Geraden $A'B'$, $C'D'$ und den Punkt M berührt, (nach No. III.); der gesuchte Kreis ist dann mit dem Hilfskreise concentrisch und sein Halbmesser um den Radius des gegebenen Kreises grösser als der Halbmesser des Hilfskreises. Da die Aufgabe III., welche hier benutzt wird, zwei Auflösungen besitzt, so giebt es auch hier zwei Kreise, welche den obigen Bedingungen genügen.

Zieht man die Parallelen $A'B'$ und $C'D'$ nicht innerhalb, sondern ausserhalb des von AB und CD gebildeten Winkels, so ist der Halbmesser des gesuchten Kreises nicht grösser, sondern um ebenso viel wie vorhin kleiner als der Halbmesser des Hilfskreises, und man erhält dann diejenigen zwei Kreise, welche den gegebenen Kreis, nicht wie vorhin von Innen, sondern von Aussen berühren. Die Aufgabe hat also im Ganzen vier Auflösungen.

VIII. Gegeben zwei Kreise um M und N und

Fig. 103.

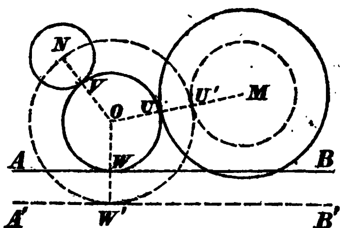
ein Punkt P. Hätte man schon den gesuchten aus O beschriebenen Kreis, welcher durch P ginge und die gege-

benen Kreise in U und V berührte, so wäre, wenn UV bis zum Durchschnitte T mit MN verlängert und TP gezogen wird, $TP \cdot TQ = TU \cdot TV$. Zieht man noch MU' und NV', so ist $\angle MU'U = \angle MUU' = \angle OUV = \angle UVO = \angle NVV'$, woraus hervorgeht, dass die Halbmesser MU' und NV parallel laufen, mithin T der Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise ist. Weiter ist nun auch $MU \parallel NV'$, mithin $\angle GMU = \angle KNV'$, und ebenso sind die Hälften dieser Winkel, nämlich die Peripheriewinkel MFU und KVV', einander gleich; daraus folgt $\triangle TFU \sim \triangle TVK$, mithin $TF : TU = TV : TK$ oder $TU \cdot TV = TF \cdot TK$ und mit der früheren Gleichung zusammengehalten $TP \cdot TQ = TF \cdot TK$ oder $TQ = \frac{TF \cdot TK}{TP}$. Dies giebt folgende Construction: Von dem äussern Aehnlichkeitspunkte T der gegebenen Kreise aus ziehe man TP und bestimme den Punkt Q so, dass $TQ = \frac{TF \cdot TK}{TP}$; man beschreibe darauf nach No. V. einen Kreis, welcher die Punkte P, Q und einen der gegebenen Kreise berührt, so hat man den gesuchten Kreis. Da die Aufgabe No. V. zwei Auflösungen hat, so giebt es noch einen zweiten derartigen Kreis, welcher nämlich die beiden gegebenen Kreise von Innen berührt.

Verfährt man ebenso mit dem innern Aehnlichkeitspunkte S, indem man aber SQ auf der Rückwärtsverlängerung von SP abschneidet, so erhält man diejenigen zwei Kreise, welche den einen der gegebenen Kreise von Aussen und den andern von Innen berühren. Die Aufgabe hat also im Ganzen vier Auflösungen.

IX. Gegeben zwei Kreise um M und N und eine Gerade AB. Der gesuchte Kreis berühre die gegebenen Stücke in U, V, W; beschreibt man aus seinem Mittelpunkte O mit ON als Halbmesser einen Kreis, welcher den Radius MU in U' und die verlängerte OW in W' schneidet, so berührt die-

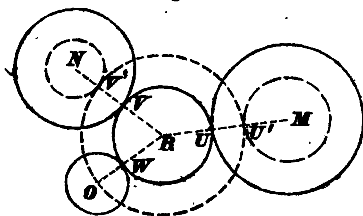
Fig. 104.



ser neue Kreis offenbar einen aus M mit MU' als Halbmesser construirten Kreis und eine durch W' parallel zu AB gezogene Gerade $A'B'$. Dabei ist $MU' = MU - UU' = MU - NV$, also gleich der Halbmesserdifferenz, und $WW' = NV$. Dies giebt folgende Construction: Aus M beschreibe man einen Hilfskreis mit dem Halbmesser $MU' = MU - NV$, zu AB ziehe man in der Entfernung $WW' = NV$ eine Parallele und beschreibe nach No. VI. einen zweiten Hilfskreis, welcher den ersten Hilfskreis, die Parallele $A'B'$ und den Punkt N berührt. Der gesuchte Kreis ist mit diesem zweiten Hilfskreise concentrisch und sein Halbmesser um den Radius des kleinern gegebenen Kreises kürzer, als der Halbmesser des zweiten Hilfskreises. Beschreibt man den ersten Hilfskreis mit der Summe der Radien statt mit der Differenz, so erhält man einen Kreis, welcher den einen gegebenen Kreis von Aussen und den andern von Innen berührt. Legt man die Parallele $A'B'$ auf die entgegengesetzte Seite von AB und beschreibt einmal mit der Differenz und dann mit der Summe der gegebenen Radien den ersten Hilfskreis, so entstehen wieder zwei neue Kreise, so dass es also im Ganzen vier Auflösungen giebt.

X. Gegeben drei Kreise um M, N und O. Der gesuchte Kreis habe R zum Mittelpunkte und berühre die gegebenen Kreise in U, V und W. Beschreibt man mit dem Halbmesser RO, wo O der Mittelpunkt des kleinsten Kreises ist, einen Hilfskreis, welcher MR und NR in U' und V' schneidet, so berührt dieser Hilfskreis diejenigen zwei Kreise, welche man aus M und N mit den Halbmessern MU' und NV' construiren kann. Berücksichtigt man, dass hierbei $MU' = MU - UU' = MU - OW$ und $NV' = NV - VV' = NV - OW$ ist, so hat man folgende Construction: Aus M und N beschreibe man zwei Hilfskreise mit den Halbmesserdifferenzen $MU - OW$ und $NV - OW$, darauf einen dritten Hilfskreis, welcher die

Fig. 105.



beiden ersten Hilfskreise berührt und durch den Punkt O geht; der gesuchte Kreis ist mit dem dritten Hilfskreise concentrisch und sein Radius um OW kleiner als der Halbmesser des letzteren. Berührt der dritte Hilfskreis die zwei ersten Hilfskreise von Aussen, so berührt auch der gesuchte Kreis alle drei gegebenen Kreise von Aussen; berührt dagegen der dritte Hilfskreis die zwei ersten Hilfskreise von Innen, so berührt auch der gesuchte Kreis die gegebenen Kreise von Innen; nur ist in diesem Falle sein Halbmesser um OW grösser als der Radius des dritten Hilfskreises.

Im Ganzen hat die Aufgabe acht Auflösungen, weil der gesuchte Kreis die drei gegebenen Kreise entweder sämmtlich von Aussen oder sämmtlich von Innen, oder zwei der gegebenen Kreise von Aussen und einen von Innen, oder einen von Aussen und zwei von Innen berühren kann; für die hier nicht besonders erörterten Fälle gilt eine ganz ähnliche Betrachtung und Construction, die man vermöge der Bemerkung leicht finden wird, dass die ersten zwei Hilfskreise statt mit den Halbmesserdifferenzen unter Umständen auch mit den Halbmessersummen beschrieben werden können.

Cap. VI.

Die Sehnen- und Tangentenvielecke.

---

§. 27.

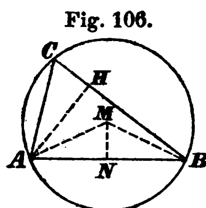
Das Sehnen- und Tangentendreieck.

Nachdem wir uns mit einzelnen Sehnen und Tangenten eines Kreises beschäftigt haben, untersuchen wir solche Sehnen und Tangenten, welche in ihrer Aufeinanderfolge ein Vieleck bilden; ist dieses Vieleck der Art, dass alle seine Seiten Sehnen eines und desselben Kreises sind, so

sagt man, das Vieleck sei in den Kreis beschrieben oder nennt es kurz ein Sehnenvieleck; sind dagegen alle Seiten des Vielecks Tangenten eines und desselben Kreises, so sagt man, das Vieleck sei um den Kreis beschrieben oder nennt es ein Tangentenvieleck. Von dem Kreise endlich kann man sagen, dass er um das Sehnenvieleck und in das Tangentenvieleck beschrieben sei. Die Untersuchung über derartige Vielecke fangen wir mit dem einfachsten aller Vielecke, nämlich dem Dreiecke, an.

I. Es sei ABC ein Sehnendreieck, dessen Seiten als in Zahlen gegeben vorausgesetzt werden; $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$. Man findet dann eine Beziehung zwischen den Seiten des Dreiecks und dem umschriebenen Kreise auf folgendem Wege. Wenn AH senkrecht auf BC und MN senkrecht auf AB ist, so haben wir $\angle C = \angle AMN$ (§. 23) und $\angle AHC = \angle ANM = R$, woraus die Aehnlichkeit der Dreiecke ACH und AMN folgt. Dies giebt

Fig. 106.



$$AH : AC = AN : AM$$

d. i., wenn wir den Halbmesser AM mit r bezeichnen,

$$AH : b = \tfrac{1}{2}a : r$$

oder

$$r = \frac{ab}{2 \cdot AH}.$$

Die Linie AH ist leicht zu berechnen, wenn man berücksichtigt, dass die Fläche des Dreiecks, welche Δ heissen möge, $= \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} c \cdot AH$ und mithin $AH = \frac{2\Delta}{c}$ sein muss. Es wird dann

$$1) \qquad r = \frac{abc}{4\Delta}$$

oder wenn man für Δ seinen Werth setzt (§. 17),

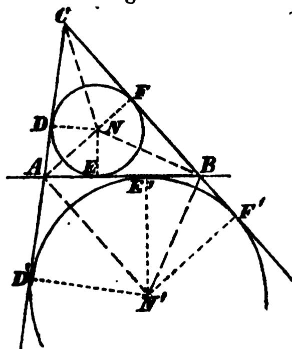
$$2) \quad r = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}.$$

Sind a, b und c gegeben, so lässt sich nach Formel 1) jederzeit der Radius r finden, d. h., jedes beliebige Dreieck kann als ein Sehnendreieck angesehen werden. Der so auf dem Wege der Rechnung gefundene Satz ist

übrigens von dem in §. 24. II. α. entwickelten Theoreme nicht wesentlich verschieden.

II. Es seien $AB = a$, $AC = b$ und $BC = c$ die Seiten eines Tangentendreiecks und ϱ der Radius des eingeschriebenen Kreises. Ziehen wir nach den Berührungspunkten die Halbmesser DN, EN, FN und ausserdem nach den Ecken die Geraden AN, BN, CN, so sind $DN = EN = FN = \varrho$ die Höhen der Dreiecke ANC, ANB und BNC. Nennen wir wieder Δ die Fläche des Dreiecks ABC, so ist offenbar Δ gleich der Summe der Flächen von den Dreiecken ANB, ANC und BNC, d. h.

Fig. 107.



$$\begin{aligned}\Delta &= \tfrac{1}{2}a\varrho + \tfrac{1}{2}b\varrho + \tfrac{1}{2}c\varrho \\ &= \tfrac{1}{2}(a+b+c)\varrho,\end{aligned}$$

man findet daraus

3) $$\varrho = \frac{2\Delta}{a+b+c},$$

wo man wieder für Δ seinen Werth, ausgedrückt durch a, b und c, setzen könnte. Sind a, b und c gegeben, so findet man immer hiernach den Werth von ϱ, d. h., jedes Dreieck kann als ein Tangentendreieck angesehen werden. (Man vergleiche hiermit die Aufgabe 4. IV. im Anhange zum vorigen Capitel.)

Betrachtet man dagegen ABC als Tangentendreieck zu einem Kreise, welcher AB selbst in E' und die Verlängerungen von AC und BC in D' und F' berührt, so ist die Fläche des Dreiecks ABC gleich der Summe der Flächen von $AN'C$ und $BN'C$ weniger der Fläche von $AN'B$, d. h., für $D'N = E'N = F'N = \varrho_1$ hat man

$$\Delta = \tfrac{1}{2}b\varrho_1 + \tfrac{1}{2}c\varrho_1 - \tfrac{1}{2}a\varrho_1,$$

woraus folgt

4) $$\varrho_1 = \frac{2\Delta}{b+c-a}.$$

Für den Halbmesser ϱ_2 desjenigen Kreises, welcher b

selbst, dagegen von a und c die Verlängerungen berührt, ist ähnlich

5) $$\varrho_2 = \frac{2\Delta}{a+c-b}$$

und für den Halbmesser ϱ_3 des Kreises, welcher c selbst und von a und b die Verlängerungen berührt,

6) $$\varrho_3 = \frac{2\Delta}{a+b-c}.$$

Aus den Formeln 4), 5), 6) ergiebt sich eine elegante Beziehung zwischen den vier Halbmessern ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, nämlich

7) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}.$$

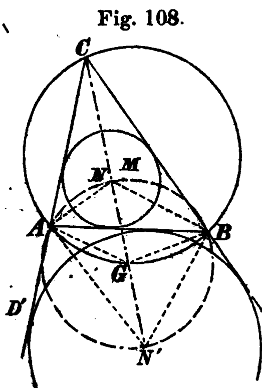
Ebenso leicht findet man noch die schöne Relation

8) $$\Delta = \sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3},$$

die sich ohne Mühe in Worte übersetzen lässt.

III. Betrachten wir endlich ein beliebiges Dreieck ABC, in so fern es zugleich Sehnen- und Tangentendreieck ist. Der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises sei M, der des eingeschriebenen N. Ziehen wir AN und CN, so halbirt die erste dieser Geraden den Winkel A, die zweite den Winkel C; verlängern wir CN bis zum Durchschnitte G mit dem umgeschriebenen Kreise, so muss $Arc\,AG = Arc\,BG$ sein, weil gleichen Peripheriewinkeln ($\angle ACN$ und $\angle BCN$) gleiche Bögen entsprechen. Ziehen wir ferner AG, so ist $\angle BAG = \angle BCG$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen. In dem Dreiecke ANC ist nun der Aussenwinkel

Fig. 108.



$$\angle ANG = \angle ACN + \angle CAN,$$

folglich wegen $\angle ACN = \angle BCG = \angle BAG$ und wegen $\angle CAN = \angle BAN$

$$\angle ANG = \angle BAG + \angle BAN = \angle GAN.$$

Das Dreieck AGN ist demnach gleichschenklig und zwar $GA = GN$. Ebenso leicht lässt sich zeigen, dass $GB = GN$ sein muss, mithin GA, GN, GB als Radien eines

aus G mit dem Halbmesser GA beschriebenen Kreises angesehen werden dürfen. Diese Schlüsse gelten, wie leicht zu sehen ist, auch umgekehrt und liefern ein neues Verfahren, um den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises zu finden, wenn der umschriebene Kreis schon construirt ist. Man halbirt nämlich den Bogen AB in G, zieht CG und beschreibt mit der Sehne GA als Halbmesser aus G einen Kreis, so ist der Durchschnittspunkt desselben mit CG der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises und das Perpendikel von N auf irgend eine Dreiecksseite der Halbmesser. Denn wegen $Arc\, GA = Arc\, GB$ hat man $\angle ACG = \angle BCG = \angle BAG$, und wegen $GN = GA$, $\angle GNA = \angle GAN$. d. i. $\angle ACN + \angle CAN = \angle BAG + \angle BAN$, mithin $\angle CAN = \angle BAN$.

Verlängert man CG bis zum zweiten Durchschnittspunkte N', so ist dieser der Mittelpunkt desjenigen Kreises, welcher AB selbst und von AC, BC die Verlängerungen berührt. Wegen $GA = GN'$ ist nämlich $\angle GN'A = \angle GAN'$; ferner hat man $\angle D'AN' = \angle D'CN' + \angle AN'C = \angle BAG + \angle GAN' = \angle BAN'$, so dass also N' der Durchschnitt der Winkelhalbirungslinien CN' und BN' ist, wie es sein muss.

Suchen wir endlich noch eine Formel für die Entfernung der Mittelpunkte M und N oder M und N' zu gewinnen, wobei $MG = r$, $NE = \varrho$, $N'E' = \varrho'$, $MN = e$ und $MN' = e'$ sein möge. Werden NH und $N'H' \parallel AB$ gezogen, so ist

$$\overline{MN}^2 = \overline{MH}^2 + \overline{NH}^2,$$

d. i.

$$e^2 = (r - GH)^2 + \overline{GN}^2 - \overline{GH}^2$$
$$= r^2 - 2r\,.\,GH + \overline{GN}^2.$$

Verlängern wir GM bis K und ziehen AK, so ist weiter

$$\overline{GN}^2 = \overline{GA}^2 = GK\,.\,GP = 2r\,.\,GP,$$

mithin

$$e^2 = r^2 - 2r\,.\,GH + 2r\,.\,GP$$
$$= r^2 - 2r\,(GH - GP)$$

oder, weil $GH - GP = HP = NE = \varrho$ ist,

$$e^2 = r^2 - 2r\varrho. \qquad 9)$$

Fig. 109.

Ferner hat man in dem rechtwinkligen Dreiecke $MH'N'$

$$\overline{MN'}^2 = \overline{MH'}^2 + \overline{N'H'}^2,$$

d. i.

$$e'^2 = (r + GH')^2 + \overline{GN'}^2 - \overline{GH'}^2$$
$$= r^2 + 2r \,.\, GH' + \overline{GN'}^2.$$

Weiter ist nun

$$\overline{GN'}^2 = \overline{GA}^2 = GK \,.\, GP = 2r \,.\, GP,$$

mithin

$$e'^2 = r^2 + 2r \,.\, GH' + 2r \,.\, GP$$
$$= r^2 + 2r\,(GH' + GP)$$

oder, weil $GH' + GP = H'P = N'E' = \varrho'$ ist,

10) $$e'^2 = r^2 + 2r\varrho',$$

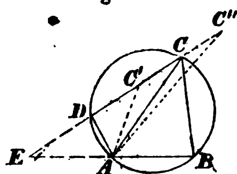
wobei man für ϱ' der Reihe nach die Halbmesser ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 zu setzen hat.

§. 28.

Das Sehnenviereck.

a. Ziehen wir in dem Sehnenviereck $ABCD$ die Diagonale BD, so sind die Viereckswinkel A und C Peripheriewinkel auf entgegengesetzten Seiten der Sehne BD; nach §. 23 folgt hieraus, dass $\angle A + \angle C = 2R$ ist. Andererseits ist $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4R$ und mithin durch Subtraction des Vorigen $\angle B + \angle D = 2R$; d. h.: Die Summe je zweier Gegenwinkel eines Sehnenvierecks beträgt zwei Rechte. Man könnte diesen Satz auch so fassen: Jeder Innenwinkel eines Sehnenvierecks ist gleich dem Aussenwinkel an der Gegenecke.

Fig. 110.

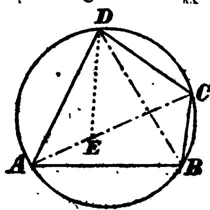


Es ist leicht zu sehen, dass sich dieser Satz auch umkehren lässt, denn wenn in einem Vierecke $(ABCD)$ $\angle A + \angle C = 2R$ ist und man beschreibt durch A, B und D einen Kreis, so geht derselbe entweder durch C oder nicht, in welchem letzteren Falle er die Gerade CD in einem anderen Punkte C' oder C'' schneiden müsste. Dann wäre

$ABC'D$ oder $ABC''D$ ein Sehnenviereck und $\angle A + \angle C' = 2R$ oder $\angle A + \angle C'' = 2R$. Dies verträgt sich aber mit der Voraussetzung $\angle A + \angle C = 2R$ so lange nicht, als C' oder C'' von C verschieden ist (weil weder $\angle C' = \angle C$ noch $\angle C'' = \angle C$ sein kann), und mithin muss der durch A, B und D gezogene Kreis auch durch C gehen. — Diese Umkehrung des Satzes liefert ein Kennzeichen, wonach man sicher beurtheilen kann, um welche Vierecke sich ein Kreis beschreiben lässt (z. B. Rechteck, Quadrat) und um welche nicht (z. B. Rhombus).

b. Ziehen wir in dem Sehnenvierecke $ABCD$ beide Diagonalen AC und BD, so ist $\angle CAD = \angle CBD$ (als Peripheriewinkel), und wenn man jetzt $\angle ADE = \angle BDC$ macht, so entstehen zwei ähnliche Dreiecke AED und BCD. Ferner ist $\angle ABD = \angle ECD$, und da durch die eben erwähnte Construction offenbar $\angle ADB = \angle EDC$ geworden ist, auch $\triangle ABD \sim \triangle ECD$. Dies giebt nachstehende Folgerungen: Wegen $\triangle AED \sim \triangle BCD$ ist

Fig. 111.



$$AE : AD = BC : BD,$$

oder

$$AE \,.\, BD = BC \,.\, AD.$$

Ferner ist wegen $\triangle ECD \sim \triangle ABD$

$$EC : CD = AB : BD,$$

oder

$$EC \,.\, BD = AB \,.\, CD.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen ergiebt sich

$$(AE + EC)\, BD = AB \,.\, CD + BC \,.\, AD,$$

oder

$$AC \,.\, BD = AB \,.\, CD + BC \,.\, AD.$$

Bezeichnen wir die Seiten AB, BC, CD, DA der Reihe nach mit a, b, c, d und die Diagonalen AC, BD mit f, g, so nimmt die vorige Gleichung die elegantere Form an:

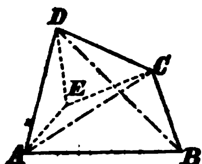
1) $$fg = ac + bd,$$

d. h.: I n j e d e m S e h n e n v i e r e c k e i s t d a s P r o d u c t a u s d e n L ä n g e n z a h l e n d e r D i a g o n a l e n g l e i c h d e r S u m m e d e r P r o d u c t e a u s d e n L ä n g e n z a h l e n d e r

Gegenseiten. Dies ist der sogenannte Ptolemäische Lehrsatz, von welchem der Pythagoräische einen besonderen Fall ausmacht; für ein Rechteck wird nämlich $c = a$, $d = b$, $g = f$ und $f^2 = a^2 + b^2$.

Versucht man es, das Verfahren, mittelst dessen wir zur Gleichung 1) gekommen sind, auf ein dem Kreise nicht eingeschriebenes, mit concaven Winkeln versehenes Viereck $ABCD$ anzuwenden, wo nun aber $\angle DAC$ nicht $= \angle DBC$ ist, so kann man doch $\angle DAE = \angle DBC$ und $\angle ADE = \angle BDC$ machen und dann bleiben die oben aufgestellten Proportionen buchstäblich dieselben. Man findet auch wieder

Fig. 112.



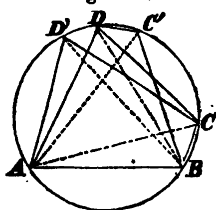
$$(AE + EC)\,BD = AB \,.\, CD + BC \,.\, AD,$$

nur mit dem Unterschiede, dass hier die Punkte A, E und C nicht in einer Geraden liegen. Behält man dieselben Buchstaben wie oben bei, so ist $AE + EC$ nicht gleich f, sondern grösser als f, und wenn wir daher statt $AE + EC$ das kleinere f setzen, so ist jetzt

$$fg < ac + bd.$$

Hieraus folgt, dass der Ptolemäische Satz eben nur für das Sehnenviereck gilt und dass umgekehrt ein Viereck, worin $fg = ac + bd$ ist, nothwendig ein Sehnenviereck sein muss.

Fig. 113.



c. Vertauscht man auf alle mögliche Weise die Seiten eines Sehnenvierecks unter einander, indem man einmal $AD' = CD$ und $AD = CD'$, das andere Mal $BC' = DC$ und $BC = DC'$ macht, so entstehen noch zwei neue Sehnenvierecke $ABCD'$ und $ABC'D$ *),

*) Dass man in der That durch fernere Seitenvertauschungen keine neuen Vierecke weiter erhalten würde, sieht man so. Die möglichen Vertauschungen wären vollständig:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} & c & \\ d & & b \\ & a & \end{array} & \begin{array}{ccc} & d & \\ b & & c \\ & a & \end{array} & \begin{array}{ccc} & b & \\ d & & c \\ & a & \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & c & \\ b & & d \\ & a & \end{array} & \begin{array}{ccc} & d & \\ c & & b \\ & a & \end{array} & \begin{array}{ccc} & b & \\ c & & d \\ & a & \end{array} \end{array}$$

von denen jedes mit dem ursprünglichen Vierecke eine Diagonale gemein hat: jenes AC, dieses BD; zieht man die zwei übrigen Diagonalen AC' und BD', so sind diese einander gleich, weil $BC' = CD' = AD'$ genommen wurde. Wendet man auf jedes der neuen Vierecke den Ptolemäischen Satz an, so ergeben sich die Beziehungen

$$AC \,.\, BD' = AB \,.\, CD' + BC \,.\, AD',$$
$$AC' \,.\, BD = AB \,.\, C'D + BC' \,.\, AD,$$

d. i., wenn die gleichen Linien berücksichtigt werden und $AC' = BD' = h$ gesetzt wird,

2) $$fh = ad + bc,$$

3) $$hg = ab + cd;$$

durch Division beider Gleichungen folgt

4) $$\frac{f}{g} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

womit eine Formel für den Quotienten der Diagonalen f und g gewonnen ist, während der Ptolemäische Satz eine Formel für das Product derselben darstellt.

Multiplicirt man die Gleichungen 1) und 4), so wird

$$f^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd},$$

und durch Ausziehung der Quadratwurzel

5) $$f = \sqrt{\frac{(ac + bd)\,(ad + bc)}{ab + cd}}.$$

Durch Division mit No. 4) in No. 1) erhält man ähnlich eine Gleichung für g^2 und daraus

6) $$g = \sqrt{\frac{(ac + bd)\,(ab + cd)}{ad + bc}}.$$

Die unter einander stehenden Schemata würden aber zu congruenten Vierecken führen; wendet man z. B. das nach dem Schema

$$\begin{matrix} & d & \\ b & & c \\ & a & \end{matrix}$$

gebildete Viereck um, so wird die linke Seite zur rechten und die rechte zur linken; dadurch wird das fragliche Viereck mit dem Vierecke

$$\begin{matrix} & d & \\ c & & b \\ & a & \end{matrix}$$

einerlei, so dass also nur drei wirklich verschiedene Vierecke übrig bleiben.

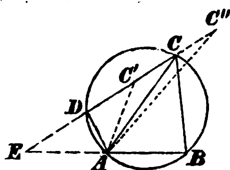
Substituirt man endlich den Werth von f in No. 2) oder den von g in No. 3), so findet man noch

7) $$h = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ab+cd)}{ac+bd}},$$

womit nun alle drei möglichen Diagonalen bestimmt sind.

d. Um die Fläche des Sehnenvierecks aus seinen vier Seiten zu berechnen, verlängern wir die Gegenseiten AB und CD bis zu ihrem Durchschnittspunkte E und betrachten die ähnlichen Dreiecke ADE und CBE, wobei $BE = x$ und $CE = y$ sein möge. Es ist dann

Fig. 114.



$$AD : AE = CB : CE,$$

d. h.

$$d : x - a = b : y$$

und folglich, wenn man das Product der inneren und äusseren Glieder entwickelt,

$$bx - ab = dy$$

oder

8) $$bx - dy = ab.$$

Ebenso hat man die Proportion

$$AD : DE = CB : BE,$$

d. i.

$$d : y - c = b : x$$

und hieraus

$$by - bc = dx$$

oder

9) $$by - dx = bc.$$

Durch Addition der Gleichungen 8) und 9) ergiebt sich unter der Rücksicht, dass $bx + by - dx - dy = (b - d)(x + y)$ ist,

10) $$x + y = b\,\frac{a+c}{b-d}$$

und auf ganz ähnliche Weise durch Subtraction

11) $$x - y = b\,\frac{a-c}{b+d}.$$

Hieraus könnte man x und y selbst sehr leicht finden, doch ist dies für unseren nächsten Zweck nicht nothwendig. Berechnen wir die Fläche des Dreiecks BCE aus seinen drei Seiten $BE = x$, $CE = y$, $BC = b$, so haben wir

$\triangle BCE = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+b)(x+y-b)(x+b-y)(b+y-x)}$,

und hier ist vermöge der Werthe von $x+y$ und $x-y$

$$x+y+b = b\frac{a+c}{b-d} + b = \frac{b}{b-d}(a+c+b-d),$$

$$x+y-b = b\frac{a+c}{b-d} - b = \frac{b}{b-d}(a+c-b+d),$$

$$b+x-y = b+b\frac{a-c}{b+d} = \frac{b}{b+d}(b+d+a-c),$$

$$b+y-x = b-b\frac{a-c}{b+d} = \frac{b}{b+d}(b+d-a+c).$$

Substituiren wir diese Ausdrücke und ordnen die einzelnen Factoren, so wird, nachdem die Wurzel, wo es geht, ausgezogen ist,

$$\triangle BCE = \frac{1}{4}\frac{b^2}{b^2-d^2}\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}$$

oder, wenn die Wurzelgrösse zur Abkürzung mit W bezeichnet wird,

12) $$\triangle BCE = \frac{1}{4}\frac{b^2}{b^2-d^2}W.$$

Da sich die Flächen ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten verhalten, so ist weiter

$$\triangle BCE : \triangle DAE = b^2 : d^2$$

oder

$$\triangle DAE = \frac{d^2}{b^2}\triangle BCE,$$

und wenn man für die Fläche von BCE den in No. 12) gefundenen Werth setzt,

$$\triangle DAE = \frac{1}{4}\frac{b^2}{b^2-d^2}W.$$

Die Fläche des Vierecks $ABCD$, welche V heissen möge, ist nun offenbar $= \triangle BCE - \triangle DAE$, folglich

$$V = \frac{1}{4}\frac{b^2-d^2}{b^2-d^2}W = \frac{1}{4}W,$$

oder vermöge der Bedeutung von W

13) $$V = \frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}.$$

Bezeichnen wir ähnlich wie beim Dreieck die Summe der Seiten $(a+b+c+d)$ mit S, so gewinnt die vorstehende Formel die elegante Gestalt

14) $$V = \sqrt{(\tfrac{1}{2}S-a)(\tfrac{1}{2}S-b)(\tfrac{1}{2}S-c)(\tfrac{1}{2}S-d)},$$

welche mit der für das Dreieck geltenden Formel viel

Aehnlichkeit besitzt. Für $d=0$ erhält man die letztere wieder.

e. Den Halbmesser r des um unser Sehnenviereck beschriebenen Kreises findet man leicht vermittelst der Bemerkung, dass derselbe sowohl dem Dreiecke ABC, welches die Seiten a, b und f besitzt, als dem Dreiecke CDA, welches aus den Seiten c, d und f besteht, umschrieben sein muss. Es gelten daher nach §. 27 Formel 1) die Gleichungen

$$4\,.\,\triangle ABC\,.\,r=abf,$$
$$4\,.\,\triangle CDA\,.\,r=cdf,$$

aus deren Addition die Formel

$$4\,Vr=(ab+cd)\,f=\sqrt{(ab+cd)^2 f^2}$$

hervorgeht; vermöge des Werthes von f^2 verwandelt sich dieselbe in

15) $$4\,V.\,r=\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}.$$

Dividirt man beiderseits mit $4\,V=W$, wobei W dieselbe Bedeutung hat wie vorhin, so erhält man r selbst, nämlich

16) $$r=\sqrt{\frac{(ab+cd)\,(ac+bd)\,(ad+bc)}{(-a+b+c+d)\,(a-b+c+d)\,(a+b-c+d)\,(a+b+c-d)}}.$$

Bemerkenswerth ist die Gleichung 15) noch insofern, als Das, was unter dem Wurzelzeichen steht, gerade das Product $f^2g^2h^2$ ausmacht, wie man vermöge der Werthe von f^2, g^2 und h^2 leicht erkennen wird; man hat daher

$$4\,Vr=fgh \quad\text{oder}\quad V=\frac{fgh}{4r},$$

d. h. die Fläche des Sehnenvierecks ist der Quotient aus dem Producte seiner drei Diagonalen und aus dem doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises.

f. Sind von einem Sehnenvierecke die vier Seiten nebst der Forderung gegeben, daraus das Vieleck selbst zu construiren, so kann man sich der Formeln 10) und 11) zur Lösung dieses Problems bedienen. Bestimmt man nämlich zwei Linien α und β mittelst der Proportionen

$$b-d:a+c=b:\alpha,$$
$$b+d:a-c=b:\beta,$$

so ist

$$\alpha=b\frac{a+c}{b-d}=x+y,$$

$$\beta = b\frac{a-e}{b+d} = x - y,$$

mithin

$$x = BE = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),$$
$$y = CE = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

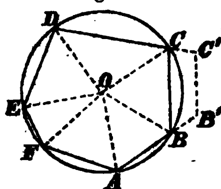
und jetzt kann man das Dreieck BCE aus seinen drei Seiten construiren; schneidet man nachher auf BE die Strecke $BA = a$, auf CF die Strecke $CD = c$ ab und zieht AD, so ist damit das gesuchte Viereck vollendet.

§. 29.

Allgemeine Eigenschaften der Sehnen- und Tangentenvielecke.

I. Verbindet man sämmtliche Ecken eines Sehnenvieleckes durch Gerade mit dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises, so zerfällt das Sehnenvieleck in soviel gleichschenklige Dreiecke, als die Eckenanzahl des Vielecks beträgt; als Beispiel hierzu diene das Sehnensechseck $ABCDEF$. Zugleich wird jeder Winkel des Vielecks in zwei andere zerlegt, wie z. B. $\angle A$ in $\angle OAF = a$ und $\angle OAB = \alpha$, und von den sämmtlichen so entstehenden Winkeln sind immer je zwei, als Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks einander gleich, nämlich $\alpha = b$, $\beta = c$, $\gamma = d$ u. s. w. Schreibt man diese Gleichungen in folgender Form:

Fig. 115.



$$\alpha = b,$$
$$c = \beta,$$
$$\gamma = d,$$
$$e = \delta,$$
$$\varepsilon = f,$$
$$a = \varphi,$$

und addirt hierauf unter der Bemerkung, dass

$$a + \alpha = A, \quad c + \gamma = C, \quad e + \varepsilon = E,$$
$$b + \beta = B, \quad d + \delta = D, \quad f + \varphi = F$$

ist, so erhält man ohne Weiteres die Gleichung

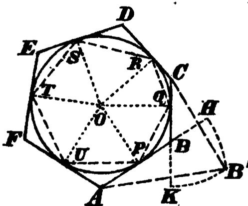
$$A + C + E = B + D + F.$$

Es erhellt sehr leicht, dass ganz dieselbe Betrachtungsweise auf jedes Sehnenvieleck anwendbar ist, welches eine gerade Anzahl von Seiten besitzt, und dass man folglich den Satz aufstellen kann: In jedem Sehnenvielecke von gerader Seitenzahl ist die Summe des ersten, dritten, fünften u. s. w. Winkels gleich der Summe des zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Winkels.

Für das Viereck gilt, wie wir gesehen haben, dieser Satz auch umgekehrt, für ein beliebiges Vieleck von gerader Seitenzahl dagegen nicht. Denn setzt man auf eine Seite des Vielecks, etwa BC, ein Trapez $BCC'B'$ so auf, dass die nicht parallelen Seiten desselben in die Verlängerungen der Seiten AB und DC fallen, so hat das neue Vieleck $AB'C'DEF$ ebenso viel Seiten als das ursprüngliche, und da $B = B'$ und $C = C'$, so ist auch $A + C' + E = B' + D + F$; trotz dieser Eigenschaft lässt sich aber um das neue Vieleck kein Kreis beschreiben, weil es sonst zwei verschiedene Kreise geben müsste, welche durch dieselben drei Punkte, etwa D, E und F, hindurchgingen.

II. Zieht man in einem Tangentenvielecke Radien nach den Berührungspunkten der Seiten und verbindet die Berührungspunkte unter einander, so entsteht ein Sehnenvieleck, das durch jene Radien in gleichschenklige Dreiecke zerlegt ist. Es entsteht auf diese Weise aus dem Tangentensechseck $ABCDEF$ das Sehnensechseck $PQRSTU$; hier ist z. B. POQ ein gleichschenkliges Dreieck, also $\angle OPQ = \angle OQP$, und mithin, wenn man beide Winkel von einem rechten Winkel abzieht, $\angle BPQ = \angle BQP$; daraus folgt, dass auch das Dreieck BPQ gleichschenklig, nämlich $BP = BQ$ ist. Dieselbe Betrachtung wiederholt sich an jeder Ecke und wir sehen daher, dass je zwei in einer Ecke zusammenstossende Abschnitte zweier Nachbarseiten einander gleich sind, nämlich $AU = AP$, $BP = BQ$, $CQ = CR$ u. s. f. Nennen wir diese Abschnitte AP, BP, BQ, CQ, CR, DR u. s. w.

Fig. 116.



der Reihe nach $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ u. s. w., so haben wir die Gleichungen

$$\alpha = b,$$
$$c = \beta,$$
$$\gamma = d,$$
$$e = \delta,$$
$$\varepsilon = f,$$
$$a = \varphi.$$

Addiren wir dieselben unter der Rücksicht, dass

$$a + \alpha = AB, \quad c + \gamma = CD, \quad e + \varepsilon = EF,$$
$$b + \beta = BC, \quad d + \delta = DE, \quad f + \varphi = FA$$

ist, so gelangen wir zu der Gleichung

$$AB + CD + EF = BC + DE + FA.$$

Es erhellt leicht, dass dieselbe Betrachtungsweise auf jedes Tangentenvieleck anwendbar ist, welches eine gerade Anzahl von Seiten besitzt, und dass man folglich den Satz aufstellen kann: In jedem Tangentenvielecke von gerader Seitenzahl ist die Summe der ersten, dritten, fünften u. s. w. Seite gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Seite.

Für das Viereck gilt dieser Satz auch umgekehrt, wie man durch eine einfache Betrachtung leicht finden wird, für ein beliebiges Tangentenvieleck von gerader Seitenzahl dagegen nicht. Denn verlängert man zwei in einer Ecke zusammenstossende Seiten des Vielecks, etwa AB und CB, um gleichviel, nämlich $BH = BK$, über B hinaus, und beschreibt aus A und C mit den Halbmessern AH und CK ein Paar Bögen, die sich in B' schneiden, so hat das neue Vieleck $AB'CDEF$ noch immer die Eigenschaft $AB' + CD + EF = B'C + DE + FA$, ohne jedoch ein Tangentenvieleck zu sein, da es nur einen einzigen Kreis giebt, welcher drei Seiten des Vielecks, wie z. B. CD, DE und EF, berührt.

§. 30.

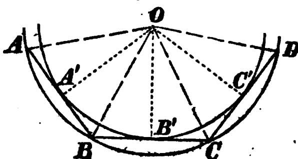
Die Construction der regelmässigen Vielecke in und um den Kreis.

Unter den unregelmässigen Vielecken ist das Dreieck das einzige, in und um welches sich jederzeit ein Kreis

beschreiben lässt, ein Vieleck dagegen kann nur unter besondern Umständen so beschaffen sein, dass entweder ein Kreis in oder um dasselbe möglich ist. Es giebt aber eine ganze Klasse von Vielecken, welche zugleich als Sehnen- und als Tangentenvielecke angesehen werden können, nämlich die regelmässigen Vielecke.

Ist $ABCD..$ ein Theil von dem Umfange eines regelmässigen Vielecks, so lässt sich zunächst ein Kreis beschreiben, welcher durch drei auf einander folgende Ecken

Fig. 117.



A, B, C geht und dessen Mittelpunkt O sein möge; wenn ferner die Halbmesser AO, BO, CO gezogen werden, so sind die Dreiecke AOB und BOC congruent, woraus $\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB = \frac{1}{2} \angle ABC$ folgt. Andererseits ist wegen der vorausgesetzten Regelmässigkeit des Vielecks $\angle ABC = \angle BCD$, mithin $\angle OCB = \frac{1}{2} \angle BCD$, folglich auch $\angle OCD = \frac{1}{2} \angle BCD$. Aus $\angle OCB = \angle OCD$, aus $OC = OC$ und $BC = CD$ zusammen ergiebt sich aber die Congruenz der Dreiecke BOC und COD und daraus $OD = OC$; der durch drei Ecken A, B, C beschriebene Kreis geht also auch durch die vierte Ecke D, folglich, weil er durch B, C, D geht, auch durch E u. s. w., d. h. er geht durch sämmtliche Ecken des Vielecks.

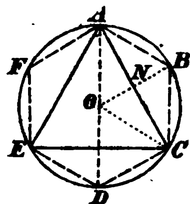
Das eben Bewiesene giebt zu erkennen, dass die Seiten unseres Vielecks als Sehnen, und zwar, weil sie gleich sind, als gleiche Sehnen eines Kreises angesehen werden dürfen. Aus diesem Grunde haben sie von dem Mittelpunkte O gleiche Entfernung und die Senkrechten OA', OB', OC' u. s. w. sind mithin einander gleich. Man kann daher aus O einen Kreis beschreiben, welcher durch die Punkte A', B', C' u. s. w. geht und die Vielecksseiten in diesen Punkten berührt. — Fassen wir das Bisherige zusammen, so haben wir den Satz: **Jedes regelmässige Vieleck ist zugleich Sehnen- und Tangentenvieleck.**

Die Winkel AOB, BOC, COD u. s. w. und ebenso die Winkel $A'OB'$, $B'OC'$ u. s. w. sind, wie man ohne Mühe erkennen wird, einander gleich und man kann daher einen solchen Winkel den Centriwinkel des regelmässigen Viel-

ecks nennen. Hat dasselbe n Seiten, so ist jener Winkel $= \frac{4}{n} R$ oder $= \frac{360^0}{n}$ und hiernach lässt sich der Centriwinkel im Voraus durch Rechnung bestimmen. Kennt man aber den Centriwinkel eines regulären Vielecks, so ist es sehr leicht, ein solches in oder um einen gegebenen Kreis zu beschreiben. Man trägt nämlich den Centriwinkel soviel mal, als das Vieleck Seiten hat, an den Mittelpunkt des gegebenen Kreises an und verbindet darauf die Punkte A, B, C . . , in welchen die Schenkel den Umfang schneiden, durch gerade Linien, wenn man ein Sehnenvieleck haben will, dagegen legt man an diesen Punkten Tangenten an den Kreis, wenn ein umschriebenes Vieleck entstehen soll. — Es giebt übrigens einige Fälle, in welchen der Centriwinkel sich nicht nur berechnen, sondern auch geometrisch construiren lässt, und diese Fälle wollen wir noch besonders betrachten.

Das regelmässige Sehnen- und Tangentendreieck. Für $n = 3$ finden wir $\frac{360^0}{n} = 120^0$ als Centriwinkel des regelmässigen Dreiecks; da dieser Winkel das Doppelte von 60^0, d. h. von einem Winkel im gleichseitigen Dreiecke ausmacht, so erhält man den gesuchten Centriwinkel, wenn man ein gleichseitiges Dreieck construirt, dessen eine Spitze in den Mittelpunkt des gegebenen Kreises fällt, und darauf den am Centrum liegenden Dreieckswinkel verdoppelt. Am bequemsten ist es, gleich den Kreishalbmesser selbst zur Seite jenes gleichseitigen Dreiecks, also $AB = AO$ zu nehmen, wodurch $\angle AOB = 60^0$ wird. Nimmt man darauf weiter $BC = AC$, so ist $\angle AOC = 2 \angle AOB = 120^0$, mithin AOC der gesuchte Centriwinkel und AC eine Seite des fraglichen Dreiecks, welches nun leicht vollendet werden kann, indem man $CE = AC$ macht, wodurch von selbst $AE = AC$ wird.

Fig. 118.



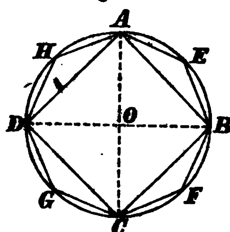
Nimmt man $AO = AB = BC = CD = DE = EF$, so ist jeder der Winkel AOB, BOC, COD, DOE, EOF gleich 60^0,

mithin $\angle FOA = 360^\circ - 5 . 60^\circ = 60^\circ$ und folglich *ABCDEF* das regelmässige Sechseck im Kreise.

Denkt man sich die Winkel *AOB*, *BOC* u. s. w. durch Halbmesser halbirt und die Endpunkte dieser Halbmesser durch Sehnen verbunden, so entsteht ein regelmässiges Vieleck, dessen Centriwinkel $= 30^\circ$ ist; man erhält so das regelmässige Zwölfeck. Zugleich erhellt, dass man durch weitere Halbirung der Centriwinkel fernere regelmässige Vielecke construiren kann, welche der Reihe nach 24, 48, 96 u. s. w. Ecken besitzen.

Das regelmässige Viereck im Kreise. Der Fall, wo $n = 4$, ist einer der einfachsten, die es geben kann, denn es wird in diesem Falle der Centriwinkel $= \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ und also braucht man, um ihn darzustellen, nur einen Durchmesser *AC* zu ziehen und in dem Mittelpunkte desselben eine Senkrechte *BOD* zu errichten; *ABCD* ist dann das gesuchte regelmässige Sehnenviereck.

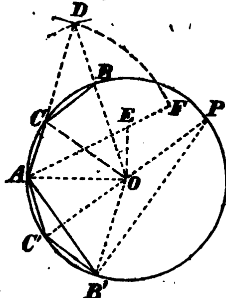
Fig. 119.



Auch hier kann man, wie vorhin, durch fortgesetzte Halbirung des Centriwinkels zu neuen regelmässigen Vielecken gelangen, welche der Reihe nach 8, 16, 32, 64 ... Ecken besitzen. So ist z. B. *ABCDEFGH* das regelmässige Achteck im Kreise.

Das regelmässige Sehnenfünfeck. Für $n = 5$ erhält der Centriwinkel den Werth $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ und dieser Winkel besitzt eine Eigenthümlichkeit, welche seine Construction sehr leicht macht. Denken wir uns nämlich ein gleichschenkliges Dreieck *AOD* construirt, worin der Winkel *AOD* gleich dem Centriwinkel 72° ist, so beträgt der Winkel an der Spitze dieses Dreiecks $180^\circ - 2 . 72^\circ = 36^\circ$, d. h. gerade die Hälfte des Winkels an der Basis. Liesse sich nun aus

Fig. 120.



diesem Verhältnisse der Winkel unseres Dreiecks das Verhältniss seiner Seiten ableiten, so würde man $AD = OD$ finden können, sobald der Halbmesser $AO = r$ gegeben ist, und die Construction des Dreiecks AOD führte dann unmittelbar zu der des regulären Fünfecks.

Ziehen wir den Halbmesser OC nach dem Punkte C, in welchem AD den Kreis schneidet, so ist AOC ein gleichschenkliges Dreieck, und weil $\angle OAC$ der vorigen Construction zufolge $= \angle AOD$ war, auch $\angle AOC = \angle ADO = 36^0$ $= \frac{1}{2} \angle AOD$; weiter folgt hieraus $\angle COD = \frac{1}{2} \angle AOD = \angle CDO$ und also $CD = CO = AO = r$. Nennen wir x die Linie AD, so haben wir wegen $\triangle ADO \sim \triangle AOC$

$$AD : AO = AO : AC,$$

d. h., weil $AC = AD - CD = AD - AO = x - r$ ist,

$$x : r = r : x - r,$$

und daraus folgt für x die quadratische Gleichung

$$x^2 - rx = r^2.$$

Durch Auflösung derselben findet sich

$$x = \tfrac{1}{2}r + \sqrt{r^2 + (\tfrac{1}{2}r)^2},$$

und dieser Ausdruck ist sehr leicht zu construiren, indem man die Gerade $OE = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}r$ senkrecht auf AO stellt, die Hypotenuse AE zieht und sie so weit verlängert, dass $EF = EO = \frac{1}{2}r$ wird; AF ist dann die gesuchte Linie $x = AD$ $= OD$. Construirt man jetzt das gleichschenklige Dreieck AOD, so ist $\angle AOD$ der gesuchte Centriwinkel und AB würde demnach die Seite des regelmässigen Fünfecks sein.

Da $\angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB$ ist, so folgt hieraus noch, dass $\angle AOC$ der Centriwinkel des regelmässigen Zehnecks, mithin AC die Seite desselben sein muss. Man erhält also durch die vorige Construction die Seiten des Fünfecks und Zehnecks gleichzeitig.

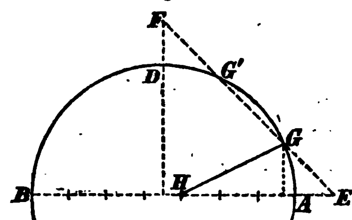
Halbirt man den Centriwinkel des Zehnecks, so erhält man den Centriwinkel des Zwanzigecks; nochmalige Halbirung giebt den Centriwinkel des Vierzigecks u. s. w.

Aus der Bemerkung, dass $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ ist, folgt noch, dass man das reguläre Fünfzehneck beschreiben kann, indem man den Centriwinkel des Zehnecks vom Centriwinkel des Sechsecks subtrahirt; die successive Halbirung

dieses Centriwinkels $\frac{360^0}{15} = 24^0$ führt dann weiter zur Construction des regelmässigen Dreissigecks, Sechzigecks u. s. f.

Die hier entwickelten Constructionen regelmässiger Vielecke sind die einzigen, welche sich mit den Hilfsmitteln, die wir bisher kennen gelernt haben, ausführen lassen; will man dagegen keine vollkommen genauen Constructionen, sondern blos solche, bei denen ein so kleiner Fehler statt findet, dass er für praktische Zeichnungen unbemerkbar ist, so bediene man sich des nachstehenden Verfahrens, dessen grosse Annäherung an die Wahrheit in dem folgenden Buche nachgewiesen werden soll.

Fig. 121.



Es sei AB der Durchmesser des gegebenen Kreises und CD ein darauf senkrecht gestellter Halbmesser. Um in diesen Kreis ein regelmässiges n-Eck zu beschreiben, theile man den Durchmesser AB in n gleiche Theile (in der Figur ist $n = 7$ genommen), verlängere sowohl den Durchmesser als den Halbmesser um einen solchen Theil $AE = DF = \frac{1}{n} AB$ und ziehe die Gerade EF, welche den Kreis zum ersten Male in G schneidet. Dann ist die Gerade zwischen G und dem dritten Theilungspunkte H sehr nahe gleich der Seite des regelmässigen n-Ecks. Für $n = 3$ und $n = 4$ giebt die Construction etwas Unmögliches, für $n = 5$ etwas wegen seiner Ungenauigkeit nicht Brauchbares, für $n > 5$ dagegen empfiehlt sich die Construction durch ihren hohen Grad von Genauigkeit.

§. 31.

Die Berechnung der regelmässigen Sehnen- und Tangentenvielecke.

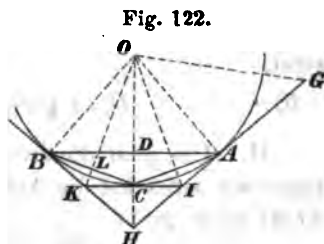
Wenn der Halbmesser r eines Kreises, in oder um welchen ein regelmässiges Vieleck beschrieben werden soll, und die Seitenzahl n des letzteren gegeben sind, so müssen sich daraus alle Bestandtheile des fraglichen Vielecks

berechnen lassen, weil die Aufgabe eine völlig bestimmte ist. Von diesen Bestandtheilen des Vielecks betrachten wir nun folgende:

die Seite des regelmässigen Sehnenvielecks: s_n,
" " " " Tangentenvielecks: t_n,
den Umfang des regelmässigen Sehnenvielecks: e_n,
" " " " Tangentenvielecks: u_n,
die Fläche des regelmässigen Sehnenvielecks: E_n,
" " " " Tangentenvielecks: U_n,

wobei durch den anhangenden Buchstaben n deutlich bezeichnet ist, dass das in Rede stehende Vieleck n Seiten besitzt. Es sind nun für die Berechnung dieser Grössen zwei Bemerkungen von Gewicht, einmal, dass man aus s_n die übrigen Grössen t_n, e_n u. s. w. und zweitens aus diesen wieder die Grössen s_{2n}, t_{2n}, e_{2n}, u_{2n}, E_{2n}, U_{2n} ableiten kann, welche für das $2n$-Eck Dasselbe bedeuten, wie s_n, t_n u. s. w. für das n-Eck. Mit dieser doppelten Ableitung beschäftigen wir uns zunächst.

Fig. 122.



Hier möge AB die Sehne des regelmässigen Sehnenvielecks von n Seiten, also $AB = s_n$ sein; legen wir durch A und B Tangenten an den Kreis, welche sich in H schneiden, so ist AH die Hälfte von der Seite des umschriebenen n-Ecks oder $AH = \frac{1}{2} t_n$ und $2AH = GH = t_n$; halbiren wir ferner den Winkel AOB durch die Gerade OC, ziehen AC, BC und durch C die Tangente IK, so ist weiter $AC = s_{2n}$ und $IK = t_{2n}$. Zuvörderst haben wir nun vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke ODA und OAH

$$OD : DA = OA : AH,$$

d. i.

$$\sqrt{r^2 - (\tfrac{1}{2}s_n)^2} : \tfrac{1}{2}s_n = r : \tfrac{1}{2}t_n,$$

und finden hieraus ohne Mühe

1) $$t_n = \frac{r s_n}{\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2}s_n)^2}}.$$

Da ferner der Umfang e_n aus n Seiten besteht, von denen jede $= s_n$ ist, so erhalten wir

2) $$e_n = ns_n$$

und aus ganz demselben Grunde

3) $$u_n = nt_n = \frac{nrs_n}{\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2}s_n)^2}} = \frac{re_n}{\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2}s_n)^2}}.$$

Um weiter E_n zu erhalten, brauchen wir nur zu berücksichtigen, dass die Fläche des Dreiecks AOB offenbar $= \frac{1}{n} E_n$ sein muss und andererseits $\triangle AOB = \frac{1}{2} AB \,.\, DO$ ist, woraus zusammen die Gleichung

$$\frac{1}{n} E_n = \tfrac{1}{2} s_n \sqrt{r^2 - (\tfrac{1}{2} s_n)^2}$$

folgt, die unmittelbar zur Kenntniss von E_n führt, nämlich

4) $$E_n = \tfrac{1}{2} ns_n \sqrt{r^2 - (\tfrac{1}{2} s_n)^2} = \tfrac{1}{2} \frac{nr(s_n)^2}{t_n}.$$

Die Fläche U_n endlich findet sich aus der Bemerkung, dass die Fläche des Dreiecks $GOH = \frac{1}{n} U_n$ und ausserdem $= \frac{1}{2} GH \,.\, AO$ ist; dies giebt nämlich die Gleichung

$$\frac{1}{n} U_n = \tfrac{1}{2} t_n r$$

oder, wenn man mit n multiplizirt und für t_n seinen Werth setzt,

5) $$U_n = \tfrac{1}{2} nrt_n = \tfrac{1}{2} \frac{nr^2 s_n}{\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2} s_n)^2}}.$$

II. Um jetzt die zweite Aufgabe zu lösen, berücksichtigen wir zunächst die Aehnlichkeit der Dreiecke BDH und KCH; diese giebt

$$BD : BH = KC : KH,$$

d. h.

$$\tfrac{1}{2} s_n : \tfrac{1}{2} t_n = \tfrac{1}{2} t_{2n} : \tfrac{1}{2} t_n - \tfrac{1}{2} t_{2n};$$

diese Proportion führt unmittelbar zu der Gleichung

$$t_n t_{2n} = s_n t_n - s_n t_{2n}$$

und daraus findet man sehr leicht

6) $$t_{2n} = \frac{s_n t_n}{s_n + t_n}.$$

Da sich ferner im Punkte B die Sehne BA und die Tangente BH schneiden, so ist der Winkel ABH gleich dem Peripheriewinkel über dem Bogen AB oder gleich dem Centriwinkel über dem halben Bogen BC, also $\angle ABH = \angle BOC$; aus demselben Grunde ist $\angle CBH = \angle BOK$ und, da $\angle BOK = \frac{1}{2} \angle BOC$, auch $\angle CBH = \frac{1}{2} \angle ABH$, woraus hervorgeht,

Fig. 122.

dass die Gerade BC den Winkel DBK halbirt. Nennen wir L den Durchschnitt der auf einander senkrechten Geraden BC und OK, so folgt jetzt $\triangle CBD \sim \triangle KBL$ und daraus

$$BD : BC = BL : BK,$$

d. h.

$$\tfrac{1}{2} s_n : s_{2n} = \tfrac{1}{2} s_{2n} : \tfrac{1}{2} t_{2n}.$$

Dies giebt durch Multiplication der inneren sowohl als der äusseren Glieder und durch nachherige Wurzelausziehung

$$7) \qquad s_{2n} = \sqrt{\tfrac{1}{2} s_n t_{2n}},$$

und wenn man für t_n seinen Werth aus No. 6) setzt, so hat man zur Berechnung von s_{2n} und t_{2n} die beiden Formeln:

$$8) \qquad s_{2n} = \frac{s_n \sqrt{t_n}}{\sqrt{2(s_n + t_n)}}, \quad t_{2n} = \frac{s_n t_n}{s_n + t_n}.$$

Für die Praxis wird es jedoch bequemer sein, erst t_{2n} mittelst der Formel 6) und dann s_{2n} nach No. 7) zu berechnen.

Aus den Formeln 2) und 3) folgt unmittelbar

$$s_n = \frac{1}{n} e_n, \quad t_n = \frac{1}{n} u_n,$$

und ganz entsprechend

$$s_{2n} = \frac{1}{2n} e_{2n}, \quad t_{2n} = \frac{1}{2n} u_{2n}.$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gleichungen 6) und 7) führt sogleich zu den Formeln:

$$9) \qquad u_{2n} = \frac{2 e_n u_n}{e_n + u_n}, \quad e_{2n} = \sqrt{e_n u_{2n}},$$

oder, wenn man e_{2n} zuerst berechnen wollte,

$$10) \qquad e_{2n} = e_n \sqrt{\frac{2 u_n}{e_n + u_n}}, \quad u_{2n} = \frac{2 e_n u_n}{e_n + u_n}.$$

Um endlich die entsprechendon Formeln für die Flächen E_n, U_n, E_{2n} und U_{2n} zu erhalten, bemerken wir, dass das Dreieck AOC einerseits $= \tfrac{1}{2} OC \,.\, AD = \tfrac{1}{2} r \,.\, \tfrac{1}{2} s_n$, andererseits aber $= \frac{1}{2n} E_{2n}$ ist, woraus folgt

$$\tfrac{1}{4} r s_n = \frac{1}{2n} E_{2n}$$

oder

$$ns_n = \frac{2E_{2n}}{r},$$

d. h.

$$e_n = \frac{2E_{2n}}{r}.$$

Ferner ist $\triangle\, GOH$ einerseits $= \frac{1}{2} AO \,.\, GH = \frac{1}{2} rt_n$ und andererseits $= \frac{1}{n} U_n$, was zusammen die Gleichungen giebt:

$$\tfrac{1}{2} rt_n = \frac{1}{n} U_n$$

oder

$$nt_n = \frac{2U_n}{r},$$

d. h.

$$u_n = \frac{2U_n}{r}.$$

Substituiren wir diese Werthe von e_n und u_n in die zweite der unter No. 9) aufgeführten Gleichungen, so wird

$$E_{4n} = \sqrt{E_{2n} U_{2n}}$$

oder, wenn wir n an die Stelle von $2n$ treten lassen,

11) $$E_{2n} = \sqrt{E_n U_n}.$$

Ebenso leicht ergiebt sich aus der ersten Formel in No. 9)

12) $$U_{2n} = \frac{2E_{2n} U_n}{E_{2n} + U_n},$$

der man noch durch Multiplication des Zählers und Nenners mit E_n die folgenden Gestalten geben kann:

$$U_{2n} = \frac{2E_n E_2 U_n}{E_n E_{2n} + E_n U_n} = \frac{2E_n E_{2n} U_n}{E_n E_{2n} + (E_{2n})^2},$$

d. i. nach Hebung mit E_{2n}

13) $$U_{2n} = \frac{2E_n U_n}{E_n + E_{2n}},$$

wobei die letzte Form in so fern bequemer ist, als das Produkt $E_n U_n$ schon in No. 11) benutzt war.

III. Nach den Vorbereitungen, die wir so eben beendigt haben, hat die vollständige Berechnung derjenigen regelmässigen Vielecke, welche sich überhaupt construiren lassen, keine Schwierigkeit mehr, wie die folgenden einzelnen Fälle zeigen werden.

Die Seite des regelmässigen Sechsecks im Kreise ist unmittelbar bekannt, nämlich $s_6 = r$; daraus findet sich

aber sogleich die Seite des regelmässigen Dreiecks, wenn man berücksichtigt, dass

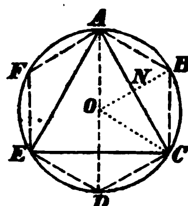


Fig. 123.

$$\overline{AN}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BN}^2,$$

d. h.

$$(\tfrac{1}{2}s_3)^2 = r^2 - (\tfrac{1}{2}r)^2 = \tfrac{3}{4}r^2$$

ist; dies giebt zunächst s_3 und dann t_3, e_3, u_3 u. s. w., nämlich

$$s_3 = r\sqrt{3},\quad t_3 = 2r\sqrt{3},$$
$$e_3 = 3r\sqrt{3},\quad u_3 = 6r\sqrt{3},$$
$$E_3 = \tfrac{3}{4}r^2\sqrt{3},\quad U_3 = 3r^2\sqrt{3}.$$

Ebenso leicht findet man aus $s_6 = r$

$$s_6 = r,\quad t_6 = \tfrac{2}{3}r\sqrt{3},$$
$$e_6 = 6r,\quad u_6 = 4r\sqrt{3},$$
$$E_6 = \tfrac{3}{2}r^2\sqrt{3},\quad U_6 = 2r^2\sqrt{3}.$$

Für das regelmässige Sehnenviereck ist

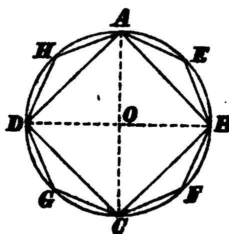


Fig. 124.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = 2\overline{AO}^2,$$

d. i.

$$(s_4)^2 = 2r^2,$$

und hieraus findet man

$$s_4 = r\sqrt{2},\quad t_4 = 2r,$$
$$e_4 = 4r\sqrt{2},\quad u_4 = 8r,$$
$$E_4 = 2r^2,\quad U_4 = 4r^2;$$

die Formeln 6), 7), 8) u. s. w. geben dann

$$s_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}},\quad t_8 = 2r\,(\sqrt{2}-1),$$
$$e_8 = 8r\sqrt{2-\sqrt{2}},\quad u_8 = 16r\,(\sqrt{2}-1),$$
$$E_8 = 2r^2\sqrt{2},\quad U_8 = 8r^2(\sqrt{2}-1).$$

Sehr leicht ist ferner die Seite des regelmässigen Sehnenfünfecks zu finden, wenn man von der Seite des Sehnenzehnecks ausgeht. Es ist nämlich dem vorigen Paragraphen zufolge AC die Seite des regelmässigen Zehnecks, mithin $= AD - CD = x - r$ nach der dortigen Bezeichnung, und vermöge des Werthes von x

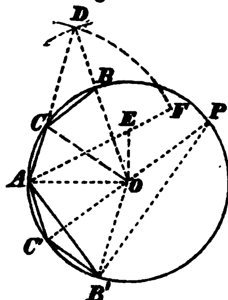


Fig. 125.

$$AC = s_{10} = \sqrt{r^2 + (\tfrac{1}{2}r)^2} - \tfrac{1}{2}r = r\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Hieraus ergiebt sich s_5 sogleich, wenn man berücksichtigt, dass in voriger Figur, wo $AB' = AB$ und $AC' = AC$, $C'O$ bis P verlängert und $B'P$ gezogen ist, die Gleichung

$$C'P \,.\, B'N = B'C' \,.\, B'P$$

statt findet, welche nach unserer Bezeichnung in

$$2r \,.\, \tfrac{1}{2}s_5 = s_{10} \,.\, \sqrt{4r^2 - (s_{10})^2}$$

übergeht; vermöge des Werthes von s_{10} findet sich hieraus

$$s_5 = \tfrac{1}{2}r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad t_5 = 5r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}},$$
$$e_5 = \tfrac{5}{2}r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad u_5 = 10r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}},$$
$$E_5 = \tfrac{5}{8}r^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad U_5 = 5r^2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}.$$

Ganz ähnlich erhält man

$$s_{10} = \tfrac{1}{2}r\ \sqrt{5} - 1), \qquad t_{10} = 2r\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}},$$
$$e_{10} = 5r(\sqrt{5} - 1), \qquad u_{10} = 20r\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}},$$
$$E_{10} = \tfrac{5}{4}r^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad U_{10} = 10r^2\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Bemerkenswerth ist hier noch eine Beziehung zwischen s_5, s_{10} und r; man hat nämlich

$$(s_5)^2 - (s_{10})^2 = \tfrac{1}{4}r^2\,[(10 - 2\sqrt{5}) - (5 - 2\sqrt{5} + 1)] = r^2,$$

was sich leicht in Worte fassen lässt. Hieraus wird man leicht eine andere Construction für das Fünfeck und Zehneck ableiten, indem man

$$s_{10} = \sqrt{r^2 + (\tfrac{1}{2}r)^2} - \tfrac{1}{2}r$$

zuerst darstellt und mittelst der vorigen Beziehung s_5 daraus bestimmt.

Cap. VII.

Rectification und Quadratur des Kreises.

---

§. 32.

Die Rectification des Kreises.

Da der Halbmesser eines Kreises zur Bestimmung des letzteren hinreicht, so folgt von selbst, dass auch der Kreisumfang seiner Grösse oder Länge nach vollkommen bestimmt sein muss, sobald der Radius gegeben ist; es müssen demnach die Längen des Halbmessers und des Umfanges in einem gewissen Verhältnisse zu einander stehen, dessen Ausmittelung die Rectification des Kreises genannt zu werden pflegt. Obgleich nun bei dieser Untersuchung die Schwierigkeit statt findet, dass hier ungleichartige Grössen, nämlich eine gerade und eine krumme Linie, mit einander verglichen werden sollen, so bemerkt man doch leicht ein Mittel zur Lösung der Aufgabe. Beschreibt man nämlich in und um den Kreis regelmässige Vielecke von immer grösseren Seitenzahlen, so schmiegen sich jene Vielecke offenbar um so genauer dem Kreise an, je grösser die Seitenzahlen sind, und daher müssen die Umfänge zweier regulären Vielecke von grossen Seitenzahlen dem Kreisumfange ziemlich nahe kommen. Wir wollen nun zuerst untersuchen, in wie fern diese, vorläufig blos nach dem Augenscheine gemachte Bemerkung richtig ist, und wenden uns zu diesem Zwecke an die Formeln:

1) $$u_{2n} = \frac{2e_n u_n}{e_n + u_n} \text{ und } e_{2n} = \sqrt{e_n u_{2n}}.$$

Zunächst ist leicht zu sehen, dass die Seite des regelmässigen Tangentenvielecks von n Seiten grösser als die Seite des zugehörigen Sehnenvielecks oder $t_n > s_n$ sein muss; denn setzen wir in der Formel

$$t_n = \frac{r s_n}{\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2} s_n)^2}}$$

für die Wurzel rechter Hand die Grösse r, was offenbar mehr als der ursprüngliche Nenner ist, so haben wir

$$\frac{r s_n}{\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2} s_n)^2}} > \frac{r s_n}{r}, \text{ d. h. } t_n > s_n.$$

Hieraus folgt weiter $n t_n > n s_n$, d. i. $u_n > e_n$, dass also auch der Umfang des umschriebenen regelmässigen n-Ecks grösser als der Umfang des eingeschriebenen n-Ecks ist. Setzen wir nun im Nenner der ersten Formel in No. 1) für e_n das zu grosse u_n, so folgt

$$\frac{2 e_n u_n}{e_n + u_n} > \frac{2 e_n u_n}{u_n + u_n}$$

oder

2) $$u_{2n} > e_n,$$

und wenn wir in derselben Formel im Nenner an die Stelle von u_n das zu kleine e_n setzen,

$$\frac{2 e_n u_n}{e_n + u_n} < \frac{2 e_n u_n}{e_n + e_n},$$

d. i.

3) $$u_{2n} < u_n \text{ oder } u_n > u_{2n}.$$

Benutzen wir ferner die Ungleichung 2) für die zweite Formel in No. 1), so ist

$$\sqrt{e_n u_{2n}} > \sqrt{e_n e_n},$$

d. h.

4) $$e_{2n} > e_n \text{ oder } e_n < e_{2n}.$$

Mehrmals nach einander angewendet führen die Ungleichungen 3) und 4) zu den Beziehungen

$$u_n > u_{2n} > u_{4n} > u_{8n} \ldots,$$
$$e_n < e_{2n} < e_{4n} < e_{8n} \ldots,$$

d. h.: Wenn man die Seitenzahlen der regelmässigen Tangenten- und Sehnenvielecke fortwährend verdoppelt, so nehmen die Umfänge der ersten immer ab und die der zweiten immer zu.

Wie gross nun auch die Seitenzahl eines Tangentenvielecks sein möge, so liegt dessen Umfang doch jederzeit ausserhalb des Kreises und kann folglich nicht auf einen blossen Punkt zusammenschrumpfen; die Abnahme des Umfanges kann daher auch nicht ins Unbegränzte fortgehen, wie z. B. die Abnahme der Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ u. s. w.; ebenso wenig ist es möglich, dass die Zunahme der Um-

fänge der Sehnenvielecke ins Unendliche hinausgehe, wie z. B. bei den Zahlen 2, 4, 8, 16 u. s. w., weil der Umfang jedes Sehnenvielecks offenbar kleiner als der Kreisumfang sein muss, welcher letztere, so unbekannt er auch ist, doch jedenfalls nur eine endliche bestimmte Grösse haben kann. Aus beiden Bemerkungen zusammen folgt die wichtige Wahrheit: Die Umfänge der Tangentenvielecke nähern sich durch Abnahme einer bestimmten Gränze und ebenso nähern sich die Umfänge der Sehnenvielecke durch Zunahme einer gleichfalls bestimmten Gränze.

Nennen wir p den Gränzwerth, welchem sich u_n bei fortwährend wachsenden n nähert, und ebenso q den Gränzwerth von e_n, so wäre jetzt weiter zu untersuchen, ob p und q von einander verschieden sind oder nicht. Nun ist aber nach der Formel 3) des vorigen Paragraphen

$$\frac{u_n}{e_n} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2} s_n)^2}},$$

und daran knüpft sich folgende Bemerkung. Wenn der Kreisumfang in n gleiche Theile getheilt wird, so kann ein solcher Theil so klein, als man nur will, gemacht werden, wenn man nur die Anzahl n jener Theile hinreichend gross nimmt; dasselbe gilt um so mehr von der Sehne eines solchen Bogens, weil dieselbe kleiner als der Bogen ist; für unendlich wachsende n sinkt also s_n und noch mehr $\frac{1}{2}s_n$ unter jede angebbare Kleinheit herab und nähert sich der Gränze Null. Daraus folgt unmittelbar, dass $\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2} s_n)^2}$ der Gränze $\sqrt{r^2} = r$ so nahe, als es beliebt, gebracht werden kann, und wenn man nun zu den Gränzen selbst übergeht, so verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{r} = 1,$$

woraus $q = p$ folgt; in Worten heisst dies: Die Umfänge der Tangenten- und der Sehnenvielecke nähern sich, jene durch Abnahme, diese durch Zunahme, einer gemeinschaftlichen Gränze.

Welche nun diese Gränze p sei erhellt auf der Stelle, wenn man sich erinnert, dass der Umfang des Tangentenvielecks immer ausserhalb des Kreises und der Umfang

des Sehnenvielecks immer innerhalb des Kreises, oder umgekehrt der Kreisumfang **zwischen** jenen Umfängen liegt. Die gemeinschaftliche Gränze nämlich, welcher beide Umfänge zueilen, kann nur der Umfang des Kreises sein, denn sonst müsste der unmögliche Fall eintreten, dass von irgend einer Stelle an der Kreisumfang nicht mehr zwischen jenen Umfängen enthalten wäre. Hiermit sind wir zu der wissenschaftlichen Ueberzeugung von der Richtigkeit des anfangs ausgesprochenen Gedankens gelangt und es bedarf jetzt nur noch der wirklichen Berechnung zweier regelmässigen Vierecke von grosser Seitenzahl. Geht man vom Sechseck aus und berechnet der Reihe nach e_6, u_6, e_{12}, u_{12}, e_{24}, u_{24} u. s. w., so gelangt man zu folgenden Zahlen:

n	e_n	u_n
6	$2r \cdot 3$	$2r \cdot 3,4641016$
12	$2r \cdot 3,1058285$	$2r \cdot 3,2153903$
24	$2r \cdot 3,1326286$	$2r \cdot 3,1596599$
48	$2r \cdot 3,1393502$	$2r \cdot 3,1460862$
96	$2r : 3,1410319$	$2r \cdot 3,1427146$
192	$2r \cdot 3,1414524$	$2r \cdot 3,1418730$
384	$2r \cdot 3,1415576$	$2r \cdot 3,1416627$
768	$2r \cdot 3,1415838$	$2r \cdot 3,1416101$
1536	$2r \cdot 3,1415904$	$2r \cdot 3,1415970$
3072	$2r \cdot 3,1415921$	$2r \cdot 3,1415937$
6144	$2r \cdot 3,1415925$	$2r \cdot 3,1415929$
12288	$2r \cdot 3,1415926$	$2r \cdot 3,1415927$
	u. s. w.	

Da der Kreisumfang p zwischen je zwei in einer Zeile neben einander stehenden Zahlen enthalten sein muss, so lassen sich so genaue Gränzen für denselben angeben, als man es nur wünscht; so ist z. B.

$$p > 2r \cdot 3,1415926,$$
$$q < 2r \cdot 3,1415927,$$

oder, wenn wir das Verhältniss $\frac{p}{2r}$ mit π bezeichnen, auf sechs Dezimalen genau

5) $$p = 2r \,.\, \pi\,, \quad \pi = 3{,}1415926\ldots$$

Die Zahl π, welche hier vorkommt und das Verhältniss zwischen dem Umfange und Durchmesser eines Kreises ausdrückt, pflegt man nach einem ihrer ersten Berechner die Ludolph'sche Zahl zu nennen; genauer ist dieselbe:

6) $$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ldots,$$

was jedoch nur wissenschaftlichen Werth hat, da man für praktische Anwendungen mit einer geringeren Zahl Decimalen oder mit dem Verhältnisse $\frac{355}{113}$, welches in sechs Stellen mit dem Obigen übereinstimmt, vollkommen ausreicht.

Will man umgekehrt aus dem Umfange eines Kreises seinen Durchmesser oder Halbmesser berechnen, so hat man als leichte Folge von No. 5)

7) $$2r = \frac{p}{\pi}, \quad r = \frac{p}{2\pi}$$

und dabei ist

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31830\ 98861\ 83790\ 67153\ldots$$

Setzt man in der Formel $r = \frac{p}{2\pi}$ an die Stelle von p die Gradezahl von 360° der Peripherie, so erhält man auch r in Graden ausgedrückt, d. h. man bekommt statt r einen Bogen, welcher mit dem Halbmesser gleiche Länge besitzt; braucht man den Buchstaben ϱ zur Bezeichnung dieses Bogens; so ist

$$\varrho = \frac{360^0}{2\pi} = \frac{180^0}{\pi} = 57^0\,17'\,44'',8\,.$$

§. 33.

Die Rectification beliebiger Bögen.

Da zwei Bögen eines und desselben Kreises gleichartige Grössen sind, so lässt sich das Verhältniss derselben mittelst des Verfahrens auffinden, welches wir in §. 14 zur

Bestimmung des Verhältnisses zweier Geraden benutzt haben, und in der That würde man alles dort Gesagte hier wörtlich und nur mit dem Unterschiede wiederholen können, dass man an die Stelle von „Gerade“ das Wort „Kreisbogen“ treten liesse. Weil ferner zu gleichen Bögen auch gleiche Centriwinkel gehören, so lassen sich die Centriwinkel auf ganz dieselbe Weise behandeln und ebenso oft von einander wegnehmen als die entsprechenden Bögen; das Ergebniss muss daher bei dieser Vergleichung nothwendig dasselbe wie bei der vorigen sein, und wir haben deshalb den Satz: Zwei Bögen eines und desselben Kreises verhalten sich wie die zugehörigen Centriwinkel.

Nennen wir also b und β zwei Bögen eines Kreises und c, γ die entsprechenden Centriwinkel, so ist

$$c:\gamma = b:\beta,$$

und daraus geht hervor, dass man die Länge jedes beliebigen zu γ gehörigen Bogens β finden kann, sobald die Länge b eines bestimmten zu c gehörenden Bogens bekannt ist. Nach dem Vorigen kennen wir aber die Länge b für den Fall $c = 360^0$, denn in diesem Falle ist $b = 2r\pi$, mithin haben wir, wenn γ in Graden ausgedrückt wird,

$$360^0 : \gamma^0 = 2r\pi : \gamma,$$

und wenn wir hieraus β bestimmen,

$$1) \qquad \beta = \frac{\gamma\pi}{180} r.$$

Die häufig vorkommende Rechnung nach dieser Formel wird am bequemsten ausgeführt, wenn man ein- für allemal die Länge der Bögen von einem Grade, einer Minute und einer Secunde bestimmt, indem man für γ der Reihe nach 1^0, $1' = \frac{1^0}{60}$ und $1'' = \frac{1^0}{3600}$ setzt; man erhält so

$$Arc\,1^0 = \frac{\pi}{180} r = r \,.\, 0{,}01745\,32925\ldots,$$

$$Arc\,1' = \frac{Arc\,1^0}{60} = r \,.\, 0{,}00029\,08882\ldots,$$

$$Arc\,1'' = \frac{Arc\,1'}{60} = r \,.\, 0{,}00000\,48481\ldots.$$

Hieraus setzt man leicht die Länge jedes Bogens zusammen, der in Graden, Minuten und Secunden gegeben ist.

Behalten wir wie im vorigen Paragraphen die Bezeichnung $\frac{180^0}{\pi} = \varrho$ bei, so gestaltet sich die Formel 1) wie folgt:

2) $$\beta = \frac{\gamma}{\varrho} r,$$

wo es am bequemsten ist, ϱ in Secunden auszudrücken, nämlich $\varrho = 206246'', 8$; verwandelt man auch den Centriwinkel γ in Secunden und dividirt darauf mit 206246,8, so erhält man auf diese Weise gleichfalls die Länge des Bogens $Arc\ \gamma$, was in manchen Fällen bequemer sein kann als das vorige Verfahren.

§. 34.

Die Quadratur des Kreises und beliebiger Ausschnitte desselben.

Sowie sich die Umfänge der regelmässigen Sehnen- und Tangentenvielecke dem Kreisumfange desto enger anschmiegen, je grösser die Seitenzahl ist, so kommen auch die Flächen der genannten Vielecke der Kreisfläche immer näher. Zunächst erhellt nämlich sehr leicht, dass $U_{2n} < U_n$ und $E_{2n} > E_n$ sein muss, weil die mit U_{2n} bezeichnete Fläche ganz innerhalb der Flächen U_n und ebenso E_n völlig innerhalb der Fläche E_{2n} liegt; es finden daher auch hier die Beziehungen

$$U_n > U_{2n} > U_{4n} > U_{8n} \ldots,$$
$$E_n < E_{2n} < E_{4n} < E_{8n} \ldots,$$

statt, welche eine successive Abnahme der umschriebenen und eine beständige Zunahme der eingeschriebenen Vielecksflächen beurkunden. Jene Abnahme kann aber ebenso wenig wie diese Zunahme in's Unbegränzte gehen, da U_n jedenfalls grösser und E_n ebenso entschieden kleiner als die Kreisfläche bleiben muss, und wir schliessen daraus, dass sich U_n durch Abnahme einer bestimmten Gränze nähern müsse und ebenso E_n durch Zunahme gleichfalls einer bestimmten Gränze. Um beurtheilen zu können, ob diese beiden Gränzen verschieden sind oder nicht, benutzen wir die Gleichungen 5) und 4) in §. 31, aus welchen sich ergiebt

$$\frac{U_n}{E_n} = \frac{r^2}{r^2 - (\frac{1}{2} s_n)^2}.$$

Lassen wir hier die Seitenzahl n unendlich wachsen, so kann s_n kleiner als jede noch so kleine angebbare Zahl werden, und daraus erhellt, dass sich der Quotient $U_n : E_n$ der Gränze 1 nähert und dass mithin der Gränzwerth von U_n dem Gränzwerthe von E_n gleich sein muss. Da die Fläche des Kreises, welche K heissen möge, jederzeit zwischen U_n und E_n enthalten ist, so kann die gemeinschaftliche Gränze der U_n und E_n von K nicht verschieden sein, weil es sonst eine Stelle geben müsste, von welcher ab K nicht mehr zwischen E_n und U_n läge.

Nach diesen Bemerkungen ist es sehr leicht, eine Formel für den Flächeninhalt des Kreises zu entwickeln; aus der Gleichung $U_n = \frac{1}{2} r n t_n = r u_n$ folgt nämlich, wenn man n in's Unendliche zunehmen lässt und berücksichtigt, dass sich u_n der Gränze $2r\pi$ und U_n der Gränze K nähert,

1) $$K = \tfrac{1}{2} r \,.\, 2r\pi = r^2\pi,$$

was man in folgendem Lehrsatze aussprechen kann: Die Fläche eines Kreises ist gleich der Fläche eines Dreiecks, welches den Kreisumfang zur Grundlinie und den Kreishalbmesser zur Höhe hat.

Da sich ein Dreieck leicht in ein Quadrat von gleicher Fläche verwandeln lässt, so ist jetzt auch die Aufgabe gelöst: „den Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln“, welche man die Quadratur des Kreises zu nennen pflegt. Bezeichnen wir mit q die Seite dieses Quadrates, so wäre $q^2 = r^2\pi$, also ist $q = r\sqrt{\pi}$ und dabei in Zahlen

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77245\ 38509\ 05516\ 02729.$$

Um die Fläche eines Kreisausschnittes, d. h. einer von zwei Halbmessern und einem Bogen des Kreises begränzten Figur, zu finden, bedarf es vorerst der Bemerkung, dass ein solcher Sector durch den Centriwinkel, welchen die beiden Halbmesser einschliessen, vollkommen bestimmt ist, oder dass zu gleichen Centriwinkeln in einem und demselben Kreise immer gleiche Kreisausschnitte gehören. So oft sich also zwei Centriwinkel von einander wegnehmen lassen, ebenso oft kann man den einen Sector von dem

andern wegnehmen, und hieraus schliesst man leicht, dass die Vergleichung zweier Sectoren das nämliche Resultat geben muss, wie die Vergleichung ihrer Centriwinkel, oder dass sich in demselben Kreise zwei Sectoren ebenso wie ihre Centriwinkel verhalten. Nennen wir S die Fläche eines mit dem Centriwinkel γ^0 versehenen Sectors und berücksichtigen, dass dem Centriwinkel 360^0 der Sector $r^2\pi$, nämlich der ganze Kreis entspricht, so ist

$$360^0 : \gamma^0 = r^2\pi : S,$$

und daraus folgt unmittelbar

2) $$S = \frac{\gamma\pi}{360} r^2$$

oder, wenn die Gleichung $\frac{\gamma\pi}{360} r = \frac{\beta}{2}$ aus §. 33 hiermit verbunden wird,

3) $$S = \tfrac{1}{2}\beta r,$$

d. h.: Die Fläche eines Kreisausschnittes ist einem Dreiecke gleich, welches den Bogen des Sectors zur Grundlinie und den Halbmesser desselben zur Höhe hat.

Setzt man statt β den Werth $\frac{\gamma}{\varrho} r$, wie wir in der Formel 2) §. 33 gefunden haben, so ist noch

4) $$S = \frac{\gamma}{2\varrho} r^2.$$

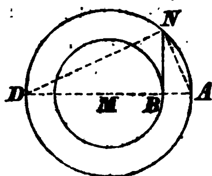
Will man z. B. denjenigen Sector, dessen Fläche gleich dem Quadrate des Kreishalbmessers ist, so muss $S = r^2$, also $\gamma = 2\varrho = 114^0\,35'\,29'',6$ sein.

Ein paar Anwendungen, welche sich noch von der Formel 1) machen lassen, sind folgende: Um einen und denselben Mittelpunkt seien mit den Halbmessern r und ϱ Kreise beschrieben, so ist die von ihnen eingeschlossene ringförmige Fläche F

$$F = r^2\pi - \varrho^2\pi = (r^2 - \varrho^2)\,\pi$$
$$= [\sqrt{(r+\varrho)\,(r-\varrho)}]^2\pi,$$

also gleich der Fläche eines Kreises, der den Halbmesser $\sqrt{(r+\varrho)\,(r-\varrho)}$ besitzt, oder dessen Halbmesser die mittlere Proportionale zwischen der Summe und Differenz der

Fig. 126.



beiden Halbmesser des Ringes ausmacht. BN ist, senkrecht auf AB, der Halbmesser dieses Kreises, weil BN die mittlere Proportionale zwischen $BD = r + \varrho$ und $BA = r - \varrho$ sein muss.

Beschreibt man mit den drei Seiten a, b, c eines rechtwinkligen Dreiecks, als Halbmesser genommen, Kreise, so sind die Flächen der letzteren $a^2\pi$, $b^2\pi$, $c^2\pi$; dem Pythagoräischen Satze zufolge ist aber, wenn c die Hypotenuse bezeichnet, $c^2 = a^2 + b^2$, mithin auch $c^2\pi = a^2\pi + b^2\pi$, d. h. der mit der Hypotenuse beschriebene Kreis ist so gross, als die mit den Katheten beschriebenen Kreise zusammen. Dasselbe gilt, wie man leicht bemerken wird, ebenso, wenn man die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks nicht zu Radien, sondern zu Durchmessern dreier Kreise nimmt.

§. 35.
Näherungsconstructionen zur Rectification und Quadratur des Kreises.

Da sich mit Hilfe der höheren Mathematik nachweisen lässt, dass eine geometrische Construction, welche den Umfang oder die Fläche eines Kreises in völliger Genauigkeit angäbe, nicht möglich ist, so muss man sich damit begnügen, solche Constructionen aufzufinden, mit deren Hilfe näherungsweise der Umfang eines Kreises in eine Gerade oder seine Fläche in ein Quadrat verwandelt werden kann. Wie man zu solchen Constructionen kommen kann, zeigen die nachfolgenden Entwickelungen.

a) Man findet leicht:

$$\frac{9+\sqrt{45}}{5} = \frac{15{,}7082039}{5} = 3{,}1416407,$$

was von π nicht sehr verschieden ist, so dass man also näherungsweise die Peripherie

1) $$p = \frac{9+\sqrt{45}}{5}\,2r = \frac{9+\sqrt{45}}{5}\,d$$

setzen könnte, wenn d den Durchmesser des Kreises bezeichnet. Dies führt nun unter der Bemerkung, dass man statt der obigen Gleichung setzen kann

$$p = \tfrac{6}{5}d + \tfrac{3}{5}d + \sqrt{(\tfrac{6}{5}d)^2 + (\tfrac{3}{5}d)^2},$$

zur folgenden Construction: Man theilt den Durchmesser d in fünf gleiche Theile und zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten $\frac{6}{5}d$ und $\frac{3}{5}d$ sind, so ist der Umfang dieses Dreiecks nahe gleich dem Umfange des gegebenen Kreises.

Umgekehrt folgt aus der Gleichung 1)

$$d = \frac{5}{9+\sqrt{45}}p = 5 \,.\, \frac{9-\sqrt{45}}{36}p$$
$$= \tfrac{5}{4} \cdot \frac{9-\sqrt{45}}{9}p = \tfrac{5}{4}\left(1 - \sqrt{\tfrac{5}{9}}\right)p,$$

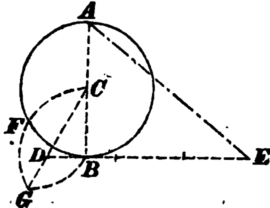
oder endlich

$$d = \tfrac{5}{4}\left\{p - \sqrt{(\tfrac{2}{5}p)^2 + (\tfrac{1}{5}p)^2}\right\}.$$

Will man also den Durchmesser desjenigen Kreises aufsuchen, welcher einen gegebenen Umfang p hat, so construirt man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten $\frac{2}{5}p$ und $\frac{1}{5}p$ sind, zieht die Hypotenuse dieses Dreiecks von p ab und vergrössert den Rest um seinen vierten Theil, so ist dieser vergrösserte Rest nahe gleich dem gesuchten Durchmesser.

b) Etwas weniger genau ist die folgende Construction, welche sich aber dadurch auszeichnet, dass man sie mit einer und derselben Zirkelöffnung ausführen kann. Man legt nämlich eine Tangente DE an den Kreis und durch den Berührungspunkt einen Durchmesser AB. Aus dem Punkte B schlägt man mit dem Halbmesser BC einen Bogen, welcher den Kreis in F schneidet, ferner aus F wieder einen gleichen Bogen, der den vorigen in G trifft; die Punkte C und G verbindet man durch eine Gerade, welche die Tangente in D kreuzt. Nimmt man jetzt von D aus die Strecke DE gleich dem dreifachen Halbmesser des Kreises und zieht AE, so ist diese Gerade nahe gleich dem halben Kreisumfange. Man hat nämlich, weil BCD die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks ausmacht,

Fig. 127.



$BD = \frac{1}{2}CD = r\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}r\sqrt{12}$, $BE = 3r - \frac{1}{6}r\sqrt{12}$, mithin

$$\overline{AE}^2 = \tfrac{1}{36} \cdot 12r^2 + (3 - \tfrac{1}{6}\sqrt{12})^2\, r^2$$
$$= (13\tfrac{1}{3} - \sqrt{12})\, r^2,$$
$$AE = r\sqrt{13\tfrac{1}{3} - \sqrt{12}}$$

oder, numerisch berechnet,

$$AE = r \,.\, 3{,}1415333,$$

oder beinahe $AE = r \,.\, \pi = \frac{1}{2} \,.\, 2r\pi = \frac{1}{2}p$.

c) Eine Construction zur Quadratur des Kreises ergiebt sich aus der Bemerkung, dass $\sqrt{30} + \sqrt{150} = 17{,}7246743$, also nicht sehr verschieden von $10\sqrt{\pi}$ ist. Die Seite q eines Quadrates, welches mit dem Kreise gleichen Flächeninhalt besitzt, wird aber bekanntlich durch $r\sqrt{\pi}$ ausgedrückt, daher ist näherungsweis

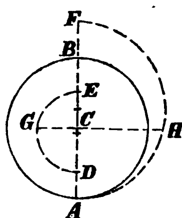
$$q = r\sqrt{\pi} = \frac{r}{10}(\sqrt{30} + \sqrt{150})$$
$$= r\sqrt{\tfrac{3}{10}} + r\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

oder

$$q = \sqrt{\tfrac{3}{5}r \,.\, \tfrac{1}{2}r} + \sqrt{r \,.\, \tfrac{3}{2}r},$$

was sich folgendermaassen construiren lässt: Es sei AB der Durchmesser des gegebenen Kreises und im Mittelpunkte C stehe eine Gerade GH senkrecht auf AB; man theile den Halbmesser AC in fünf gleiche Theile, wovon AD zwei sein mögen, man halbire ferner BC in E und mache $BF = BE$. Beschreibt man über DE einen Halbkreis, welcher GH in G schneidet, und ebenso über AF einen Halbkreis, welcher GH in H trifft, so ist GH nahe gleich der Seite desjenigen Quadrates, welches mit dem Kreise gleiche Fläche besitzt.

Fig. 128.



d) Erinnert man sich, dass, wenn $q^2 = r^2\pi$ gesetzt wird,

$$q = \sqrt{r^2\pi} = \sqrt{\tfrac{1}{2}pr}$$

sein muss, so kann man auch dadurch zur Quadratur des Kreises kommen, dass man erst den halben Umfang des Kreises ($\frac{1}{2}p$) construirt (z. B. nach *b*) und darauf zwischen $\frac{1}{2}p$ und r die mittlere Proportionale sucht.

Anhang zu Cap. VII.

Näherungsformeln für die Ludolph'sche Zahl.

Da der Umfang eines mit dem Radius $r = 1$ beschriebenen Kreises 2π Längeneinheiten und seine Fläche π Flächeneinheiten zählt, so kann man bei der Berechnung der Ludolph'schen Zahl ebensowohl von den Perimetern als von den Inhalten der ein- und umgeschriebenen Vielecke ausgehen; in jenem Falle betrachtet man 2π als den Gränzwerth von e_n und u_n, in diesem Falle π als gemeinschaftliche Gränze von E_n und U_n. Die letztere Berechnungsweise wollen wir noch zeigen und dabei die Gränzen, zwischen denen π liegt, so eng als möglich ziehen.

Um den bekannten Formeln

$$E_{2n} = \sqrt{E_n U_n}, \quad U_{2n} = \frac{2 E_{2n} U_n}{E_{2n} + U_n}$$

eine bequemere Gestalt zu verleihen, bezeichnen wir die reciproken Werthe von E und U mit E' und U', setzen also

$$\frac{1}{E_n} = E'_n, \quad \frac{1}{U_n} = U'_n$$

und erhalten auf diese Weise

1) $$E'_{2n} = \sqrt{E'_n U'_n}, \quad U'_{2n} = \tfrac{1}{2}(E'_{2n} + U'_n).$$

Lassen wir an die Stelle des geometrischen Mittels das grössere arithmetische Mittel treten, so gehen die vorigen Beziehungen in die folgenden über:

$$E'_{2n} < \tfrac{1}{2}(E'_n + U'_n), \quad U'_{2n} = \tfrac{1}{2}(E'_{2n} + U'_n),$$

oder wenn U'_n für den Augenblick $= a$ und $E'_n = a + d$ gesetzt wird

$$E'_{2n} < a + \tfrac{1}{2}d, \quad U'_{2n} = \tfrac{1}{2}(E'_{2n} + a),$$

d. i., indem man für E'_{2n} rechter Hand das zu grosse $a + \frac{1}{2}d$ nimmt,

$$E'_{2n} < a + \tfrac{1}{2}d, \quad U'_{2n} < a + \tfrac{1}{4}d.$$

Auf gleiche Weise hat man weiter

$$E'_{4n} < \tfrac{1}{2}(E'_{2n} + U'_{2n}), \quad U'_{4n} = \tfrac{1}{2}(E'_{4n} + U'_{2n})$$

und indem man überall die zu grossen Werthe einsetzt

$$E'_{4n} < a + \tfrac{1}{4} d + \tfrac{1}{8} d, \quad U'_{4n} < a + \tfrac{1}{4} d + \tfrac{1}{16} d.$$

Aus den Beziehungen

$$E'_{8n} < \tfrac{1}{2} (E'_{4n} + U'_{4n}), \quad U'_{8n} = \tfrac{1}{2} (E'_{8n} + U'_{4n})$$

findet man nach demselben Verfahren

$$E'_{8n} < a + \tfrac{1}{4} d + \tfrac{1}{16} d + \tfrac{1}{32} d,$$
$$U'_{8n} < a + \tfrac{1}{4} d + \tfrac{1}{16} d + \tfrac{1}{64} d.$$

Indem man auf diesem Wege bis zur gemeinschaftlichen Gränze von E' und U', nämlich bis zu $\frac{1}{\pi}$ fortgeht, erhält man die Ungleichung

$$\frac{1}{\pi} < a + \tfrac{1}{4} d + \tfrac{1}{16} d + \tfrac{1}{64} d + \tfrac{1}{256} d + \ldots$$

und durch Summirung der Reihe $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$

$$\frac{1}{\pi} < a + \tfrac{1}{3} d.$$

Vermöge der Bedeutung von a und d ist dies soviel wie

$$\frac{1}{\pi} < U'_n + \tfrac{1}{3} (E'_n - U'_n),$$

oder wenn man die Werthe von E_n und U'_n einsetzt und umkehrt

2) $$\pi > \frac{E_n U_n}{E_n + \frac{1}{3} (U_n - E_n)}.$$

Eine analoge Ungleichung ergiebt sich aus den Gleichungen 1), wenn man das arithmetische Mittel durch das kleinere geometrische ersetzt; es ist dann

$$E'_{2n} = \sqrt{E'_n U'_n}, \quad U'_{2n} > \sqrt{E'_{2n} U'_n},$$

oder wenn man die Logarithmen nimmt,

$$\log E'_{2n} = \tfrac{1}{2} (\log E'_n + \log U'_n), \quad \log E'_{2n} > \tfrac{1}{2} (\log E'_{2n} + \log U'_n).$$

Bezeichnet man überhaupt $\log E'$ mit E'', so kann man die Ungleichungen

$$E''_{2n} = \tfrac{1}{2} (E''_n + U''_n), \quad U''_n > \tfrac{1}{2} (E''_{2n} + U''_n)$$

auf gleiche Weise wie die früheren behandeln. Man findet nämlich für $U''_n = \alpha, \quad E''_n = \alpha + \delta$

$$E''_{2n} = \alpha + \tfrac{1}{2} \delta, \qquad U''_{2n} > \alpha + \tfrac{1}{4} \delta,$$
$$E''_{4n} > \alpha + \tfrac{1}{4} \delta + \tfrac{1}{8} \delta, \quad U'_{4n} > \alpha + \tfrac{1}{4} \delta + \tfrac{1}{16} \delta,$$

u. s. w.;

der gemeinschaftliche Gränzwerth ist

$$\log \left(\frac{1}{\pi}\right) > \alpha + \tfrac{1}{4} \delta + \tfrac{1}{16} \delta + \tfrac{1}{64} \delta + \ldots$$

oder

$$log\left(\frac{1}{\pi}\right) > \alpha + \tfrac{1}{3}\delta.$$

Setzt man die Werthe von α und δ wieder ein, nämlich

$$\alpha = log\ U'_n = log\left(\frac{1}{U_n}\right)$$

$$\delta = log\,E'_n - log\ U'_n = log\left(\frac{U_n}{E_n}\right)$$

und geht von den Logarithmen zu den Zahlen zurück, so ergiebt sich

3) $$\pi < \sqrt[3]{E_n U_n^2}.$$

Die in den Ungleichungen 2) und 3) angegebenen Gränzen sind die engsten, welche sich auf diesem Wege finden lassen; will man sich aber mit einer geringeren Genauigkeit begnügen, so kann man aus 2) und 3) neue Ungleichungen dadurch bilden, dass man $U_n - E_n = \tau$ setzt und die Ausdrücke

$$\frac{E_n(E_n + \tau)}{E_n + \frac{1}{3}\tau}, \quad \sqrt[3]{(U_n - \tau)\,U_n^2}$$

in Reihen verwandelt, welche nach Potenzen von τ fortschreiten; man findet so, indem man die mit τ^2 versehenen Glieder nicht überschreitet,

4) $$\pi > U_n - \tfrac{1}{3}(U_n - E_n) - \tfrac{2}{9}\frac{(U_n - E_n)^2}{E_n},$$

5) $$\pi < U_n - \tfrac{1}{3}(U_n - E_n) - \tfrac{1}{9}\frac{(U_n - E_n)^2}{U_n}.$$

Für $n = 128$ z. B. geben diese Ungleichungen schon sechs richtige Decimalen für π.

Drückt man in den Formeln 2), 3), 4) und 5) E_n und U_n durch e_n und u_n aus, so erhält man entsprechende Ungleichungen, in denen die Umfänge der Vielecke vorkommen.

DRITTES BUCH.

Ebene Trigonometrie.

Cap. VIII.

Die trigonometrischen Functionen.

§. 36.

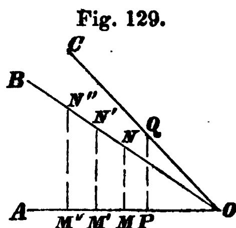
Die Bestimmung der Winkel.

In dem Capitel über den Zusammenhang unter den Bestandtheilen geradliniger Gebilde haben wir gesehen, dass es jederzeit möglich ist, ein Vieleck zu construiren, sobald eine hinreichende Anzahl seiner Bestandtheile (Linien und Winkel) gegeben sind. Diese Angabe der einzelnen Stücke kann auf doppelte Weise geschehen, entweder nämlich werden die betreffenden Linien und Winkel geradezu selber vorgelegt, oder nur ihre Maasse angegeben, indem man von den Linien ihre, auf ein bestimmtes Längenmaass bezogenen Längenzahlen und von den Winkeln die Anzahl der Grade, Minuten u. s. w. nennt, welche sie umfassen. Im ersteren Falle liesse sich die Construction unmittelbar anwenden, im zweiten Falle dagegen müsste man die Linien erst durch Abtragung mittelst eines Maasstabes und die Winkel durch mechanische Theilung des Kreises zur Anschauung bringen, ehe man zur Construction des Vielecks schreiten könnte; wollte man aber die gesuchten Stücke ebenfalls in Zahlen ausgedrückt haben, so würden die durch Construction gewonnenen Linien und Winkel am Ende noch

zu messen sein. Es bedarf wohl kaum besonderer Hervorhebung, dass dieses Verfahren ebenso umständlich als ungenau ist und dass es daher im höchsten Grade wünschenswerth wäre, eine Methode zu besitzen, nach welcher man aus den in Zahlen gegebenen hinreichenden Bestandtheilen eines Vielecks die übrigen Stücke unmittelbar berechnen könnte; eine solche Methode enthält nun derjenige Theil der Geometrie, welcher den Namen Trigonometrie führt.

Da sowohl unter den gegebenen als unter den gesuchten Stücken eines Vielecks Winkel vorkommen können, so muss die erste Frage sein, wie man Winkel in Rechnung zu bringen habe; diese Frage wird sogleich bestimmter, wenn man sich erinnert, dass in den zu erfindenden Rechnungen Linien und Winkel zugleich behandelt werden müssen, dass man also genöthigt ist, ungleichartige Grössen mit einander zu verbinden. Ein Grundgesetz der Grössenlehre sagt aber, dass sich nur gleichartige Dinge vergleichen lassen, und da hier gerade das Entgegengesetzte geleistet werden soll, so muss zwischen Linien und Winkeln eine Vermittelung getroffen werden, d. h. man muss darauf ausgehen, die Winkel durch Linien zu messen. Auf welche Weise dieser Gedanke ausführbar ist, zeigt die folgende Betrachtung.

Fig. 129.



Es sei $\angle AOB = u$ ein beliebiger Winkel; auf dem einen Schenkel BO desselben sind beliebige Punkte N, N', N'' etc. angenommen und von demselben Senkrechte NM, $N'M'$ etc. auf den andern Schenkel AO herabgelassen. Es entstehen durch diese Construction lauter ähnliche Dreiecke MNO, $M'N'O$ etc., in welchen die Seitenverhältnisse immer dieselben sind, also die Gleichungen

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OM'}{ON'} = \frac{OM''}{ON''} \cdots\cdots$$

statt finden. Das Verhältniss der anliegenden Kathete zur Hypotenuse bleibt demnach immer dasselbe, man mag den Punkt N annehmen, wo man will, und wenn der Winkel u

eine bestimmte Grösse hat, so muss auch dieses Verhältniss einen bestimmten Werth besitzen; so ist z. B. für $u = 45^0$

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OM'}{ON'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und ebenso leicht findet man für $u = 60^0$

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OM'}{ON'} = \tfrac{1}{2}.$$

Aendert sich der Winkel u, so wird auch jenes Verhältniss ein anderes, denn sollte für den Winkel AOC dasselbe Verhältniss statt finden, also

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OP}{OQ} \text{ oder } OM : ON = OP : OQ$$

sein, so würde aus der Gleichheit dieses Verhältnisses und aus der Gleichheit der Winkel OMN und OPQ folgen, dass die Dreiecke MNO und PQO ähnlich wären, dies gäbe dann $\angle MON = \angle POQ$, was der Voraussetzung widerspricht. Der Winkel u und jenes Seitenverhältniss stehen also in einem solchen gegenseitigen Zusammenhange, dass jedem bestimmten spitzen Winkel ein bestimmtes derartiges Verhältniss entspricht und dass umgekehrt zu jedem solchen Verhältnisse ein ganz bestimmter Winkel gehört. Man kann demnach Winkel mittelbar in Rechnung bringen, indem man für sie die genannten Seitenverhältnisse als Stellvertreter benutzt. Wegen dieser Wichtigkeit hat man dem obigen Verhältnisse einen bestimmten Namen gegeben, und zwar heisst der Quotient $\frac{OM}{ON}$ der Cosinus des Winkels u, in Zeichen

1) $$\frac{OM}{ON} = \cos u.$$

Denken wir uns einen spitzen Winkel immer als Winkel in einem rechtwinkligen Dreiecke, so haben wir die Definition: Der Cosinus eines Winkels ist das Verhältniss der ihm anliegenden Kathete zur Hypotenuse.

Dasselbe, was von dem so eben besprochenen Verhältnisse zweier Seiten des rechtwinkligen Dreiecks MNO gilt, ist wörtlich auf das Verhältniss jeder zwei andern Seiten desselben anwendbar, und so wie jenes Verhältniss zur Bestimmung des Winkels MON diente, so kann auch jedes

andere Seitenverhältniss zu demselben Zwecke benutzt werden. Man hat daher auch für die übrigen Seitenverhältnisse besondere Namen eingeführt, und zwar sind dies folgende. Das Verhältniss $MN:ON$ heisst der Sinus des Winkels MON, in Zeichen:

2) $$\frac{MN}{ON} = \sin u,$$

d. h.: der Sinus eines Winkels ist das Verhältniss der ihm gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse.

Ferner heisst das Verhältniss $MN:MO$ die trigonometrische Tangente des Winkels MON:

3) $$\frac{MN}{MO} = \tan u,$$

also: die Tangente eines Winkels ist das Verhältniss der ihm gegenüberliegenden Kathete zur anliegenden Kathete.

Das umgekehrte Verhältniss $MO:MN$ wird die Cotangente des Winkels MON genannt:

4) $$\frac{MO}{MN} = \cot u,$$

d. h.: die Cotangente eines Winkels ist das Verhältniss der ihm anliegenden Kathete zur gegenüberliegenden Kathete.

Ferner wird das Verhältniss $ON:OM$ die Secante des Winkels MON genannt:

5) $$\frac{ON}{OM} = \sec u,$$

d. h.: die Secante eines Winkels ist das Verhältniss der Hypotenuse zur anliegenten Kathete.

Dem Verhältnisse $ON:MN$ endlich hat man den Namen der Cosecante gegeben;

6) $$\frac{ON}{MN} = \csc u,$$

d. h.: die Cosecante eines Winkels ist das Verhältniss der Hypotenuse zur gegenüberliegenden Kathete.

Man wird leicht sehen, dass mit diesen sechs Verhältnissen alle überhaupt möglichen Fälle erschöpft sind, oder dass es in dem rechtwinkligen Dreiecke MNO keine Seiten-

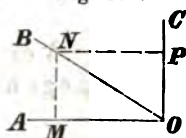
verhältnisse weiter giebt, welche zur Bestimmung des Winkels $MON = u$ benutzt werden könnten. Man begreift die genannten sechs Verhältnisse unter dem gemeinschaftlichen Namen der **trigonometrischen Functionen** des in Rede stehenden Winkels.

§. 37.

Wechselverhältniss und geometrische Bedeutung der trigonometrischen Functionen.

Vergleicht man die Definitionen des Sinus und Cosinus, der Tangente, Cotangente, der Secante und Cosecante, so ergiebt sich eine wohl bedachte Regelmässigkeit der Bezeichnung; man erhält nämlich das Cosinus-, Cotangenten- und Cosecantenverhältniss aus dem Sinus-, Tangenten- und Secantenverhältniss, wenn man jedesmal statt der einen Kathete die andere setzt, oder eine Vertauschung unter den zusammengehörenden (coordinirten) Katheten vornimmt. Diese Bemerkung führt zu den Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen solcher Winkel, welche sich zu einem Rechten ergänzen. Stellen wir nämlich OC senkrecht auf AO und fällen von N das Perpendikel NP auf AC, so ist

Fig. 130.



$$1)\quad \cos u = \frac{OM}{ON} = \frac{PN}{ON} = \sin (90^0 - u),$$

$$2)\quad \sin u = \frac{MN}{ON} = \frac{OP}{ON} = \cos (90^0 - u),$$

$$3)\quad \tan u = \frac{MN}{MO} = \frac{OP}{NP} = \cot (90^0 - u),$$

$$4)\quad \cot u = \frac{MO}{MN} = \frac{NP}{OP} = \tan (90^0 - u),$$

$$5)\quad \sec u = \frac{ON}{OM} = \frac{ON}{PN} = \csc (90^0 - u),$$

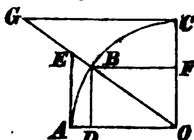
$$6)\quad \csc u = \frac{ON}{MN} = \frac{ON}{OP} = \sec (90^0 - u).$$

Nennen wir denjenigen Winkel, welcher einen gegebenen Winkel zu 90° ergänzt, den **Complementwinkel** des letztern, so lassen sich diese Gleichungen in der einfachen Regel zusammenfassen: **Die trigonometrische**

Function eines Winkels ist die Cofunction seines Complementwinkels.

Aus den Erklärungen, welche wir von den trigonometrischen Functionen eines Winkels gegeben haben, geht unmittelbar hervor, dass dieselben absolute (unbenannte) Zahlen sind, und es scheint daher für den ersten Augenblick nicht möglich, dieselben geometrisch zu construiren. Erinnert man sich aber, dass es freisteht, irgend eine willkührliche begränzte Gerade als Einheit anzunehmen, so erhellt sofort die Möglichkeit einer geometrischen Darstellung der trigonometrischen Functionen, indem man die fraglichen Zahlen als Längenzahlen gerader Linien ansieht. Diese geometrische Construction lässt sich auf folgende Weise ausführen. Mit der Längeneinheit als Halbmesser beschreiben wir aus dem Scheitel des gegebenen Winkels u einen Viertelkreis, welcher die Schenkel des Winkels in A, B zweitens den Schenkel des Complementwinkels in C schneidet; von B aus lassen wir auf AO und CO Senkrechte herab und errichten endlich in A und C Perpendikel auf AO und CO, welche die verlängerte BO in E und G schneiden. Wir haben dann

Fig. 131.



$$sin\, u = \frac{BD}{BO} = \frac{BD}{1} = BD,$$

$$tan\, u = \frac{AE}{AO} = \frac{AE}{1} = AE,$$

$$sec\, u = \frac{EO}{AO} = \frac{EO}{1} = EO.$$

Die Grössen $cos\, u$, $cot\, u$ und $csc\, u$ ergeben sich nun sofort aus der vorhin gemachten Bemerkung, dass sie Dasselbe für den Winkel $90^0 - u$ sind, was die Grössen $sin\, u$, $tan\, u$, $sec\, u$ für den Winkel u; es ist nämlich

$$cos\, u = BF = OD,$$
$$cot\, u = CG,$$
$$csc\, u = OG,$$

und damit haben wir in einer und derselben Figur die geometrische Darstellung sämmtlicher trigonometrischen

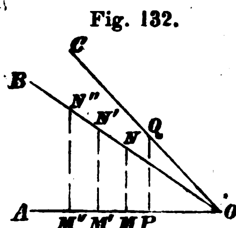
Functionen *). Die nach dieser Weise geometrisch construirten trigonometrischen Functionen pflegt man die trigonometrischen **Linien** oder auch den **linearen** Sinus, Cosinus u. s. w. zu nennen.

§. 38.

Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen eines Winkels.

Da eine einzige trigonometrische Function zur Bestimmung eines Winkels hinreicht, so muss es offenbar möglich sein, aus einer solchen Function, etwa dem Sinus, alle übrigen Functionen abzuleiten, oder, was auf Dasselbe hinauskommt, es müssen zwischen den verschiedenen trigonometrischen Functionen eines Winkels gewisse Gleichungen statt finden. Man gelangt zu denselben leicht durch folgende Bemerkungen. In dem rechtwinkligen Dreiecke MON ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatze:

Fig. 132.



$$\overline{OM}^2 + \overline{MN}^2 = \overline{ON}^2$$

oder nach beiderseitiger Divison mit $\overline{ON}^2$

$$\left(\frac{OM}{ON}\right)^2 + \left(\frac{MN}{ON}\right)^2 = 1,$$

d. i. vermöge der Definition des Sinus und Cosinus

$$(\cos u)^2 + (\sin u)^2 = 1,$$

wofür wir der Bequemlichkeit wegen schreiben wollen

7) $$\cos^2 u + \sin^2 u = 1.$$

Dividiren wir ferner Zähler und Nenner des Bruches $\frac{MN}{MO}$ welcher die Tangente von u ist, durch ON, so wird

---

*) In älteren Werken findet man auch noch die Linien $AD = 1 - \cos u$ und $CF = 1 - \sin u$ als besondere Functionen aufgeführt, die erste unter dem Namen des **Sinus versus** (Quersinus) und die zweite als **Cosinus versus**; man bedient sich aber gegenwärtig dieser Bezeichnungen fast gar nicht mehr.

$$tan\, u = \frac{\frac{MN}{ON}}{\frac{MO}{ON}},$$

oder vermöge der Definition von Sinus und Cosinus

8) $$tan\, u = \frac{sin\, u}{cos\, u}.$$

Durch dasselbe Verfahren ergiebt sich aus $cot\, u = \frac{MO}{MN}$ die umgekehrte Gleichung

9) $$cot\, u = \frac{cos\, u}{sin\, u} = \frac{1}{tan\, u}.$$

Wir haben ferner in Beziehung auf die Secante

$$sec\, u = \frac{NO}{MO} = \frac{1}{\frac{MO}{NO}},$$

d. i.

10) $$sec\, u = \frac{1}{cos\, u},$$

und endlich für die Cosecante

$$csc\, u = \frac{ON}{MN} = \frac{1}{\frac{MN}{ON}},$$

d. h.

11) $$csc\, u = \frac{1}{sin\, u}.$$

Diese fünf Gleichungen reichen hin, um aus einer gegebenen trigonometrischen Function die übrigen fünf zu finden. Wäre z. B. der Sinus gegeben, so ist nach No. 7)

$$cos\, u = \sqrt{1 - sin^2 u},$$

ferner durch Substitution in No. 8)

$$tan\, u = \frac{sin\, u}{\sqrt{1 - sin^2 u}},$$

weiter aus No. 9)

$$cot\, u = \frac{\sqrt{1 - sin^2 u}}{sin\, u}$$

und endlich aus No. 10)

$$sec\, u = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 u}}, \quad csc\, u = \frac{1}{sin\, u}.$$

Auf ähnliche Weise kann man in jedem andern Falle verfahren und es führt dann die vollständige Behandlung aller hierher gehörenden Aufgaben zur folgenden Formelntabelle.

Gegeben:	Gesucht:					
	$\sin u$	$\cos u$	$\tan u$	$\cot u$	$\sec u$	$\csc u$
$\sin u$	$\sin u = \sin u$	$\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u}$	$\tan u = \frac{\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}$	$\cot u = \frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\sin u}$	$\sec u = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}$	$\csc u = \frac{1}{\sin u}$
$\cos u$	$\sin u = \sqrt{1-\cos^2 u}$	$\cos u = \cos u$	$\tan u = \frac{\sqrt{1-\cos^2 u}}{\cos u}$	$\cot u = \frac{\cos u}{\sqrt{1-\cos^2 u}}$	$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\csc u = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 u}}$
$\tan u$	$\sin u = \frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}}$	$\cos u = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u}}$	$\tan u = \tan u$	$\cot u = \frac{1}{\tan u}$	$\sec u = \sqrt{1+\tan^2 u}$	$\csc u = \frac{\sqrt{1+\tan^2 u}}{\tan u}$
$\cot u$	$\sin u = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 u}}$	$\cos u = \frac{\cot u}{\sqrt{1+\cot^2 u}}$	$\tan u = \frac{1}{\cot u}$	$\cot u = \cot u$	$\sec u = \frac{\sqrt{1+\cot^2 u}}{\cot u}$	$\csc u = \sqrt{1+\cot^2 u}$
$\sec u$	$\sin u = \frac{\sqrt{\sec^2 u-1}}{\sec u}$	$\cos u = \frac{1}{\sec u}$	$\tan u = \sqrt{\sec^2 u-1}$	$\cot u = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 u-1}}$	$\sec u = \sec u$	$\csc u = \frac{\sec u}{\sqrt{\sec^2 u-1}}$
$\csc u$	$\sin u = \frac{1}{\csc u}$	$\cos u = \frac{\sqrt{\csc^2 u-1}}{\csc u}$	$\tan u = \frac{1}{\sqrt{\csc^2 u-1}}$	$\cot u = \sqrt{\csc^2 u-1}$	$\sec u = \frac{\csc u}{\sqrt{\csc^2 u-1}}$	$\csc u = \csc u$

§. 39.

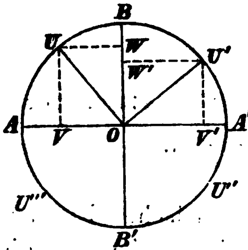
Die trigonometrischen Functionen stumpfer und überstumpfer Winkel.

Wir haben bisher nur die trigonometrischen Functionen spitzer Winkel betrachtet und für diese allerdings die vorhandenen Beziehungen aufgesucht; es ist aber leicht einzusehen, dass diese ganze Untersuchung immer noch eine sehr mangelhafte heissen muss. Da wir nämlich darauf ausgehen, die verschiedenen Stücke eines beliebigen Vielecks in eine Rechnung zu verflechten, so kommen wir schon beim Dreiecke in die Nothwendigkeit, stumpfe Winkel zu bestimmen, und beim Vierecke, Fünfecke u. s. w. würden wir es sogar mit convexen Winkeln zu thun haben. Diese einfache Bemerkung zwingt uns, einen Schritt weiter zu gehen und die Frage zu beantworten, in wie fern bei solchen Winkeln, welche 90° übersteigen, eine Bestimmung durch trigonometrische Functionen statt finden kann.

Da es ganz Sache der Willkühr ist, was man unter dem Sinus, Cosinus u. s. w. eines Winkels verstehen will, so hindert nichts, für stumpfe oder überstumpfe Winkel ganz neue Definitionen aufzustellen; wollte man aber hierbei planlos verfahren, indem man etwa für den Sinus eines stumpfen Winkels das erste beste sich darbietende Verhältniss erklärte, so geriethe man in die Unbequemlichkeit, ganz verschiedene Definitionen neben einander zu haben und bei der Antwort auf die Frage, was ein Sinus ist, jedesmal die verschiedenen Fälle unterscheiden zu müssen, ob der Winkel im ersten, zweiten oder dritten Quadranten etc. liegt. Um diesem Uebelstande auszuweichen, haben wir uns nach solchen Definitionen umzusehen, welche ganz gleichförmig passen, der Winkel mag so gross oder so klein sein, als er will. Zu diesem Zwecke dienen folgende Betrachtungen.

Denken wir uns einen Winkel AOU dadurch entstanden, dass sich eine begränzte Gerade, von der ursprünglichen Lage AO ausgehend, um den Punkt O gedreht hat, so wird der Winkel AOU durch den Bogen gemessen, welchen der Punkt A beschreiben musste, um nach U zu gelangen; die Anfangslage AO der Geraden bildet, hinreichend verlängert, einen Durchmesser AA' des bei einer vollständigen Umdrehung entstehenden Kreises. Dabei wollen wir, um in keiner Beziehung eine Ungewissheit zu lassen, A als den Anfangspunkt des Bogens und U als seinen Endpunkt bezeichnen, ferner den durch den Anfangspunkt gehenden Durchmesser AA' den Hauptdurchmesser des Kreises und den darauf senkrechten Durchmesser den Nebendurchmesser nennen. Lassen wir von U auf AO ein Perpendikel UV herab, so stellt die Gerade AV die Projection des Bogens auf den Hauptdurchmesser dar und daher möge die Strecke AV die Hauptprojection des Bogens AO heissen; in gleicher Weise ist OV die Hauptprojection des Radius OU. Beide Projectionen machen zusammen den Radius AO aus, wo auch der Punkt U auf dem Quadranten AB liegen möge; es folgt daraus: die Hauptprojection des Radius ist gleich dem Unterschiede zwischen dem Radius und der Hauptprojection des zugehörigen Bogens. Dieser Satz möge nun als allgemeine Erklärung darüber gelten, was in jedem Falle, d. h. bei jeder beliebigen Lage von U unter der Hauptprojection des Radius verstanden werden soll. Die Consequenzen hiervon sind folgende.

Fig. 133.



Fällt der Endpunkt des Bogens in den zweiten Quadranten, etwa nach U', so ist die Hauptprojection AV' des Bogens AU' grösser als der Radius AO und mithin wird die Differenz $AO - AV'$, d. h., die Hauptprojection des Radius negativ, nämlich $= - OV'$. Aus diesem Resultate spricht eine Feinheit der Algebra; das negative Zeichen bedeutet nämlich den Gegensatz in der Lage von OV'

gegen OV, denn in der That erstreckt sich OV von O aus nach der linken Seite des Hauptdurchmessers, OV' dagegen nach der rechten, also entgegengesetzten Seite. — Dasselbe findet statt, wenn der Endpunkt des Bogens in den dritten Quadranten, etwa nach U'' fällt; liegt er dagegen im vierten Quadranten, etwa in U''', so ist die Hauptprojection des Bogens wieder kleiner als der Radius, mithin die Hauptprojection des Radius positiv wie im ersten Quadranten. Dies zusammen giebt den Satz: Die Hauptprojection des Radius ist positiv, wenn der Winkel, unter welchem die Projection geschieht, im ersten oder vierten Quadranten liegt, dagegen negativ, wenn er in den zweiten oder dritten Quadranten fällt.

Aehnliche Verhältnisse gelten für die Nebenprojection des Radius, welche dadurch entsteht, dass man den Radius auf den Nebendurchmesser projicirt. Ist OW diese Nebenprojection des Halbmessers AO und BW die Nebenprojection des Complementbogens BU, so hat man zunächst die Beziehung: Die Nebenprojection des Radius ist der Unterschied zwischen dem Radius und der Nebenprojection des Complementbogens. Wir benutzen dieselbe als Definition der Nebenprojection des Radius und stellen nun ganz ähnliche Betrachtungen wie vorhin an. Liegt nämlich der Endpunkt des Bogens im ersten oder zweiten Quadranten, so ist die Nebenprojection BW oder BW' des Complementbogens jederzeit kleiner als der Radius, mithin die Nebenprojection des letztern positiv; befindet sich aber der Endpunkt des Bogens im dritten oder vierten Quadranten, so ist die Nebenprojection des Complementbogens länger als der Radius, folglich die Nebenprojection des letztern negativ. Man hat daher den Satz: Die Nebenprojection des Radius ist positiv, wenn der Winkel, unter welchem die Projection geschieht, im ersten oder zweiten Quadranten liegt, dagegen negativ, wenn er in den dritten oder vierten Quadranten fällt.

Mittelst dieser Bestimmungen, bei welchen der Gegensatz der Lagen durch den Gegensatz der Vorzeichen dar-

gestellt wird, ist es sehr leicht, allgemein giltige Definitionen für die trigonometrischen Verhältnisse aufzustellen; indem wir nämlich den Radius jederzeit im absoluten Sinne nehmen (ihm also keinen Zeichenwechsel gestatten), die Projectionen aber im obigen Sinne auffassen, sagen wir:

Der Cosinus eines Winkels ist das Verhältniss der Hauptprojection einer Geraden zu ihr selbst, mithin positiv im ersten und letzten Quadranten, negativ in zweiten und dritten;

der Sinus ist das Verhältniss der Nebenprojection einer Geraden zu ihr selbst, also positiv im ersten und zweiten Quadranten, negativ im dritten und vierten;

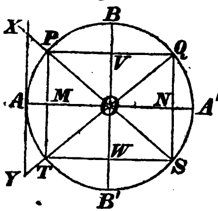
die Tangente ist das Verhältniss der Nebenprojection einer Geraden zu deren Hauptprojection, demgemäss positiv im ersten und dritten, negativ im zweiten und vierten Quadranten;

die Secante ist das Verhältniss einer Geraden zu ihrer Hauptprojection und wechselt das Zeichen ebenso wie der Cosinus;

die Cosecante ist das Verhältniss einer Geraden zu ihrer Nebenprojection und besitzt denselben Zeichenwechsel wie der Sinus;

die Cotangente ist das Verhältniss der Hauptprojection einer Geraden zu deren Nebenprojection und befolgt denselben Zeichenwechsel wie die Tangente.

Fig. 134.



Will man diese Definitionen in Formeln kleiden, so kann dies leicht auf die Weise geschehen, dass man $\angle AOP = \angle A'OQ = \angle A'OS = \angle AOT = u$ nimmt und sich die Drehung immer rechts herum gehend denkt; es ist dann

$$\angle AOP = u, \ \angle AOQ = 180^0 - u,$$
$$\angle AOS = 180^0 + u, \ \angle AOT = 360^0 - u;$$

und man findet aus dem blossen Anblicke der Figur mit Rücksicht auf das Obige folgende Beziehungen:

$$1)\quad \begin{cases} \cos u = +\cos u \\ \cos(180^\circ - u) = -\cos u \\ \cos(180^\circ + u) = -\cos u \\ \cos(360^\circ - u) = +\cos u \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} \sin u = +\sin u \\ \sin(180^\circ - u) = +\sin u \\ \sin(180^\circ + u) = -\sin u \\ \sin(360^\circ - u) = -\sin u \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} \tan u = +\tan u \\ \tan(180^\circ - u) = -\tan u \\ \tan(180^\circ + u) = +\tan u \\ \tan(360^\circ - u) = -\tan u \end{cases}$$

welchen sich leicht zwölf ähnliche Formeln für $sec\, u$, $csc\, u$ und $cot\, u$ an die Seite stellen lassen.

Denkt man sich die Drehung, durch welche der Winkel entstanden ist, noch über 360° hinaus fortgesetzt, so kehren die Vorzeichen der trigonometrischen Functionen periodisch wieder; sie sind im fünften Quadranten dieselben wie im ersten, im sechsten die nämlichen wie im zweiten u. s. w. Daraus folgt zugleich ein Verfahren, um die trigonometrischen Functionen beliebig grosser Winkel auf die Functionen spitzer Winkel zurückzuführen; ist nämlich w der gegebene Winkel, so untersuche man vorerst, wie viel ganze Umdrehungen in ihm enthalten sind, und nenne n den ganzen Quotienten, welcher bei Ausführung der Division $\frac{w}{360}$ zum Vorschein kommt, und v den Rest. Es ist dann

$$\frac{w}{360} = n + \frac{v}{360} \text{ oder } w = n\,.\,360^\circ + v,$$

mithin nach dem Vorigen

$$\cos w = \cos(n\,.\,360^\circ + v) = \cos v,$$
$$\sin w = \sin(n\,.\,360^\circ + v) = \sin v$$

u. s. w.

Der übrig gebliebene Bogen v beträgt weniger als 360°, kann aber ebensowohl im ersten, als im zweiten, dritten oder vierten Quadranten liegen; im ersten Falle bedarf es keiner weitern Reduction, im zweiten Falle setze man

$180^\circ - v = u$, also $v = 180^\circ - u$, es ist dann $\cos v = -\cos u$, $\sin v = +\sin u$ u. s. w.; im dritten Falle sei $v - 180^\circ = u$, also $v = 180^\circ + u$, so ist $\cos v = -\cos u$, $\sin v = -\sin u$ etc.; im letzten Falle endlich sei $360^\circ - v = u$ oder $v = 360^\circ - u$, so wird $\cos v = +\cos u$, $\sin v = -\sin u$ u. s. w. Hiermit sind also unter allen Umständen die Vorzeichen der trigonometrischen Functionen von w bestimmt und ihre Werthe auf die der Functionen eines spitzen Winkels u zurückgeführt.

Nach diesen Erörterungen wird man sich leicht überzeugen, dass die Gleichungen

$$\cos^2 w + \sin^2 w = 1,$$

$$\tan w = \frac{\sin w}{\cos w}, \quad \cot w = \frac{\cos w}{\sin w},$$

$$\sec w = \frac{1}{\cos w}, \quad \csc w = \frac{1}{\sin w},$$

für alle möglichen Winkel w richtig bleiben; dasselbe muss von den daraus abgeleiteten Gleichungen, d. h. von den Formeln der Tabelle in §. 38 gelten. Demnach besitzt diese Tabelle allgemeine Anwendbarkeit, sobald man nur die Vorzeichen in der gehörigen Weise bestimmt, wozu vorhin Anleitung gegeben wurde.

§. 40.

Wachsthum und Abnahme der trigonometrischen Functionen.

Lassen wir in voriger Figur den einen Schenkel AO des Winkels AOP unverrückt liegen und drehen den anderen Schenkel OP um den Punkt O herum, indem wir die Drehung von derjenigen Lage aus anfangen, wo PO mit AO zusammenfiel, so erleiden die trigonometrischen Functionen folgende Veränderungen.

Der Cosinus. Wenn der Winkel $AOP = 0$ ist, so fallen die Punkte P und A zusammen; AO bildet dann selbst den Cosinus des Winkels Null und wir haben

1) $$\cos 0^\circ = 1.$$

Während der Drehung durch den ersten Quadranten nimmt der Cosinus fortwährend ab, und sobald $\angle AOP = 90^\circ$ ge-

worden ist, zieht sich die Linie MO auf den blossen Punkt O zusammen; also

2) $$\cos 90^0 = 0.$$

Ueber 90^0 hinaus wird der Cosinus negativ und vermöge der Gleichung $\cos(180^0 - u) = -\cos u$ durchläuft er jetzt das Intervall 0 bis -1 rückwärts auf dieselbe Weise, wie vorhin das Intervall $+1$ bis 0. Diese Abnahme erreicht ihre Gränze bei 180^0, nämlich

3) $$\cos 180^0 = -1,$$

und von hier an wächst der Cosinus, indem er, sobald die Drehung bis zu 270^0 fortgeschritten ist, wieder bei Null anlangt, nämlich

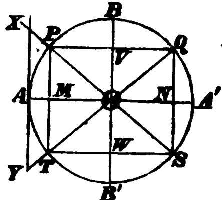
4) $$\cos 270^0 = 0,$$

und darauf im vierten Quadranten das Intervall 0 bis $+1$ durchläuft, welches sich mit

5) $$\cos 360^0 = +1$$

endigt. Bei weiterer Drehung wiederholt sich dieser Wechsel gleichförmig wie bei der ersten Umdrehung. Es gilt daher von dem Cosinus der Satz, dass er die Gränzen $+1$ und -1 nicht überschreiten, und dass umgekehrt jede nicht ausserhalb dieser Gränzen liegende Zahl als ein Cosinus angesehen werden darf.

Fig. 134.



Der Sinus. Ist der Winkel $AOP = 0$, so fallen die Punkte M und P in einen einzigen Punkt zusammen und es ist

6) $$\sin 0^0 = 0.$$

Von da an wachsen die Sinus, sobald die Drehung fortschreitet, und es gilt für den ganzen ersten Quadranten das Gesetz, dass dem grösseren Winkel auch der grössere Sinus gehört. Den grössten Werth erreicht der Sinus, wenn eine Vierteldrehung gemacht, also der Winkel $= 90^0$ geworden ist; es fällt nämlich dann der Punkt P mit dem Punkte C und der Punkt M mit dem Punkte O zusammen, so dass $\sin AOB = OB$, d. h.

7) $$\sin 90^0 = 1$$

wird. Setzen wir die Drehung weiter fort, so nehmen die Sinus im zweiten Quadranten vermöge der Gleichung

$sin(180^0 - u) = sin\, u$ auf dieselbe Weise ab, wie sie im ersten Quadranten gewachsen waren, und der kleinste Sinus tritt bei der halben Umdrehung ein, nämlich

8) $$sin\, 180^0 = 0.$$

Ueber 180^0 hinaus werden die Sinus im dritten Quadranten negativ und durchlaufen vermöge der Gleichung $sin(180^0 + u) = - sin\, u$ das Intervall 0 bis -1, d. h. sie nehmen von $sin\, 180^0 = 0$ an ab bis

9) $$sin\, 270^0 = -1,$$

wo nun die Zunahme wieder anfängt; vermöge der Gleichung $sin(360^0 - u) = - sin\, u$ durchlaufen die Sinus im vierten Quadranten das Intervall -1 bis 0, und nachdem eine ganze Umdrehung vollendet ist, wird wie anfangs

10) $$sin\, 360^0 = 0.$$

Wollte man die Drehung noch weiter fortsetzen, so würde sich bei jeder folgenden ganzen Umdrehung immer Dasselbe wiederholen, was hier bei der ersten Umdrehung beobachtet wurde. Achten wir darauf, dass $+1$ und -1 die äussersten Werthe sind, die ein Sinus erlangen kann, so haben wir den Satz: Die Sinus sind Zahlen, welche die Gränzen $+1$ und -1 nicht überschreiten; ebenso wird man sich auch umgekehrt leicht überzeugen, dass jede Zahl, welche nicht ausserhalb der Gränzen $+1$ und -1 liegt, als Sinus eines Winkels angesehen werden kann.

Die Tangente. Vermöge der Gleichung $tan\, u = \frac{sin\, u}{cos\, u}$ ist es sehr leicht, das Gesetz für die Veränderung der Tangente zu erforschen. Im Anfange der Drehung hat man nämlich

11) $$tan\, 0^0 = 0$$

und während des ganzen ersten Quadranten wächst die Tangente unaufhörlich, weil der Zähler des Bruches $\frac{sin\, u}{cos\, u}$ immer grösser und der Nenner desselben immer kleiner wird. Da letzterer der Null so nahe kommen kann, als man will, indem man u immer näher an 90^0 rücken lässt, so folgt, dass der Quotient $\frac{sin\, u}{cos\, u}$ so gross als nur denkbar werden oder jede noch so grosse Zahl übersteigen kann. In diesem Sinne sagt man, die Tangente von 90^0 sei un-

endlich gross (wo man sich nur hüten muss, das Unendliche für eine fest bestimmte Grösse anzusehen), und bezeichnet dies durch $\tan 90^\circ = \infty$. Dies bestätigt sich auch geometrisch, denn wenn P in B anlangt, werden die Linien AX und OP parallel und ihr Durchschnitt X rückt über jede angebbare Stelle des Raumes hinaus, d. h. AX wird unendlich. — Im zweiten Quadranten durchläuft die Tangente vermöge der Gleichung $\tan(180^\circ - u) = -\tan u$ dieselben absoluten Werthe wie im ersten Quadranten, nur in umgekehrter Ordnung und mit dem negativen Vorzeichen. Setzen wir $u = 90^\circ - \delta$, wo δ einen kleinen Winkel bezeichnet, so ist $\tan(90^\circ + \delta) = -\tan(90^\circ - \delta)$, und wenn wir δ bis zur Null abnehmen lassen, so ergiebt sich das anscheinend widersinnige Resultat $\tan(90^\circ + 0) = -\tan(90^\circ - 0)$. Dasselbe erklärt sich aber leicht, wenn man darauf achtet, dass $90^\circ - 0$ das Ende einer von 0° bis 90° gehenden Drehung, dagegen $90^\circ + 0$ den Anfang einer neuen mit 90° beginnenden Drehung bezeichnet; nach diesen verschiedenen Bedeutungen, welche 90° hier haben können, und die wir durch $90^\circ - 0$ und $90^\circ + 0$ auseinander gehalten haben, kommen auch diesem Winkel verschiedene Tangenten zu, nämlich

12) $$\tan(90^\circ - 0) = +\infty,$$

13) $$\tan(90^\circ + 0) = -\infty.$$

Von $90^\circ + 0$ bis 180° durchläuft nun die Tangente das Intervall $-\infty$ bis 0, weil nämlich

14) $$\tan 180^\circ = 0$$

ist; von hier beginnt dieselbe Zunahme, wie schon früher von 0 bis 90°, und es wird, nachdem die Tangente im dritten Quadranten von 0 bis ∞ gewachsen ist,

15) $$\tan(270^\circ - 0) = +\infty,$$

16) $$\tan(270^\circ + 0) = -\infty.$$

Im vierten Quadranten ist der Verlauf der Tangente derselbe, wie im zweiten Quadranten und es wird zuletzt

17) $$\tan 360^\circ = 0.$$

Bei weiterer Drehung würde sich dieses Spiel von neuem wiederholen. Wir sehen daraus, dass die Tangenten das ganze Gebiet der positiven und negativen Zahlen durchlaufen und dass umgekehrt jede algebraische Zahl als Tangente eines Bogens angesehen werden kann.

Die Cotangente. Gleich anfangs wird die Cotangente unendlich, weil der Quotient $\frac{\cos u}{\sin u}$ jede endliche Zahl übersteigt, sobald man u hinlänglich klein nimmt; es ist daher

18) $$\cot 0^0 = \infty;$$

während des ersten Quadranten nimmt die Cotangente fortwährend ab bis

19) $$\cot 90^0 = 0,$$

wird darauf im zweiten Quadranten negativ und durchläuft hier das Intervall 0 bis $-\infty$. An der Stelle 180^0 tritt ein ganz ähnlicher Fall wie bei der Tangente (an der Stelle 90^0) ein; es ist nämlich $\cot(180^0 - u) = -\cot u$, ferner $\cot(180^0 + u) = +\cot u$, folglich, wenn wir u in Null übergehen lassen,

20) $$\cot(180^0 - 0) = -\infty,$$

21) $$\cot(180^0 + 0) = +\infty,$$

wovon die Erklärung ganz ähnlich wie bei der Tangente ist. Im dritten Quadranten verläuft die Cotangente ebenso wie im ersten Quadranten, wobei

22) $$\cot 270^0 = 0$$

wird, und im vierten Quadranten ist die Aenderung der Cotangente dieselbe wie im zweiten Quadranten. An der Stelle 360^0 begegnen wir wieder dem Falle, der schon bei 180^0 vorhanden war; aus den Gleichungen $\cot(360^0 - u) = -\cot u$ und $\cot(360^0 + u) = +\cot u$ folgt nämlich für $u = 0$

23) $$\cot(360^0 - 0) = -\infty,$$

24) $$\cot(360^0 + 0) = +\infty.$$

Von nun an wiederholen sich die vorigen Bemerkungen. Wir erkennen hieraus, dass die Cotangenten das ganze Gebiet der positiven und negativen Zahlen durchlaufen, und dass umgekehrt jede algebraische Zahl als Cotangente eines Bogens betrachtet werden kann.

Die Secante. Da $\sec u = \frac{1}{\cos u}$, so haben wir

25) $$\sec 0^0 = 1;$$

von da an wachsen die Secanten während des ersten Quadranten und für $u = 90^0$ wird $\sec 90^0 = \frac{1}{0}$, d. h. un-

endlich. Beachten wir aber, dass $sec(180^0 - u) = -sec\, u$ oder, für $u = 90^0 - \delta$, $sec(90^0 + \delta) = -sec(90^0 - \delta)$ ist, und lassen δ bis zur Null abnehmen, so erhellt, dass zum Winkel von 90^0 zwei Secanten gehören, nämlich

26) $$sec(90^0 - 0) = +\infty,$$

27) $$sec(90^0 + 0) = -\infty;$$

im zweiten Quadranten durchläuft die Secante das Intervall $-\infty$ bis -1, wobei

28) $$sec\, 180^0 = -1$$

ist; und im dritten Quadranten wieder das Intervall -1 bis $-\infty$; bei 270^0 springt die Secante wieder aus dem Negativen ins Positive über, nämlich

29) $$sec(270^0 - 0) = -\infty,$$

30) $$sec(270^0 + 0) = +\infty,$$

worauf sie im vierten Quadranten von $+\infty$ bis $+1$, nämlich

31) $$sec\, 360^0 = +1$$

abnimmt. Wir sehen hieraus, dass die Secanten sich innerhalb der beiden abgesonderten Intervalle $+1$ bis $+\infty$ und -1 bis $-\infty$ bewegen, und ebenso, dass umgekehrt jede zwischen diesen Gränzen liegende Zahl als Secante eines Bogens angesehen werden kann.

Die Cosecante. Gleich anfangs wird die Cosecante unendlich, weil in $csc\, u = \frac{1}{sin\, u}$ der Nenner für $u = 0$ verschwindet; also

32) $$csc\, u = \infty;$$

im ersten Quadranten nehmen die Cosecanten ab und erreichen ihren kleinsten Werth für $u = 90^0$, nämlich

33) $$csc\, 90^0 = +1,$$

worauf sie im zweiten Quadranten wieder bis $+\infty$ wachsen; am Ende dieses Intervalles tritt ein Sprung ein; aus $csc(180^0 + u) = -csc(180^0 - u)$ folgt nämlich für $u = 0$

34) $$csc(180^0 - 0) = +\infty,$$

35) $$csc(180^0 + 0) = -\infty;$$

im dritten Quadranten durchlaufen die Cosecanten das Intervall $-\infty$ bis -1, indem

36) $$csc\, 270^0 = -1$$

ist, und im vierten Quadranten wieder das Intervall -1 bis $-\infty$; an der Stelle 360^0 geht die Cosecante wieder

aus $-\infty$ nach $+\infty$ sprungweis über, wie man aus der Gleichung $-csc(360^\circ + u) = + csc(360^\circ - u)$ erkennt; es wird dann

37) $$csc(360^\circ - 0) = -\infty,$$

38) $$csc(360^\circ + 0) = +\infty,$$

worauf die Cosecante wieder wie im ersten Quadranten verläuft. Wir sehen hieraus, dass sich die Cosecante in den getrennten Intervallen $+1$ bis $+\infty$ und -1 bis $-\infty$ bewegt, und dass sich umgekehrt jede zwischen den angegebenen Gränzen liegende Zahl als Cosecante eines Bogens betrachten lässt.

Tabellarisch geordnet können die Aenderungen der sechs trigonometrischen Functionen folgendermaassen dargestellt werden:

	0°	90°	180°	270°	360°
Cosinus . .	1	0	-1	0	$+1$
Sinus . . .	0	$+1$	0	-1	0
Tangente .	0	$+\infty, -\infty$	0	$+\infty, -\infty$	0
Cotangente	∞	0	$-\infty, +\infty$	0	$-\infty, +\infty$
Secante . .	1	$+\infty, -\infty$	-1	$-\infty, +\infty$	$+1$
Cosecante.	∞	$+1$	$+\infty, -\infty$	-1	$-\infty, +\infty$

§. 41.

Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen zweier Winkel.

Nachdem wir diejenigen Beziehungen erschöpft haben, welche unter den trigonometrischen Functionen nur eines Winkels statt finden, liegt es uns ob, den Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Functionen mehrerer, also zunächst zweier Winkel aufzusuchen; um dies aber mit der nöthigen Allgemeinheit thun zu können, schicken wir eine Betrachtung über den Zusammenhang zwischen dem Cosinus und der Sehne eines Bogens voraus.

Es sei $AO = 1$, $\angle AOU = u$, UV senkrecht auf AO, mithin $OV = \cos u$ und AU gleich der zum Winkel u gehörigen Sehne oder kurz $AU = Chord\, u$; es werde ferner die Gerade UA' gezogen, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke AUA'

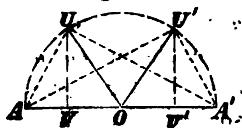


Fig. 135.

$$\overline{AU}^2 = AA' . AV = AA' . (AO - OV),$$

d. i. nach der obigen Bezeichnung

$$Chord^2\, u = 2\,(1 - \cos u).$$

Wäre der Winkel u ein stumpfer, etwa $u = \angle AOU'$, so würde in dem Dreiecke $AU'A'$ die Beziehung

$$\overline{AU'}^2 = AA' . AV' = AA' . (AO + OV')$$

gelten und zugleich ist jetzt $AU' = Chord\, u$, $OV' = -\cos u$, folglich wiederum

$$Chord^2\, u = 2\,(1 - \cos u).$$

In derselben Weise würde sich diese Gleichung bei Winkeln des dritten und vierten Quadranten bestätigen und wir haben daher ganz allgemein für jedes u die Formel

1) $$Chord^2\, u = 2\,(1 - \cos u).$$

Wir betrachten jetzt zwei Winkel $AOB = a$ und $AOC = b$, welche aus beliebig vielen ganzen Umdrehungen (jede $= 360^0$) plus den Drehungen um AOB und AOC entstanden sein können, und nehmen $AO = 1$, $BM = \sin a$, $OM = \cos a$, $CN = \sin b$ und $ON = \cos b$; ziehen wir die Gerade BC, so ist diese die Sehne, welche zur Differenz unserer Winkel, also zum Winkel $a - b$ gehört, in Zeichen

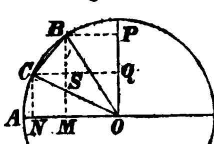


Fig. 136.

$$BC = Chord\,(a - b);$$

legen wir weiter $BP \,//\, CQ \,//\, AO$ und nennen S den Durchschnitt von BM und CQ, so haben wir in dem rechtwinkligen Dreiecke BCS

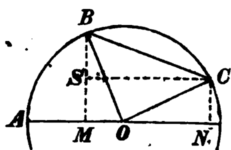
2) $$\overline{BC}^2 = \overline{CS}^2 + \overline{BS}^2,$$

wo sich die Linien CS und BS leicht durch die Sinus und Cosinus von a und b ausdrücken lassen.

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle, ob die Punkte M und N auf derselben Seite, von O aus gerechnet, oder auf entgegengesetzten Seiten liegen. Im ersten Falle ist

$CS = MN$ offenbar nichts Anderes als die Differenz zwischen OM und ON, d. h. zwischen den Cosinus der Winkel a und b, also $CS = \cos a - \cos b$ oder $CS = \cos b - \cos a$, je nachdem $\cos a$ grösser oder kleiner als $\cos b$ ist. Da aber in der Formel 2) nur das Quadrat von CS vorkommt, so bedarf es dieser Unterscheidung nicht, und wir können jedenfalls $\overline{CS}^2 = (\cos a - \cos b)^2$ setzen. Liegen dagegen M und N auf entgegengesetzten Seiten von O, so ist $CS = MN$ gleich der Summe der Linien OM und ON, oder auch

Fig. 137.



$$CS = OM - (-ON).$$

Für diesen Fall haben wir aber $-ON = \cos AOC = \cos b$, weil entgegengesetzt liegende Cosinus negativ sind, und mithin wieder $CS = \cos a - \cos b$, wie im vorigen Falle; es ist daher unter allen Umständen

$$\overline{CS}^2 = (\cos a - \cos b)^2.$$

Durch eine völlig analoge Betrachtung überzeugt man sich, dass $\overline{BS}^2 = (OP - OQ)^2$ in voriger Figur jedenfalls $= (\sin a - \sin b)^2$ zu setzen ist, es mögen nun M und N auf derselben Seite von O aus liegen oder nicht. Substituiren wir die Werthe von $\overline{CS}^2$ und $\overline{BS}^2$ in die Gleichung 2) und berücksichtigen, dass

$$\overline{BC}^2 = Chord^2 (a - b) = 2 [1 - \cos (a - b)]$$

ist, so verwandelt sich die Gleichung 2) in die nachstehende

$$\begin{aligned} & 2 - 2 \cos (a - b) \\ & = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 \\ & = \cos^2 a + \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \\ & \qquad + \sin^2 a + \sin^2 b - 2 \sin a \sin b ; \end{aligned}$$

vermöge der Beziehung $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ wird hieraus nach gehöriger Hebung

3) $$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

wonach sich also der Cosinus der Winkeldifferenz $a - b$ berechnen lässt, wenn die Sinus und Cosinus der einzelnen Winkel a und b bekannt sind.

Eine Formel für den Sinus der Winkeldifferenz $a - b$ ist hieraus leicht zu erhalten, wenn man sich erinnert, dass

$$\sin(a-b) = \sqrt{1 - \cos^2(a-b)}$$

sein muss; nun giebt aber die Quadratur

$$\cos^2(a-b) = \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b$$
$$+ 2 \cos a \cos b \sin a \sin b,$$

und wenn man diese Gleichung von der Eins abzieht,

$$\sin^2(a-b) = 1 - \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b$$
$$- 2 \sin a \cos b \cos a \sin b.$$

Setzt man hier für $\cos^2 a$ das gleichgeltende $1 - \sin^2 a$ und für $\sin^2 a$ das gleichgeltende $1 - \cos^2 a$, so wird

$$\sin^2(a-b) = 1 - (\cos^2 b + \sin^2 b)$$
$$+ \sin^2 a \cos b + \cos^2 a \sin^2 b$$
$$- 2 \sin a \cos b \cos a \sin b.$$

Die erste Zeile rechter Hand ist zusammen $= 0$ und das Uebrigbleibende ein vollständiges Quadrat, nämlich $= (\sin a \cos b - \cos a \sin b)^2$, und mithin haben wir durch Wurzelausziehung

$$\sin(a-b) = \pm \{\sin a \cos b - \cos a \sin b\}.$$

Das Vorzeichen entscheidet sich durch die einfache Bemerkung, dass für $b = 0$ die Gleichung $\sin a = \sin a$ zum Vorschein kommen muss; man kann daher nur das obere Zeichen gebrauchen und dieses giebt

4) $$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Aus den Formeln 3) und 4) lassen sich nun leicht zwei andere ableiten, welche den Cosinus oder Sinus einer Winkelsumme finden lehren; setzen wir nämlich $a - b = c$, also $a = b + c$, so ist nach 3) und 4)

$$\cos c = \cos(b+c) \cos b + \sin(b+c) \sin b,$$
$$\sin c = \sin(b+c) \cos b - \cos(b+c) \sin b,$$

worin man $\cos(b+c)$ und $\sin(b+c)$ als zwei Unbekannte ansehen kann. Die Elimination derselben nach den bekannten Methoden der Algebra führt dann zu den Formeln:

$$\cos(b+c) = \cos b \cos c - \sin b \sin c,$$
$$\sin(b+c) = \sin b \cos b + \cos b \sin c,$$

oder, wenn man der Gleichförmigkeit wegen a für c schreibt,

5) $$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

6) $$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Um Formeln für die Tangente und Cotangente der Differenz

oder Summe zweier Winkel zu erhalten, braucht man nur die Beziehungen $\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$ und $\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$ in Anwendung zu bringen; so giebt die Gleichung 5), durch No. 4) dividirt,

$$\tan(a-b) = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch $\cos a \cos b$ dividirt,

7) $$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

Ebenso leicht hat man umgekehrt

$$\cot(a-b) = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\sin a \cos b - \cos a \sin b},$$

und wenn Zähler und Nenner durch $\sin a \sin b$ dividirt wird,

8) $$\cot(a-b) = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a}.$$

Aus den Gleichungen 5) und 6) ergeben sich mittelst desselben Verfahrens die Formeln

9) $$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$

10) $$\cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot b + \cot a}.$$

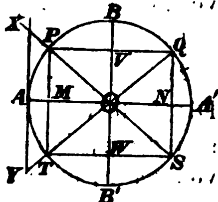
Es knüpft sich an diese Grundformeln der Trigonometrie noch eine eigenthümliche Bemerkung. Lassen wir nämlich in den Gleichungen 3), 4), 7) und 8) den Winkel a in Null übergehen, so gelangen wir zu den Beziehungen

11) $$\begin{cases} \cos(-b) = +\cos b, & \sin(-b) = -\sin b, \\ \tan(-b) = -\tan b, & \cot(-b) = -\cot b, \end{cases}$$

und es fragt sich nun, was man von denselben zu halten, d. h. was man unter einem negativen Winkel und dessen trigonometrischen Functionen zu verstehen habe. Nun sahen wir aber schon in §. 2, dass bei einem Winkel nicht nur seine Grösse, sondern auch die Drehungsrichtung, durch welche er entstanden ist, beachtet werden muss, und ferner sind wir in §. 39 darauf hingewiesen worden, dass entgegengesetzten Vorzeichen entgegengesetzte Lagen entsprechen. Beides zusammen berechtigt uns, das negative Vorzeichen des Winkels b auf eine entgegengesetzte Drehungsrichtung zu beziehen, und wir wollen daher, von jetzt

an, unter $+b$ und $-b$ Winkel verstehen, welche durch gleich grosse, aber nach entgegengesetzten Richtungen ausgeführte Drehungen entstanden sind. Demnach ist für $\angle AOP = +b$, $\angle AOT = -b$, sobald wir uns den Winkel AOP durch eine Drehung rechts herum und den Winkel AOT durch eine Drehung links herum erzeugt denken. Hiernach kann der Sinn der Gleichungen 11) leicht gefunden werden; es ist nämlich $\cos AOT = \cos AOP$, d. h. $\cos(+b) = \cos(-b)$, ferner $\sin AOT = MT$ und $\sin AOP = MP$, d. h. die Winkel AOT und AOP haben gleich grosse aber entgegengesetzt liegende Sinus, in Zeichen: $\sin(-b) = -\sin(+b)$; dasselbe gilt für die Tangenten und für die Cotangenten, so dass sich also die Gleichungen 11) als vollkommen richtig ausweisen, sobald man den Grundgedanken festhält, dass entgegengesetzte Lagen arithmetisch durch entgegengesetzte Vorzeichen ausgedrückt werden.

Fig. 138.



Es ist nun leicht zu sehen, dass die Gleichungen 3) bis 10) ebensowohl für positive als negative a und b gelten; lassen wir z. B. in No. 5) $-b$ an die Stelle von $+b$ treten, so wird

$$\cos[a + (-b)] = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b),$$

d. h.

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

und da diese Formel mit der in No. 3) verzeichneten völlig übereinstimmt, so dürfen wir in No. 5) b ebensowohl positiv als negativ nehmen, ohne die Richtigkeit dieser Formel zu stören. Dasselbe wird man ohne Mühe an allen übrigen bisher entwickelten Formeln bemerken und wir dürfen daher den wichtigen Satz aussprechen, dass die Formeln 3) bis 10) für alle möglichen a und b giltig bleiben.

§. 42.

Fortsetzung.

Die acht Formeln des vorigen Paragraphen lassen eine grosse Menge von Combinationen zu und werden dadurch

zu einer reichen Quelle von Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen zweier oder mehrerer Winkel. Wir wollen die hauptsächlichsten dieser Formeln hier entwickeln. Setzen wir in den Gleichungen 5) und 6) des vorigen Paragraphen $b = a$, so wird

1) $$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a,$$
2) $$\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

Die erste von diesen Formeln ist noch zweier Umgestaltungen fähig, indem man entweder $1 - \cos^2 a$ an die Stelle von $\sin^2 a$, oder $1 - \sin^2 a$ für $\cos^2 a$ setzt; das Erste giebt

3) $$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

und das Zweite

4) $$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a,$$

wofür man auch schreiben kann

5) $$1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a,$$
6) $$1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a,$$

oder, wenn $2a = b$ gesetzt wird,

7) $$1 + \cos b = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} b,$$
8) $$1 - \cos b = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} b,$$

in welcher Gestalt die Formeln häufig angewendet werden. Sieht man $\cos b$ als bekannt, dagegen $\cos \frac{1}{2} b$ und $\sin \frac{1}{2} b$ als unbekannt an, so ergiebt sich

9) $$\cos \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{1 + \cos b}{2}},$$

10) $$\sin \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{1 - \cos b}{2}},$$

wonach man Cosinus und Sinus des halben Winkels aus dem Cosinus des ganzen Winkels berechnen kann. Durch Division erhält man ferner aus den Gleichungen 7) und 8)

11) $$\frac{1 + \cos b}{1 - \cos b} = \cot^2 \tfrac{1}{2} b, \quad \frac{1 - \cos b}{1 + \cos b} = \tan^2 \tfrac{1}{2} b,$$

und durch Wurzelausziehung

12) $$\cot \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{1 + \cos b}{1 - \cos b}}, \quad \tan \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{1 - \cos b}{1 + \cos b}}.$$

Kehren wir nach den besondern Entwickelungen für die trigonometrischen Functionen ganzer und halber Winkel wieder zu den allgemeinen Formeln 3), 4), 5) und 6) des vorigen Paragraphen zurück, so ergiebt sich zunächst

durch Addition der Gleichungen 3) und 5), wobei wir die rechte Seite zur linken machen,

13) $2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$

und ebenso durch Subtraction

14) $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$.

Die Addition und Subtraction der Gleichungen 4) und 6) führt auf ähnliche Weise zu den Formeln

15) $2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$,

16) $2 \cos a \sin b = \sin(a + b) - \sin(a - b)$,

und diese Formeln dienen dazu, um das Product zweier Sinus, zweier Cosinus, oder eines Sinus und eines Cosinus in eine Summe oder Differenz von Cosinus oder Sinus zu zerlegen.

Setzen wir in den soeben gewonnenen vier Formeln

$$a + b = A,$$
$$a - b = B,$$

so folgt zunächst

$$a = \tfrac{1}{2}(A + B), \quad b = \tfrac{1}{2}(A - B),$$

und wenn wir diese vier Werthe substituiren, wobei wir wieder die rechten Seiten der Gleichungen zuerst hinschreiben, so gelangen wir zu der folgenden Gruppe von Formeln:

17) $\cos B + \cos A = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(A - B)$,

18) $\cos B - \cos A = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(A - B)$,

19) $\sin A + \sin B = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(A - B)$,

20) $\sin A - \sin B = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(A - B)$.

Dieser Gleichungen bedient man sich, um die Summe oder Differenz zweier Cosinus oder Sinus in ein Product zu verwandeln, und es sind demnach diese Formeln gewissermaassen als die Umkehrungen der vorhergehenden vier Formeln zu betrachten.

Durch Division leitet man aus den vorigen vier Formeln leicht noch die folgenden ab:

21) $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \tfrac{1}{2}(A + B)$,

22) $\dfrac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \tfrac{1}{2}(A - B)$,

23) $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} = -\cot \tfrac{1}{2}(A - B)$,

24) $\dfrac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} = -\cot \tfrac{1}{2}(A + B)$,

25) $$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \tan \tfrac{1}{2}(A+B) \cdot \cot \tfrac{1}{2}(A-B),$$

26) $$\frac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B} = -\cot \tfrac{1}{2}(A+B) \cdot \cot \tfrac{1}{2}(A-B).$$

Endlich kann man auch leicht zu Formeln gelangen, welche für die Tangenten und Cotangenten Das leisten, was die Formeln 17) und 20) für die Sinus und Cosinus. Es ist nämlich:

$$\tan A + \tan B = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}$$
$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cdot \cos B},$$

d. h., wenn man die Formel für $\sin(A+B)$ benutzt,

27) $$\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cdot \cos B}.$$

Genau dasselbe Verfahren liefert ohne Mühe die entsprechenden Formeln:

28) $$\tan A - \tan B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cdot \cos B},$$

29) $$\cot B + \cot A = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \cdot \sin B},$$

30) $$\cot B - \cot A = \frac{\sin(A-B)}{\sin A \cdot \sin B}.$$

Eine andere Gruppe von Formeln ergiebt sich, wenn man von den Quadraten der vier Gleichungen

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$
$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B,$$
$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$
$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

ausgeht. Das Quadrat der ersten Gleichung ist

$$\sin^2(A+B) = \sin^2 A \cos^2 B + \cos^2 A \sin^2 B$$
$$+ 2 \sin A \cos A \sin B \cos B;$$

ersetzt man hier $\cos^2 B$ durch $1 - \sin^2 B$ und $\cos^2 A$ durch $1 - \sin^2 A$, so erhält man

$$\sin^2(A+B) = \sin^2 A + \sin^2 B$$
$$- 2 \sin^2 A \sin^2 B + 2 \sin A \cos A \sin B \cos B$$
$$= \sin A^2 + \sin^2 B$$
$$+ 2 \sin A \sin B (\cos A \cos B - \sin A \sin B),$$

d. i.

31) $$\sin^2(A+B) = \sin^2 A + \sin^2 B + 2 \sin A \sin B \cos(A+B).$$

Aus der zweiten der obigen Gleichungen zieht man mittelst desselben Verfahrens

32) $\sin^2(A-B) = \sin^2 A + \sin^2 B - 2 \sin A \sin B \cos(A-B)$;

dasselbe Resultat ergiebt sich auch, wenn man in No. 31) $-B$ an die Stelle von B treten lässt.

Das Quadrat der dritten von den obigen Gleichungen ist

$$\cos^2(A+B) = \cos^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B - 2 \cos A \sin A \cos B \sin B;$$

ersetzt man $\cos^2 B$ durch $1 - \sin^2 B$ und $\sin^2 A$ durch $1 - \cos^2 A$, so wird

$$\cos^2(A+B) = \cos^2 A + \sin^2 B - 2 \cos^2 A \sin^2 B - 2 \cos A \sin A \cos B \sin B$$
$$= \cos^2 A + \sin^2 B - 2 \cos A \sin B (\sin A \cos B + \cos A \sin B),$$

d. i.

33) $\cos^2(A+B) = \cos^2 A + \sin^2 B - 2 \cos A \sin B \sin(A+B)$.

Aus der vierten der obigen Formeln, oder wenn man B negativ nimmt, ergiebt sich das analoge Resultat

34) $\cos^2(A-B) = \cos^2 A + \sin^2 B + 2 \cos A \sin B \sin(A-B)$.

Alle hier entwickelten Gleichungen beziehen sich immer nur auf die trigonometrischen Functionen zweier Winkel, aber es reicht dies auch vollkommen aus, weil man bei mehreren Winkeln diese Formeln der Reihe nach in Anwendung bringen kann. Verlangt man z. B. eine Formel für $\sin(a+b+c)$, so betrachte man zuvörderst $b+c$ als einfache Grösse; es ist dann

$$\sin(a + \overline{b+c}) = \sin a \cos(b+c) + \cos a \sin(b+c),$$

und wenn man jetzt wieder $\cos(b+c)$ und $\sin(b+c)$ entwickelt, so wird

35) $\sin(a+b+c) = \sin a \cos b \cos c - \sin a \sin b \sin c + \cos a \sin b \cos c + \cos a \cos b \sin c$,

womit eine Formel gewonnen ist, welche den Sinus eines dreitheiligen Winkels finden lehrt, wenn die Sinus und Cosinus der einzelnen Bestandtheile gegeben sind. Für $b = c = a$ wird spezieller

$$\sin 3a = 3 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a,$$

oder, wenn man $1 - \sin^2 a$ für $\cos^2 a$ substituirt,

36) $$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a.$$

Man wird aus diesem Beispiele leicht abnehmen können, wie man sich in jedem anderen Falle, wo drei oder noch mehr Winkel vorkommen, zu verhalten hat. Eine bemerkenswerthe Entwickelung für eine beliebige Anzahl gewisser Winkel wollen wir im folgenden Paragraphen mittheilen.

§. 43.

Entwickelung von Summenformeln.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Summe der Cosinus von den Winkeln u, $2u$, $3u$, $4u$, ... nu zu finden und bezeichnen jene unbekannte Summe vorläufig mit S, wonach

$$S = \cos u + \cos 2u + \cos 3u + \ldots + \cos nu$$

ist. Diese Gleichung multipliciren wir mit $2\sin\frac{1}{2}u$ und zerlegen rechter Hand jedes Product in eine Sinusdifferenz, indem wir die Formel

$$2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

der Reihe nach für $A = u, 2u, 3u, \ldots nu$ und für $B = \frac{1}{2}u$ benutzen; es wird dann

$$\begin{aligned} 2S\sin\tfrac{1}{2}u = & \sin\tfrac{3}{2}u - \sin\tfrac{1}{2}u \\ & + \sin\tfrac{5}{2}u - \sin\tfrac{3}{2}u \\ & + \sin\tfrac{7}{2}u - \sin\tfrac{5}{2}u \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & + \sin\frac{2n+1}{2}u - \sin\frac{2n-1}{2}u. \end{aligned}$$

Nach gehöriger Hebung vereinfacht sich diese Gleichung, nämlich

$$2S\sin\tfrac{1}{2}u = -\sin\tfrac{1}{2}u + \sin\frac{2n+1}{2}u = -\sin\tfrac{1}{2}u + \sin(n+\tfrac{1}{2})u;$$

hieraus wird S leicht gefunden, und zwar ist zufolge der ursprünglichen Bedeutung von S

1) $$\begin{cases} \cos u + \cos 2u + \cos 3u + \ldots + \cos nu \\ = -\frac{1}{2} + \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u}. \end{cases}$$

Durch ein ganz ähnliches Verfahren gelangt man zur Kenntniss der Summe

$$T = \cos u - \cos 2u + \cos 3u - \ldots \pm \cos nu,$$

wobei im letzten Summanden das obere Zeichen einem ungeraden n, das untere einem geraden n entspricht. Man multiplicirt nämlich die vorstehende Gleichung mit $2 \cos \frac{1}{2} u$ und zerlegt rechter Hand jedes Cosinusproduct in eine Summe von Cosinus; dies giebt

$$\begin{aligned} 2 T \cos \tfrac{1}{2} u = & \cos \tfrac{1}{2} u + \cos \tfrac{3}{2} u \\ & - \cos \tfrac{3}{2} u - \cos \tfrac{5}{2} u \\ & + \cos \tfrac{5}{2} u + \cos \tfrac{7}{2} u \\ & - \cos \tfrac{7}{2} u - \cos \tfrac{9}{2} u \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & \pm \cos \frac{2n-1}{2} u \pm \cos \frac{2n+1}{2}, \end{aligned}$$

d. i. nach gehöriger Hebung

$$2 T \cos \tfrac{1}{2} u = \cos \tfrac{1}{2} u \pm \cos (n + \tfrac{1}{2}) u.$$

Hieraus findet sich T, nämlich

$$2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \cos u - \cos 2u + \cos 3u - \ldots \pm \cos nu \\ & = \tfrac{1}{2} \pm \frac{\cos (n + \frac{1}{2}) u}{2 \cos \frac{1}{2} u}. \end{aligned} \right.$$

Dasselbe Resultat kann man auch dadurch erhalten, dass man in No. 1) $180^0 - u$ an die Stelle von u treten lässt.

Die benutzte Methode führt noch zu mehreren ähnlichen Reihensummirungen, von denen nur die folgenden hier stehen mögen:

$$3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sin u + \sin 2u + \sin 3u + \ldots + \sin nu \\ & = \tfrac{1}{2} \cot \tfrac{1}{2} u - \frac{\cos (n + \frac{1}{2}) u}{2 \sin \frac{1}{2} u}. \end{aligned} \right.$$

$$4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sin u - \sin 2u + \sin 3u - \ldots \pm \sin nu \\ & = \tfrac{1}{2} \tan \tfrac{1}{2} u \pm \frac{\sin (n + \frac{1}{2}) u}{2 \cos \frac{1}{2} u}. \end{aligned} \right.$$

Die Richtigkeit derselben ist leicht zu prüfen; multiplicirt man nämlich die erste Gleichung mit $2 \sin \frac{1}{2} u$, die zweite mit $2 \cos \frac{1}{2} u$ und zerlegt die linker Hand vorkommenden Producte, so gelangt man in beiden Fällen zu identischen, also richtigen Gleichungen.

Die entwickelten vier Formeln können unter Anderem benutzt werden, um die Summe der Cosinus oder Sinus solcher Winkel zu finden, die in arithmetischer Progression fortschreiten. So erhält man mit Hilfe der bekannten Formel für $\cos (a + b)$

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots + \cos(\alpha+\overline{m-1}\,\beta)$$
$$= \cos\alpha\,[1 + \cos\beta + \cos 2\beta + \ldots + \cos(m-1)\beta]$$
$$- \sin\alpha\,[\quad \sin\beta + \sin 2\beta + \ldots + \sin(m-1)\beta],$$

und wenn man hier die Formeln 1) und 3) für $u=\beta$, $n=m-1$ benutzt, so wird die rechte Seite

$$\cos\alpha\left[\tfrac{1}{2} + \frac{\sin(m-\frac{1}{2})\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\right] - \sin\alpha\left[\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\beta - \frac{\cos(m-\frac{1}{2}\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\right],$$

was sich noch vereinfacht, sobald man Alles auf den gemeinsamen Nenner $2\sin\frac{1}{2}\beta$ bringt. Das Endresultat ist

$$5)\quad \begin{cases}\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots + \cos(\alpha+\overline{m-1}\,\beta) \\ = \dfrac{\sin[\alpha+(m-\frac{1}{2})\beta] - \sin(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\beta}.\end{cases}$$

Auf ähnliche Weise erhält man die analoge Formel

$$6)\quad \begin{cases}\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots + \sin(\alpha+\overline{m-1}\,\beta) \\ = \dfrac{\cos(\alpha-\frac{1}{2}\beta) - \cos[\alpha+(m-\frac{1}{2})\beta]}{2\sin\frac{1}{2}\beta}.\end{cases}$$

Im Anhange zur Trigonometrie wird man eine bemerkenswerthe Anwendung dieser Formeln finden.

§. 44.

Die Berechnung der trigonometrischen Tafeln.

Wenn die Einführung der trigonometrischen Functionen überhaupt von Nutzen sein soll, so muss man im Besitze einer Tabelle sein, aus welcher man die Zahlwerthe der trigonometrischen Functionen ohne Weiteres entnehmen und umgekehrt auch den zu einer gegebenen Function gehörenden Winkel finden kann. Die natürlichste Einrichtung einer derartigen sogenannten trigonometrischen Tafel bestünde offenbar darin, dass man sieben Verticalreihen (Colonnen) neben einander stellte, von denen die erste die Winkel, etwa von Minute zu Minute fortschreitend ($u = 1'$, $2'$, $3'$ u. s. w.), enthielte, während in den übrigen Colonnen die sechs trigonometrischen Functionen nebeneinander verzeichnet wären, wodurch die ganze Aufstellung den bekannten logarithmischen Tafeln sehr ähnlich werden würde. Man übersieht nun auf der Stelle, dass die Berechnung

einer derartigen Tabelle möglich sein wird, wenn man erst den Sinus von einer Minute kennt, woraus sich die übrigen Functionen dieses Winkels sogleich finden lassen; man hätte nämlich, sobald wir $\sin 1'$, $\cos 1'$, $\tan 1'$ und $\cot 1'$ als bekannt voraussetzten,

$$\sin 2' = 2 \sin 1' \cos 1',$$

woraus dann wieder $\cos 2'$, $\tan 2'$, $\cot 2'$ folgen; ferner wäre

$$\sin 3' = \sin (2' + 1') = \sin 2' \cos 1' + \cos 2' \sin 1',$$

wodurch zunächst $\sin 3'$ und nachher $\cos 3'$, $\tan 3'$, $\cot 3'$, bekannt werden; weiter würde dann sein

$$\sin 4' = \sin (3' + 1') = \sin 3' \cos 1' + \cos 3' \sin 1',$$

und dieses giebt $\sin 4'$, $\cos 4'$, $\tan 4'$, $\cot 4'$; wie man dieses Verfahren immer fortsetzen kann, erhellt ohne Schwierigkeit. Um nun zu dem Zahlwerthe von $\sin 1'$ zu gelangen, stellen wir die folgenden Betrachtungen an, welche sich überhaupt allgemeiner auf die trigonometrischen Functionen kleiner Winkel beziehen.

Zufolge einer Eigenschaft des Cosinus haben wir

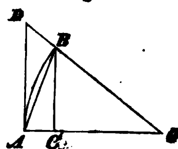
$$\cos u = 1 - \tfrac{1}{2} Chord^2 u,$$

und folglich, wenn wir an die Stelle der Sehne von u den Bogen von u setzen, wo nun $Chord\, u < Arc\, u$ ist,

$$\cos u > 1 - \tfrac{1}{2} Arc^2 u.$$

Andererseits muss $\cos u < 1$ sein, und wir haben daher zwei Gränzen, zwischen denen der Cosinus jederzeit enthalten ist. Für den Sinus findet man ein Paar ähnliche Gränzen auf folgende Weise. Es sei $AO = 1$, $\angle AOB = u$, $BC = \sin u$, $AD = \tan u$, so hat man vermöge der Bemerkung, dass die Fläche des Dreiecks AOD mehr als die Fläche des Sectors AOB beträgt,

Fig. 139.



$$\tfrac{1}{2} \tan u > \tfrac{1}{2} Arc\, u \text{ oder } \frac{\sin u}{\cos u} > Arc\, u,$$

mithin

$$\sin u > Arc\, u \,.\, \cos u > Arc\, u\, (1 - \tfrac{1}{2} Arc^2 u).$$

Andererseits ist die Dreiecksfläche AOB kleiner als die Fläche des gleichnamigen Sectors, daher

$$\tfrac{1}{2} \sin u < \tfrac{1}{2} Arc\, u \text{ oder } \sin u < Arc\, u,$$

wie auch unmittelbar aus dem Grundsatze in §. 1 *b* geschlossen werden kann.

Denken wir uns den Winkel *u* nicht in Graden, Minuten u. s. w., sondern in Theilen des Halbmessers ausgedrückt und nennen δ die Länge des Bogens *Arc u*, so sind *sin u* und *sin* δ gleichbedeutend und die vorigen Beziehungen nehmen die einfachere Form an:

1) $\cos\delta < 1$ und $\cos\delta > 1 - \frac{1}{2}\delta^2$,

2) $\sin\delta < \delta$ und $\sin\delta > \delta - \frac{1}{2}\delta^3$.

Hieraus lassen sich leicht Schlüsse auf die numerischen Werthe der Sinus und Cosinus kleiner Winkel machen, sobald man noch berücksichtigt, dass die trigonometrischen Tafeln wegen der Irrationalität mancher Sinus $\left(\text{z. B. } \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nicht mit vollkommener Genauigkeit, sondern nur mit einem bestimmten Grade der Genauigkeit, etwa auf sieben Decimalstellen berechnet, hergestellt werden können. Denken wir uns nämlich in No. 2) den Bogen δ so klein, dass $\frac{1}{2}\delta^2$ auf die siebente Decimalstelle keinen Einfluss ausübt, so sind in diesen sieben Stellen die Grössen 1 und $1 - \frac{1}{2}\delta^2$ gar nicht verschieden folglich ist dann auch $\cos\delta = 1$ zu setzen. Aus der Bedingung

$$\frac{1}{2}\delta^2 < \frac{1}{10^7} < \frac{10}{10^8}$$

folgt aber

$$\delta < \frac{\sqrt{20}}{10^4}, \text{ d. h. } \delta < 0{,}0004472,$$

oder in Graden ausgedrückt: $\delta < 0^0\, 1'\, 33''$, und es ist daher der Cosinus eines kleineren Winkels auf sieben Decimalen genau der Einheit gleich. Denken wir uns ferner in No. 2) δ so klein, dass

$$\frac{1}{2}\delta^3 < \frac{1}{10^7} < \frac{100}{10^9},$$

so stimmen die Grössen δ und $\delta - \frac{1}{2}\delta^3$ in sieben Decimalen überein und mithin ist dann $\sin\delta = \delta$. Aus der obigen Ungleichung folgt aber

$$\delta < \frac{\sqrt[3]{200}}{10^3}, \text{ d. h. } \delta < 0{,}0058480,$$

oder in Graden:

$$\delta < 0^0\, 20'\, 6'',$$

und es ist daher der Sinus eines kleineren Winkels auf sieben Decimalen genau dem zugehörigen Bogen gleich.

Die gemachten Bemerkungen bieten ein leichtes Mittel dar, um den Anfang einer trigonometrischen Tafel, nämlich die Functionen von 1′, 2′, ... bis 20′ zu berechnen, indem man zunächst die Sinus aus der Gleichung $\sin\delta = \delta$ und aus diesen die übrigen Functionen bestimmt. Um nun weiter zu gelangen, kann man sich der Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ bedienen, denen man in dem Falle, wo β sehr klein ist, eine bequemere Form geben kann. Setzen wir nämlich in der Gleichung

$$\sin(\alpha + \delta) = \sin\alpha\cos\delta + \cos\alpha\sin\delta$$

für $\cos\delta$ und $\sin\delta$ die Grössen 1 und δ, welche mehr als jene betragen, so ist

3) $$\sin(\alpha + \delta) < \sin\alpha + \delta\cos\alpha;$$

setzen wir dagegen $1 - \frac{1}{2}\delta^2$ für $\cos\delta$ und $\delta - \frac{1}{2}\delta^3$ für $\sin\delta$, so haben wir zu wenig genommen und es ist

$$\sin(\alpha + \delta) > \sin\alpha(1 - \tfrac{1}{2}\delta^2) + (\delta - \tfrac{1}{2}\delta^3)\cos\alpha,$$

oder

4) $$\sin(\alpha + \delta) > \sin\alpha + \delta\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\delta^2\sin\alpha - \tfrac{1}{2}\delta^3\cos\alpha.$$

Beträgt nun δ so wenig, dass $\frac{1}{2}\delta^2$ auf die siebente Decimalstelle keinen Einfluss hat, ist also, wie früher, $\delta < 0^0\,1'\,33''$, so haben wir um so mehr

$$\tfrac{1}{2}\delta^2\sin\alpha < \frac{1}{10^7},$$

$$\tfrac{1}{2}\delta^3\cos\alpha < \frac{1}{10^7},$$

und folglich sind bei einer auf sieben Decimalstellen geführten Rechnung die rechten Seiten der Ungleichungen 3) und 4) nicht von einander verschieden, d. h.

5) $$\sin(\alpha + \delta) = \sin\alpha + \delta\cos\alpha,$$

wonach sich aus dem Sinus und Cosinus des Winkels α der Sinus von $\alpha + \delta$ sehr leicht berechnen lässt, sobald nur $\delta < 0^0\,1'\,33''$ ist. Ein ganz ähnliches Verfahren lässt sich für den Cosinus anwenden. Aus der Gleichung

$$\cos(\alpha + \delta) = \cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta$$

folgt nämlich, wenn der Minuendus zu gross und der Subtrahendus zu klein genommen wird,

$$\cos(\alpha + \delta) < \cos\alpha - (\delta - \tfrac{1}{6}\delta^3)\sin\alpha,$$

oder

6) $$\cos(\alpha + \delta) < \cos\alpha - \delta\sin\alpha + \tfrac{1}{6}\delta^3\sin\alpha,$$

und wenn umgekehrt der Minuendus zu klein und der Subtrahendus zu gross genommen wird,

$$\cos(\alpha + \delta) > \cos\alpha\,(1 - \tfrac{1}{2}\delta^2) - \delta\sin\alpha,$$

oder

7) $$\cos(\alpha + \delta) > \cos\alpha - \delta\sin\alpha - \tfrac{1}{2}\delta^2\cos\alpha.$$

Für $\frac{1}{2}\delta^2 < \frac{1}{10^7}$ stimmen die beiden rechten Seiten der Ungleichungen 6) und 7) auf sieben Decimalen überein und daher ist bei dieser Genauigkeit für $\delta < 0^0\,1'\,33''$

8) $$\cos(\alpha + \delta) = \cos\alpha - \delta\sin\alpha.$$

Ebenso leicht würde man zu den entsprechenden Formeln

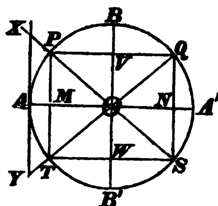
9) $$\sin(\alpha - \delta) = \sin\alpha - \delta\cos\alpha,$$

10) $$\cos(\alpha - \delta) = \cos\alpha + \delta\sin\alpha$$

gelangen können, indem man entweder von den Formeln für $\sin(\alpha + \delta)$ und $\cos(\alpha + \delta)$ ausgeht, oder in den Gleichungen 5) und 8) δ negativ nimmt.

Um den Gebrauch der vorigen Formeln an einem Beispiele zu zeigen, wollen wir vorerst den Zusammenhang zwischen dem Sinus und dem Umfange eines regelmässigen Sehnenvielecks entwickeln. Für $\angle AOP = u$ ist nämlich $\angle POT = 2u$, $PT = Chord\,2u$ und wegen $MP = \frac{1}{2}PT$

Fig. 140.



11) $$\sin u = \tfrac{1}{2}\,Chord\,2u.$$

Nehmen wir den beliebigen Winkel u gleich $\frac{180^0}{n}$, wo n eine ganze positive Zahl bedeuten möge, so wird

$$\sin\frac{180^0}{n} = \tfrac{1}{2}\,Chord\,\frac{360^0}{n} = \tfrac{1}{2}s_n,$$

wenn wir, wie früher, unter s_n die Seite des regulären Sehnenvielecks von n Seiten verstehen; führen wir statt s_n den Umfang $= n\,s_n$ in die vorige Formel ein, so ist jetzt

12) $$\sin\frac{180^0}{n} = \frac{e_n}{2n}.$$

Durch eine vollkommen ähnliche und ebenso einfache Betrachtung überzeugt man sich von der Richtigkeit der Gleichung

13) $$tan\ \frac{180^0}{n} = \frac{u_n}{2n},$$

worin u_n den Umfang des regelmässigen Tangentenvielecks von n Seiten bezeichnet. Der Halbmesser des Kreises ist dabei, wie immer, $= 1$.

Nehmen wir beispielsweis $n = 192$, so kennen wir den Werth von e_n aus der Tabelle in §. 32 und wir haben daher

$$sin\ \frac{180^0}{192} = \frac{2 \,.\, 3{,}1414524}{2 \,.\, 192},$$

oder, wenn die Divisionen beiderseits ausgeführt werden,

$$sin\ (0^0\, 56'\, 15'') = 0{,}0163617,$$

und ebenso findet man aus der Formel 13)

$$tan\ (0^0\, 56'\, 15'') = 0{,}0163639.$$

Dividirt man den Sinus durch die Tangente, so ergiebt sich der Cosinus:

$$cos\ (0^0\, 56'\, 15'') = 0{,}9998662.$$

Um hieraus den Sinus von einem Grade zu finden, müssen wir den Winkel $0^0\, 56'\, 15''$ um $0^0\, 3'\, 45''$ zunehmen lassen; setzen wir nun in den Formeln 3) und 4) $\alpha = 0^0\, 56'\, 15''$ und $\delta = 0^0\, 3'\, 45''$ oder in Theilen des Halbmessers ausgedrückt $\delta = 0{,}0010908$, so haben wir

$$sin\ 1^0 < 0{,}0163617 + (0{,}0010908) \,.\, (0{,}9998662)$$

und

$$sin\ 1^0 > 0{,}0163617 + (0{,}0010908) \,.\, (0{,}9998662)$$
$$- \tfrac{1}{2} (0{,}0010908)^2 \,.\, (0{,}0163617)$$
$$- \tfrac{1}{6} (0{,}0010908)^3 \,.\, (0{,}9998662).$$

Man sieht aber sehr leicht, dass die negativen Glieder auf die siebente Decimalstelle keinen Einfluss ausüben können, und daher ist auf sieben Decimalen genau

$$sin\ 1^0 = 0{,}0163617 + (0{,}0010908) \,.\, (0{,}9998662)$$
$$= 0{,}0163617 + 0{,}0010907,$$

d. h.

$$sin\ 1^0 = 0{,}0174524.$$

Hieraus lassen sich nun unmittelbar die übrigen trigonometrischen Functionen desselben Winkels ableiten; wendet man nachher die Formeln für $sin\ (\alpha + \beta)$ und $cos\ (\alpha + \beta)$ an, indem man $\beta = 1^0$ und α der Reihe nach

$= 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ \ldots$ setzt, so kann man zu den Sinus und Cosinus der Winkel aller ganzen Grade gelangen. Die Sinus und Cosinus derjenigen Winkel, welche zwischen zwei ganzen Graden liegen, lassen sich ebenso successiv mittelst der einfacheren Formeln 5), 7), 9) und 10) berechnen. Dieselben Formeln dienen auch zur Einschaltung, d. h. zur Aufsuchung des Sinus und Cosinus eines Winkels, welcher nicht unmittelbar in den gewöhnlichen nach Minuten fortschreitenden Tafeln vorkommt, sondern um weniger als 1′ von einem in den Tafeln stehenden Winkel verschieden ist.

Cap. IX.

Die Berechnung des Dreiecks.

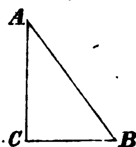
---

§. 45.

Die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.

Zur Bestimmung des rechtwinkligen Dreiecks reichen schon zwei (ausser dem rechten Winkel) gegebene Stücke hin, und es handelt sich folglich jedesmal um die Berechnung eines dritten Stückes. Diese ist sehr leicht, wenn man berücksichtigt, dass in den Definitionen der trigonometrischen Functionen alle möglichen Seitenverhältnisse und ein Winkel vorkommen, und man hat sich daher nur an jene Formeln zu halten. Um dies genauer zu erörtern, sei in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, so dass also die gleichnamigen Seiten und Winkel einander gegenüber liegen, so gelten folgende Gleichungen:

Fig. 141.



1) $$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A,$$

2) $$\cos B = \frac{a}{c} = \sin A,$$

3) $$\tan B = \frac{b}{a} = \cot A,$$

4) $$\cot B = \frac{a}{b} = \tan A,$$

5) $$\sec B = \frac{c}{a} = \csc A,$$

6) $$\csc B = \frac{c}{b} = \sec A,$$

welche in folgender Weise zur Auflösung der das rechtwinklige Dreieck betreffenden Aufgaben benutzt werden können.

I. Gegeben seien die beiden Katheten a und b.

Hier könnte man erstlich die Hypotenuse c suchen, was aber keine Aufgabe der Trigonometrie ist, da dem Pythagoräischen Satze zufolge die Gleichung gilt

7) $$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Zweitens sind die Winkel B und A zu bestimmen; B findet sich unmittelbar mit Hilfe der Gleichung 3), und zwar wenden wir uns gerade an diese, weil in ihr die beiden gegebenen Katheten a, b und der gesuchte Winkel B vorkommen; also ist

8) $$\tan B = \frac{b}{a}$$

und die trigonometrischen Tafeln verhelfen jetzt unmittelbar zur Kenntniss von B. Um noch A zu bestimmen, kann man sich an die Gleichung $A = 90^0 - B$ halten, welche jedoch voraussetzt, dass B nach der obigen Formel schon berechnet sei; will man dagegen A unmittelbar erhalten, so ist nur zu berücksichtigen, dass die Beziehung $\tan A = \tan(90^0 - B) = \cot B$ statt findet, zufolge deren nach No. 4) sein muss

9) $$\tan A = \frac{a}{b}.$$

II. Gegeben: Die Hypotenuse c und die anliegende Kathete a.

Um zunächst die andere Kathete b zu bestimmen, ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatze:

10) $$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}.$$

Der von den gegebenen Seiten eingeschlossene Winkel B findet sich nach Formel 2), nämlich

11) $$\cos B = \frac{a}{c},$$

und der letzte Winkel A aus der Bemerkung, dass $A = 90^0 - B$, folglich $\sin A = \cos B$ sein muss; man hat dann

12) $$\sin A = \frac{a}{c}.$$

Da sich die Sinus und Cosinus langsamer ändern als die Tangenten und Cotangenten, was besonders in der Nähe von 0° und 90° sehr in die Augen fällt, so ist es oft vortheilhafter, einen Winkel durch die letzteren als durch die ersteren trigonometrischen Functionen zu bestimmen, weil die Bestimmung durch Tangente oder Cotangente aus dem genannten Grunde schärfer sein muss. Ein paar Formeln zu diesem Zwecke ergeben sich auf der Stelle, wenn man den Werth von b aus No. 10) in No. 3) oder No. 4) substituirt und nachher bemerkt, dass $\tan A = \cot B$ oder $\cot A = \tan B$ ist; man erhält so

13) $$\tan B = \frac{\sqrt{(c+a)(c-a)}}{a} = \cot A,$$

14) $$\cot B = \frac{a}{\sqrt{(c+a)(c-a)}} = \tan A.$$

III. Gegeben: Die Kathete a und der anliegende Winkel B.

Der andere spitze Winkel A findet sich ohne Trigonometrie $= 90^0 - B$; wir haben daher noch die andere Kathete b und die Hypotenuse c zu berechnen. Hierzu dienen die Formeln 3) und 5), sobald man b und c darin als Unbekannte ansieht; es ergiebt sich dann:

15) $$b = a \tan B,$$

16) $$c = a \sec B = \frac{a}{\cos B}.$$

IV. Gegeben: Die Kathete b und der Gegenwinkel B.

Der Winkel A wird auf dieselbe Weise wie vorhin bestimmt; die andere Kathete a erhält man aus der Gleichung 4), nämlich

17) $$a = b \cot B,$$

und die Hypotenuse c findet sich aus No. 6):

18) $$c = b \csc B.$$

V. **Gegeben:** Die Hypotenuse c und der eine anliegende Winkel B.

Der zweite spitze Winkel A ist wieder $= 90^0 - B$, ferner entspringt aus No. 2) zur Berechnung der am Winkel B liegenden Kathete a die Formel:

19) $$a = c \cos B.$$

Die dem Winkel B gegenüber liegende Kathete b findet sich aus der Gleichung 1) nämlich:

20) $$b = c \sin B.$$

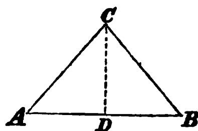
Die Formeln 7) bis 20) erschöpfen alle Fälle, welche beim rechtwinkligen Dreiecke vorkommen können.

§. 46.

Die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks.

Fällt man von der Spitze C eines gleichschenkligen Dreiecks eine Senkrechte CD auf die Basis AB desselben, so wird das gleichschenklige Dreieck ABC in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt und es ist daher unmittelbar einleuchtend, dass alle beim gleichschenkligen Dreiecke vorkommenden Aufgaben durch die Formeln des vorigen Paragraphen lösbar sein müssen. Setzen wir $AB = c$, $AC = BC = a$ und bezeichnen wir die Winkel auf dieselbe Weise wie vorhin, so sind folgende Fälle zu betrachten.

Fig. 142.



I. Gegeben: Der Schenkel a und der Winkel an der Spitze C.

Die Winkel $A = B$ finden sich leicht aus der Gleichung $C + A + A = 180^0$, nämlich:

1) $$A = 90^0 - \tfrac{1}{2} C.$$

Da $\angle ACD = \frac{1}{2} C$ und $AD = \frac{1}{2} c$ ist, so haben wir in dem rechtwinkligen Dreiecke ACD

$$\tfrac{1}{2} c = a \sin \tfrac{1}{2} C,$$

oder für die ganze Basis

2) $$c = 2a \sin \tfrac{1}{2} C.$$

II. Gegeben: Der Schenkel a und der Winkel an der Basis A.

Der Winkel an der Spitze C ist

3) $$C = 180^0 - 2A,$$

wie man ohne Trigonometrie weiss; die Basis c findet sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke ACD, worin $AD = AC . \cos A$, d. h. $\frac{1}{2}c = a \cos A$ ist; nämlich:

4) $$c = 2a \cos A.$$

III. Gegeben: Die Basis c und der Winkel an der Spitze C.

Der Winkel A wird wieder durch die Formel 1) bestimmt; der Schenkel a ergiebt sich aus der Gleichung 2), wenn man darin c als bekannt und a als unbekannt ansieht; nämlich:

5) $$a = \frac{c}{2 \sin \frac{1}{2} C} = \frac{1}{2} c \csc \frac{1}{2} C.$$

IV. Gegeben: Die Basis c und der Winkel an der Basis A.

Für die Berechnung von C gilt wieder die Formel 3); der Schenkel a wird erhalten, wenn man die Formel 4) umstellt; nämlich

6) $$a = \frac{c}{2 \cos A} = \frac{1}{2} c \sec A.$$

Die hier entwickelten sechs Formeln enthalten die Auflösung sämmtlicher das gleichschenklige Dreieck betreffenden Aufgaben.

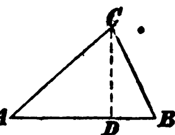
§. 47.

Fundamentalformeln zur Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.

Auf ähnliche Weise, wie die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks auf die Berechnung zweier rechtwinkligen Dreiecke zurückgeführt worden ist, lässt sich auch die Berechnung jedes schiefwinkligen Dreiecks bewerkstelligen, indem man von der einen Ecke C desselben eine Senkrechte auf die Gegenseite AB fällt. Hierbei sind aber

zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich dieses Perpendikel CD innerhalb oder ausserhalb des Dreieckes zu liegen kommt, und wir müssen daher, vor der Hand wenigstens, die Untersuchung nach diesen Fällen theilen.

Fig. 143.



Bezeichnen wir die Seiten BC, CA, AB, wie sie den Winkeln A, B, C gegenüberliegen, mit a, b, c, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ACD

$$CD = AC \,.\, \sin A = b \sin A,$$
$$AD = AC \,.\, \cos A = b \cos A,$$

ferner in dem rechtwinkligen Dreiecke BCD

$$CD = BC \,.\, \sin B = a \sin B,$$
$$BD = BC \,.\, \cos B = a \cos B.$$

Vergleichen wir die für CD erhaltenen Ausdrücke mit einander, so ist

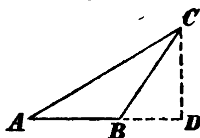
1) $$b \sin A = a \sin B.$$

Weil ferner $AB = AD + BD$, so haben wir weiter

2) $$c = b \cos A + a \cos B,$$

und dies sind die beiden Fundamentalformeln der Dreiecksberechnung, vorausgesetzt nämlich, dass CD innerhalb des Dreiecks liegt.

Fig. 144.



Für den zweiten Fall, wo CD ausserhalb des Dreieckes zu liegen kommt, sei $\angle\, CBD = B'$, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ACD wie oben

$$CD = AC \,.\, \sin A = b \sin A,$$
$$AD = AC \,.\, \cos A = b \cos A,$$

dagegen in dem rechtwinkligen Dreiecke BCD

$$CD = BC \,.\, \sin B' = a \sin B',$$
$$BD = BC \,.\, \cos B' = a \cos B'.$$

Hieraus folgt zunächst wie vorhin

3) $$b \sin A = a \sin B'$$

und ferner, weil $AB = AD - BD$ ist,

4) $$c = b \cos A - a \cos B'.$$

Nun war aber $B' = 180^0 - B$, wenn B den Dreieckswinkel bezeichnet; mithin haben wir

$$\sin B' = \sin (180^0 - B) = + \sin B,$$
$$\cos B' = \cos (180^0 - B) = - \cos B.$$

Durch Substitution dieser Werthe fallen die Gleichungen 3) und 4) mit den Gleichungen 1) und 2) völlig zusammen; die letzteren gelten daher ganz allgemein, sobald man nur auf die Bedeutung achtet, welche nach dem Früheren den trigonometrischen Functionen stumpfer Winkel zukommt.

Wiederholt man die ganze Betrachtung, indem man sich auch von B aus auf AC und zuletzt von A aus auf BC Senkrechte herabgelassen denkt, so gelangt man ohne Mühe zu den übrigen analogen Gleichungen und man hat dann überhaupt folgende sechs Gleichungen:

5) $$\begin{cases} b \sin A = a \sin B \\ a \sin C = c \sin A \\ c \sin B = b \sin C \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} c = b \cos A + a \cos B \\ b = a \cos C + c \cos A \\ a = c \cos B + b \cos C. \end{cases}$$

Die ersten drei Gleichungen lassen noch eine etwas veränderte Fassung zu; so kann man sie z. B. in die kurze Form

7) $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

zusammenziehen; ebenso leicht ist es, sie in Proportionen zu verwandeln; man hat dann

$$a : b = \sin A : \sin B$$
$$a : c = \sin A : \sin C$$
$$b : c = \sin B : \sin C,$$

oder, in einer compendiöseren Schreibweise dargestellt,

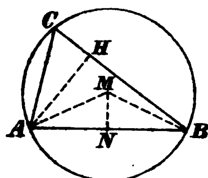
8) $$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C,$$

d. h. die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinus der Gegenwinkel.

Unsere bisherigen Grundformeln für das schiefwinklige Dreieck sind sämmtlich dadurch entstanden, dass wir das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt und auf letztere die Formeln des §. 45 angewendet haben; diese einfache Bemerkung lässt vermuthen, dass es nicht über-

flüssig sein würde, nun auch eine Zerlegung in gleichschenklige Dreiecke vorzunehmen und letztere nach den Formeln des §. 46 zu behandeln. Beschreiben wir einen Kreis um das Dreieck und ziehen nach dem Mittelpunkte M desselben von den Ecken A, B, C aus Gerade, so zerfällt das Dreieck ABC in drei gleichschenklige Dreiecke, von denen wir nur eines, nämlich AMB zu betrachten brauchen, weil die anderen daraus hervorgehen, wenn man an die Stelle der Seite $AB = c$ die übrigen Seiten treten lässt. Nun ist $AB = 2AM . \sin \frac{1}{2} AMB$, d. h. für $AM = r$ und unter der Bemerkung, dass $\angle AMB = 2C$, mithin $\frac{1}{2} AMB = C$ ist,

Fig. 145.



$$c = 2r \sin C;$$

daraus folgt sehr leicht

9) $$2r = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A},$$

und dies ist ein Commentar zur Gleichung 7), indem man nämlich erfährt, dass der gemeinschaftliche Betrag jener drei gleichen Quotienten den Durchmesser des umschriebenen Kreises darstellt.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen haben wir uns nun auf die einzelnen Aufgaben der Dreiecksberechnung einzulassen. Bei diesen handelt es sich immer darum, aus drei gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreiecks die übrigen drei Stücke zu finden, also drei unbekannte Grössen zu bestimmen. Eine derartige Bestimmung würde offenbar keine wesentlichen Schwierigkeiten darbieten, wenn man drei Gleichungen hätte, worin jene drei Unbekannten vorkämen; in der That aber sind wir im Besitze von drei solchen Gleichungen; erstlich ist nämlich immer

10) $$A + B + C = 180°;$$

ferner enthalten die Gleichungen

11) $$b \sin A = a \sin B,$$

12) $$c = b \cos A + a \cos B$$

fünf Stücke, nämlich die drei Seiten und zwei Winkel, und wenn also drei dieser Stücke gegeben sind, so reichen diese beiden Gleichungen schon hin, um die zwei übrigen

Stücke zu finden; nimmt man die erste Gleichung noch hinzu, so erhellt auf der Stelle die Möglichkeit der Bestimmung aller drei unbekannten Stücke des Dreiecks.

§. 48.

Dreiecksberechnung aus einer Seite und zwei Winkeln.

I. Es seien gegeben eine Seite c mit den beiden anliegenden Winkeln A und B.

Der dritte Winkel C findet sich unmittelbar:

1) $$C = 180^0 - (A + B);$$

um ferner die beiden Seiten a und b zu bekommen, nehmen wir aus der Gleichung 11) des vorigen Paragraphen

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

und substituiren dies in die zweite; es wird dann

$$c = \frac{a \sin B}{\sin A} \cos A + a \cos B,$$

oder nach Multiplication mit $\sin A$

$$c \sin A = a \left\{\sin B \cos A + \cos B \sin A\right\}$$
$$= a \sin (A + B).$$

Hieraus erhält man sogleich

2) $$a = \frac{c \sin A}{\sin (A + B)}$$

und nach der oben benutzten Gleichung für b

3) $$b = \frac{c \sin B}{\sin (A + B)}.$$

Es giebt übrigens noch einen kürzeren Weg, um zu den Formeln 2) und 3) zu gelangen; aus den Gleichungen

$$a \sin C = c \sin A,$$
$$b \sin C = c \sin B$$

folgt nämlich

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C},$$
$$b = \frac{c \sin B}{\sin C},$$

und wenn man C aus der Gleichung 1) nimmt, so ist $\sin C = \sin [180^0 - (A + B)] = \sin (A + B)$, wodurch man wieder auf die Formeln 2) und 3) geführt wird.

II. **Es seien gegeben eine Seite a, ein anliegender Winkel B und der Gegenwinkel A.**

Für den dritten Winkel C gilt wieder die Formel 1) und es bleiben daher noch die beiden Seiten b und c zu bestimmen. Von diesen findet sich die erste unmittelbar aus der Gleichung 11) des vorigen Paragraphen, da unter den gemachten Voraussetzungen b die einzige Unbekannte darin ist; also

$$4) \qquad b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

Substituiren wir diesen Werth in die Gleichung 12), so ergiebt sich c, nämlich

$$c = \frac{a \sin B}{\sin A} \cos A + a \cos B$$
$$= a \frac{\sin B \cos A + \cos B \sin A}{\sin A},$$

d. h.

$$5) \qquad c = \frac{a \sin (A + B)}{\sin A}.$$

Zu dieser Formel hätte man auch kürzer durch Umstellung der Formel 2) kommen können, indem man dort umgekehrt a als bekannte und c als unbekannte Seite betrachtete.

§. 49.

Dreiecksberechnung aus zwei Seiten und einem Winkel.

I. Gegeben seien zwei Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel A.

Um zunächst die dritte Seite a zu bestimmen, müssen wir aus den Gleichungen 11) und 12) des §. 47 den Winkel B herausschaffen; aus No. 11) folgt nun

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

und wenn wir hieraus den Cosinus von B bestimmen, welcher in No. 12) vorkommt,

$$\cos B = \pm \sqrt{1 - \frac{b^2 \sin^2 A}{a^2}} = \frac{\pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}}{a}.$$

Durch Substitution dieses Werthes verwandelt sich die Gleichung 12) wie folgt:

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$$

und enthält nur noch die Unbekannte a; durch Umstellung und Quadrirung wird

$$a^2 - b^2 \sin^2 A = (c - b \cos A)^2$$
$$= c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A.$$

Bringt man das negative Glied linker Hand auf die rechte Seite und berücksichtigt, dass

$$b^2 \sin^2 A + b^2 \cos^2 A = b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) = b^2$$

ist, so erhält man auf der Stelle

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

und durch Ausziehung der Quadratwurzel, welche hier nur positiv genommen werden kann*),

1) $$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}.$$

Um ferner den Winkel B zu bestimmen, ist es das Natürlichste, die im Anfange dieses Paragraphen entwickelte Gleichung zu benutzen, indem man für a seinen eben gefundenen Werth substituirt; so ergiebt sich

$$\sin B = \frac{b \sin A}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}}.$$

Eine einfachere Formel erhält man auf folgende Weise: wir schreiben die Gleichungen 11) und 12) des §. 47 in folgender Gestalt:

---

*) Ein kürzerer Weg zur Entwickelung dieser wichtigen Formel ist folgender. Nach Formel 31) in §. 42 hat man, wenn C für A geschrieben wird,

$$\sin^2 (B + C) = \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos (B + C);$$

bei der Anwendung auf das vorliegende Dreieck ist nun

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A, \quad \sin C = \frac{c}{a} \sin A,$$
$$B + C = 180^0 - A,$$
$$\sin (B + C) = \sin A, \quad \cos (B + C) = - \cos A,$$

folglich, wenn man diese Werthe substituirt

$$\sin^2 A = \frac{b^2}{a^2} \sin^2 A + \frac{c^2}{a^2} \sin^2 A - 2 \frac{bc}{a^2} \sin^2 A \cos A.$$

Nach beiderseitiger Hebung von $\sin^2 A$ und Multiplication mit a^2 wird diese Gleichung einerlei mit derjenigen, welche oben vor No. 1) steht.

$$a \sin B = b \sin A$$
$$a \cos B = c - b \cos A$$

und dividiren nun die erste Gleichung durch die zweite; es fällt dann a weg und wir erhalten

$$2) \qquad \tan B = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}.$$

Um C zu finden, kann man sich daran halten, dass $C = 180^\circ - (A + B)$, folglich

$$\tan C = -\tan (A + B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

ist, und für $\tan B$ seinen eben gefundenen Werth setzen; man bekommt hierdurch die Formel

$$3) \qquad \tan C = \frac{c \sin A}{b - c \cos A},$$

die sich auch kürzer durch Buchstabenvertauschung aus No. 2) ableiten lässt.

Die Formeln 1), 2) und 3) enthalten die vollständige Lösung unserer Aufgabe und daher ist für die reine Theorie nichts weiter zu verlangen; dagegen bringt aber die Praxis noch eine Forderung zum Vorschein: sie will nämlich Formeln, nach welchen die Rechnung möglichst leicht und kurz wird, und sie sieht daher solche Formeln am liebsten, welche eine ununterbrochene Anwendung der Logarithmen gestatten. Eine solche Formel lässt sich für a auf folgendem Wege erhalten. Es ist identisch

$$a^2 = (b - c)^2 + 2bc\,(1 - \cos A),$$
$$= (b - c)^2 + 4bc \sin^2 \tfrac{1}{2} A,$$
$$= (b - c)^2 \left\{ 1 + \frac{4bc \sin^2 \frac{1}{2} A}{(b - c)^2} \right\}.$$

Setzen wir nun den Quotienten

$$\frac{4bc \sin^2 \frac{1}{2} A}{(b - c)^2} = \tan^2 \varphi,$$

wo φ einen Winkel bedeutet, dessen Grösse sich aus der vorstehenden Gleichung bestimmen lässt, so wird

$$a^2 = (b - c)^2 \left\{ 1 + \tan^2 \varphi \right\} = (b - c)^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi},$$

woraus sich nun durch Wurzelausziehung a findet. Der Gang der Rechnung ist also jetzt der, dass man erst den Hilfswinkel φ mittelst der Formel

4) $$\tan\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}A}{b-c}\sqrt{bc}$$

bestimmt und daraus die Seite a herleitet, nämlich:

5) $$a = \frac{b-c}{\cos\varphi}.$$

Um nun auch eine Formel zur logarithmischen Berechnung der Winkel B und C zu erhalten, bilden wir die Summe und die Differenz der beiden Gleichungen

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} \text{ und } \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A};$$

es ergiebt sich dann

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A},$$

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin A};$$

ferner durch Division unter Anwendung von Formel 25) in §. 42

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C} = \tan\tfrac{1}{2}(B+C)\cot\tfrac{1}{2}(B-C).$$

Nun aber ist $B+C$ bekannt, nämlich $= 180^0 - A$, mithin $\tan\frac{1}{2}(B+C) = \tan(90^0 - \frac{1}{2}A) = \cot\frac{1}{2}A$, und folglich

$$\frac{b+c}{b-c} = \cot\tfrac{1}{2}A\cot\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\cot\frac{1}{2}A}{\tan\frac{1}{2}(B-C)};$$

aus dieser Gleichung findet man sogleich

6) $$\tan\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{b-c}{b+c}\cot\tfrac{1}{2}A,$$

womit die halbe Differenz der unbekannten Winkel B und C bestimmt wird. Da aber die halbe Summe dieser Winkel schon bekannt $= 90^0 - \frac{1}{2}A$ ist, so ergeben sich jetzt die Winkel B und C selber ohne Mühe.

Für die Praxis ist es übrigens am bequemsten, zunächst die Winkel B, C zu bestimmen und nachher die Seite a mittelst der Proportion $\sin B : \sin A = b : a$ zu berechnen.

II. Gegeben seien zwei Seiten a, b und ein Gegenwinkel A.

Die Gleichungen 11) und 12) in §. 47 enthalten in diesem Falle die beiden Unbekannten c und B; substituirt man $\cos B$ aus der ersten Gleichung in die zweite, so hat man durch ganz dasselbe Verfahren wie in I.

7) $$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}.$$

Hier unterscheiden wir nun, ob $a > b$, oder $a = b$, oder $a < b$ ist. Im ersteren Falle haben wir $b^2 < a^2$, oder

$$b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) < a^2,$$

mithin durch Transposition

$$b^2 \cos^2 A < a^2 - b^2 \sin^2 A,$$

und durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$b \cos A < \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}.$$

Wir können daher in No. 7) für $a > b$ nur das positive Vorzeichen gebrauchen, weil sonst c negativ ausfallen würde, was der Natur der Sache nach unmöglich ist; also haben wir

8) $$c = b \cos A + \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}; \quad a > b,$$

und es findet demnach keine Zweideutigkeit statt, wenn der gegebene Winkel (A) der grösseren von den gegebenen Seiten (a) gegenüberliegt.

Im zweiten Falle $b = a$ ist das Dreieck gleichschenklig und

$$b = a \cos A \pm \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 A}$$
$$= a \cos A \pm a \cos A.$$

Hier darf wieder nur das obere Zeichen genommen werden, weil die Basis c des gleichschenkligen Dreiecks nicht Null sein kann.

In dem dritten Falle $a < b$ unterscheiden wir drei Unterfälle; da nämlich $b \sin A$ weniger als b beträgt, so kann a entweder zwischen b und $b \sin A$ zu liegen kommen ($b > a > b \sin A$), oder es kann $a = b \sin A$, oder endlich $a < b \sin A$ sein. Im ersten Unterfalle ist $a^2 > b^2 \sin^2 A$, $a^2 - b^2 \sin^2 A$ positiv, die Wurzel daraus möglich und zugleich überzeugt man sich durch ähnliche Schlüsse wie vorhin, dass

$$b \cos A > \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$$

ist; hier bleibt es nun unentschieden, ob man in No. 7) das positive oder negative Vorzeichen nehmen soll; der Fall $a < b$ und zugleich $a > b \sin A$ ist daher zweideutig, weil ebensowohl

$$c = b \cos A + \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A},$$

wie $c = b \cos A - \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$

gesetzt werden kann, und es ist dies der schon in §. 8 II. behandelte Fall.

Für $a = b \sin A$ wird sehr einfach $a^2 - b^2 \sin^2 A = 0$, mithin ohne Zweideutigkeit $c = b \cos A$; in diesem Falle ist das Dreieck rechtwinklig.

Für $a < b \sin A$ wird die Differenz $a^2 - b^2 \sin^2 A$ negativ, mithin die Quadratwurzel daraus unmöglich, und folglich giebt es jetzt kein mögliches c, d. h. kein Dreieck mit den verlangten Stücken.

Stellen wir alle Fälle zusammen, so ist

c eindeutig für $a \geqq b$,
c zweideutig für $a < b$ und zugleich $a > b \sin A$,
c eindeutig für $a = b \sin A$,
c unmöglich für $a < b \sin A$.

Zur Bestimmung des Winkels B dient die Gleichung $b \sin A = a \sin B$ unmittelbar, nämlich sie giebt, wie schon erwähnt,

9) $$\sin B = \frac{b \sin A}{a};$$

auch diese Formel ist im Allgemeinen zweideutig, weil zu einem gegebenen Sinus ebensowohl ein spitzer Winkel B, als ein stumpfer $180^\circ - B$ gehören kann; diese Zweideutigkeit findet nicht statt, wenn nur ein Dreieck möglich, mithin c eindeutig ist, also in den Fällen $a \geqq b$ und $a = b \sin A$, wobei im letzteren Falle $B = 90^\circ$.

Der dritte Winkel C bestimmt sich durch die Gleichung $C = 180^\circ - (A + B)$. Für die Praxis ist es am bequemsten, die Winkel A und B zuerst aufzusuchen und nachher c mittelst der Proportion $\sin A : \sin C = a : c$ abzuleiten.

§. 50.

Dreiecksberechnung aus den drei Seiten.

Die Gleichungen 11) und 12) des §. 47 enthalten jetzt die beiden Unbekannten A und B; sucht man $\sin B$ aus der ersten Gleichung, bestimmt dann $\cos B$ und substituirt dies in die zweite, so enthält letztere nur noch die Unbekannte A. Die genannte Substitution haben wir schon im

vorigen Paragraphen ausgeführt und sie giebt nach der vor No. 1) in §. 49 vorhergehenden Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

oder, wenn man die Unbekannte $\cos A$ sucht,

1) $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

So einfach diese Formel ist, so wenig eignet sie sich zur ununterbrochenen logarithmischen Rechnung, und wir müssen daher auf eine Umwandlung der Formel selbst bedacht sein.

Addirt man die Einheit zu beiden Seiten der Gleichung 1) und berücksichtigt dabei die Formel

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A,$$

so ergiebt sich auf der Stelle

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$$

und durch Zerlegung der Quadratdifferenz in ein Product

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc},$$

woraus auf der Stelle die brauchbare Formel

2) $$\cos \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(b + c + a)(b + c - a)}{bc}}$$

folgt; trotz des Wurzelzeichens ist hier doch keine Zweideutigkeit vorhanden, weil die Hälfte von irgend einem Winkel irgend eines Dreiecks jederzeit einen spitzen Winkel ausmacht und folglich die trigonometrischen Functionen des letzteren immer positiv sein müssen.

Subtrahirt man beide Seiten der Gleichung 1) von der Einheit und berücksichtigt zugleich die Formel

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A,$$

so wird

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$$

und durch Zerlegung der Quadratdifferenz

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4bc}.$$

Hieraus fliesst unmittelbar die Formel

3) $$\sin \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(a + b - c)(a - b + c)}{bc}}.$$

Die beiden Formeln 2) und 3) lassen sich leicht zu neuen

Resultaten verbinden; so folgt aus der Formel $\sin A = 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$, indem man für $\sin \frac{1}{2} A$ und $\cos \frac{1}{2} A$ die oben gefundenen Werthe setzt,

$$4)\quad \sin A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2bc},$$

ferner, wenn man die Gleichung 3) durch 2) dividirt,

$$5)\quad \tan \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}},$$

und umgekehrt

$$6)\quad \cot \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{(a-b+c)(a+b-c)}}.$$

Die gefundenen Formeln erhalten eine noch bessere Gestalt, wenn man die halbe Summe der drei Seiten in Rechnung bringt; nennen wir dieselbe s, so ist

$$a+b+c = 2s,$$
$$-a+b+c = 2(s-a),$$
$$a-b+c = 2(s-b),$$
$$a+b-c = 2(s-c),$$

und nun erhalten wir statt der Formeln 4), 5) und 6) die folgenden:

$$7)\quad \sin A = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc},$$

$$8)\quad \tan \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$9)\quad \cot \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}},$$

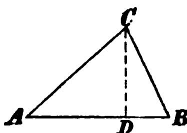
welche zur Berechnung des Winkels A sehr bequem sind.

§. 51.

Die Berechnung der Dreiecksfläche.

Die Fläche des Dreiecks ABC ist jederzeit die Hälfte des Productes aus den Längenzahlen der Geraden AB und CD; von diesen Längenzahlen können wir die erste $AB = c$ immer als bekannt ansehen, weil zur Bestimmung des Dreiecks wenigstens eine Seite nothwendig ist, und es handelt sich daher noch um die Bestimmung von CD. Nach dem Früheren haben wir nun $CD = b \sin A$ oder auch $CD = a \sin B$, und also

Fig. 146.



kann man die Dreiecksfläche, welche F heissen möge, nach einer der beiden Formeln

1) $$F = \frac{cb \sin A}{2},$$

2) $$F = \frac{ca \sin B}{2},$$

berechnen. Dies ist unmittelbar möglich, sobald c, b, A oder c, b, B selbst gegeben sind; ausserdem muss man die nicht gegebenen Grössen erst ausmitteln. Dies giebt folgende Fälle.

I. Aus einer Seite c und den beiden anliegenden Winkeln A, B findet man zunächst

$$b = \frac{c \sin B}{\sin(A+B)},$$

und mithin nach No. 1)

3) $$F = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin (A+B)}.$$

II. Ist eine Seite c gegeben, der anliegende Winkel A und der Gegenwinkel C, so ist vermöge der Proportion $\sin C : \sin A = c : a$

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C},$$

ferner

$$\sin B = \sin [180^\circ - (A + C)] = \sin (A + C)$$

und mithin durch Substitution in No. 2)

4) $$F = \frac{c^2 \sin A \sin (A + C)}{2 \sin C}.$$

III. Für den Fall, dass zwei Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel A gegeben sind, dient die Formel 1) unmittelbar, nämlich

5) $$F = \frac{bc \sin A}{2}.$$

IV. Aus zwei Seiten a, b und einem Gegenwinkel A berechnet man zuerst c nach der Formel

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A},$$

und nun giebt die Formel 1)

6) $$F = \tfrac{1}{2} b \sin A \left[b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}\right],$$

wobei wieder die in §. 49 erwähnten Fälle zu berücksichtigen sind.

V. **Kennt man sämmtliche Seiten des Dreiecks,** so ist

$$\sin A = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc},$$

und wenn man dies in No. 1) substituirt, so kommt man auf die Formel

7) $$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

welche wir schon in §. 17 unabhängig von der Trigonometrie entwickelt haben.

Cap. X.

Die Berechnung der Vielecke.

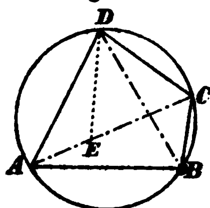
---

§. 52.

Die Berechnung des Vierecks.

Nennen wir die vier Seiten eines beliebigen Vierecks a, b, c, d, die Diagonalen f, g, und die Winkel der Reihe nach A, B, C, D, so lassen sich leicht fünf Gleichungen zwischen diesen zehn Grössen aufstellen; es ist nämlich

Fig. 147.



1) $$A + B + C + D = 360°;$$

die vier anderen Gleichungen entspringen aus der Bemerkung, dass das Viereck $ABCD$ vier verschiedene Dreiecke, nämlich ABC, BCD, CDA und DAB, in sich enthält; in dem Dreieck ABC, wo $AB = a$, $BC = b$ und $CA = f$ ist, haben wir nun

2) $$a^2 + b^2 - 2ab\cos B = f^2,$$

ferner in dem Dreiecke BCD, worin $BC = b$, $CD = c$, $DB = g$ ist,

3) $$b^2 + c^2 - 2bc\cos C = g^2;$$

aus dem Dreiecke CDA, worin $CD = c$, $DA = d$, $AC = f$, erhalten wir weiter

4) $$c^2 + d^2 - 2cd \cos D = f^2,$$
endlich aus dem Dreiecke DAB, welches die Seiten $DA = d$, $AB = a$ und $BD = g$ besitzt,

5) $$d^2 + a^2 - 2da \cos A = g^2.$$

Die hier aufgestellten fünf Gleichungen reichen zur Berechnung des Vierecks jederzeit hin; sie enthalten nämlich zehn Grössen, zur Bestimmung des Vierecks gehören fünf Stücke und folglich sind in den obigen Gleichungen fünf bekannte und fünf unbekannte Grössen vorhanden, von denen die letzteren sich vollständig eliminiren lassen müssen, weil die Anzahl der Gleichungen ebenso gross ist, als die der Unbekannten.

Wenn z. B. die vier Seiten des Vierecks und der Winkel A gegeben sind, so findet man die übrigen drei Winkel B, C, D auf folgendem Wege. Aus der Vergleichung von 3) und 5) ergiebt sich

$$d^2 + a^2 - 2da \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C,$$

worin nur C unbekannt ist; man findet hieraus

6) $$\cos C = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2 + 2ad \cos A}{2bc}$$

und hiermit C selbst. Ferner folgt aus der Vergleichung von No. 2) und No. 4)

$$c^2 + d^2 - 2cd \cos D = a^2 + b^2 - 2ab \cos B,$$

und hierin sind noch zwei Unbekannte D und B vorhanden, von welchen sich aber die eine wegschaffen lässt; aus No. 1) folgt nämlich

7) $$D = 360^0 - (A + B + C),$$

also

$$\cos D = \cos (A + C + B),$$

und wenn wir $A + C$ zur Abkürzung mit E bezeichnen, so ist E eine bekannte Grösse, weil A von Hause aus gegeben und C mittelst der Formel 6) bestimmt ist. Wir haben dann, indem wir $\cos (E + B)$ für $\cos D$ setzen,

$$c^2 + d^2 - 2cd \cos (E + B) = a^2 + b^2 - 2ab \cos B,$$

und hier kommt nur noch die eine Unbekannte B vor. Durch Zerlegung von $\cos (E + B)$ wird nun weiter

$$c^2 + d^2 - 2cd \cos E \cos B + 2cd \sin E \sin B$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos B,$$

oder

8) $$2(ab - cd\cos E)\cos B + 2cd\sin E\sin B = a^2 + b^2 - c^2 - d^2,$$

und wenn man $\cos B$ und $\sin B$ durch $\tan B$ ausdrückt, so findet man nach beiderseitiger Multiplication mit $\sqrt{1+\tan^2 B}$

9) $$2(ab - cd\cos E) + 2cd\sin E\tan B = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\sqrt{1+\tan^2 B}.$$

In dieser Gleichung ist $\tan B$ die einzige Unbekannte und leicht zu bestimmen, wenn man beiderseits quadrirt, wodurch man für $\tan B$ eine gewöhnliche quadratische Gleichung erhält. Ist auf diese Weise B gefunden, so ergiebt sich D mittelst der Formel

$$D = 360^0 - (A + C + B) = 360^0 - (E + B),$$

und zuletzt kann man noch die Diagonalen f und g aus den Formeln 2) und 3) oder 4) und 5) ableiten.

Die vollständige Entwickelung der hier angedeuteten Eliminationen, sowie die Erörterung aller das Viereck betreffenden Aufgaben, bei welchen aus fünf von den Stücken $a, b, c, d, f, g, A, B, C, D$ die jedesmaligen fünf übrigen bestimmt werden, müssen wir übergehen, weil sie allein einen grösseren Raum einnehmen würde, als hier der gesammten Trigonometrie gewidmet werden kann. Dagegen wollen wir noch den Fall eines Sehnenvierecks besonders betrachten, weil er einfacher ist und zu sehr symmetrischen Formeln führt.

Wie schon früher bemerkt wurde, ist ein Sehnenviereck durch vier Stücke, also z. B. seine vier Seiten, bestimmt. Da in demselben die Summe zweier Gegenwinkel immer 180^0 beträgt, so ist der vorhin eingeführte Hilfswinkel $E = A + C = 180^0$, und dadurch nimmt die Gleichung 8) die sehr einfache Gestalt an:

$$2(ab + cd)\cos B = a^2 + b^2 - c^2 - d^2,$$

woraus unmittelbar folgt

10) $$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Um eine für logarithmische Rechnung bequemere Formel zu erhalten, addiren wir beiderseits die Einheit; wegen $1 + \cos B = 2\cos^2 \frac{1}{2}B$ ist dann

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}B = \frac{2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} = \frac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{2(ab+cd)}$$

und durch Zerlegung der Quadratdifferenz in ein Product

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}B = \frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)}{2(ab+cd)},$$

und hieraus findet man

$$11) \qquad \cos \tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)}{ab+cd}}.$$

Subtrahirt man dagegen beide Seiten der Gleichung von der Einheit unter Rücksicht auf die Formel $1 - \cos B = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}B$, so wird

$$\begin{aligned}2\sin^2 \tfrac{1}{2}B &= \frac{2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2(ab+cd)}\\ &= \frac{(c+d)^2 - (a-b)^2}{2(ab+cd)}\\ &= \frac{(c+d+a-b)(c+d-a+b)}{2(ab+cd)},\end{aligned}$$

woraus man sogleich die folgende Formel erhält:

$$12) \qquad \sin \tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}{ab+cd}}.$$

Die Formeln 11) und 12) erhalten eine noch vortheilhaftere Gestalt, wenn man die halbe Summe der vier Seiten mit s bezeichnet, so dass

$$a + b + c + d = 2s$$

ist; man findet dann ohne Mühe

$$\begin{aligned}-a + b + c + d &= 2s - 2a = (s-a),\\ a - b + c + d &= 2s - 2b = (s-b),\\ a + b - c + d &= 2s - 2c = (s-c),\\ a + b + c - d &= 2s - 2d = (s-d),\end{aligned}$$

und durch Substitution dieser Werthe gehen die Formeln 11) und 12) in die folgenden über:

$$13) \qquad \cos \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{ab+cd}},$$

$$14) \qquad \sin \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab+cd}}.$$

Hieraus fliessen weiter die Formeln

$$15) \qquad \tan \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}},$$

$$16) \qquad \cot \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{(s-a)(s-b)}},$$

und mit Hilfe der Formel $\sin B = 2 \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} B$ erhält man noch

$$17) \qquad \sin B = \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ab+cd}.$$

Von diesen Formeln gestattet die unter No. 15) verzeichnete eine elegante Construction des Sehnenvierecks aus seinen vier Seiten. Zeichnet man nämlich ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete die mittlere Proportionale zwischen $s-a$ und $s-b$, und dessen andere Kathete die mittlere Proportionale zwischen $s-c$ und $s-d$ ist, so muss der Gegenwinkel der ersten Kathete $= \frac{1}{2} B$ sein und man findet dann B durch Verdoppelung dieses Gegenwinkels, worauf nun das ganze Viereck leicht zu construiren ist.

Nennen wir V die Fläche des Sehnenvierecks und berechnen dieselbe durch Vereinigung der beiden Dreiecksflächen

$\triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin B$,

$\triangle CDA = \frac{1}{2} cd \sin D = \frac{1}{2} cd \sin (180^0 - B) = \frac{1}{2} cd \sin B$,

so ist

$$V = \frac{ab+cd}{2} \sin B,$$

und durch Substitution des Werthes von $\sin B$ ergiebt sich jetzt die Formel

$$V = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

zu welcher wir schon früher auf anderem Wege gelangt waren.

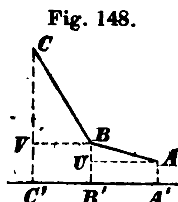
§. 53.

Trigonometrische Beziehungen bei Projectionen gebrochener Linien.

Projicirt man eine gebrochene Linie ABC auf eine beliebige ausserhalb derselben liegende Gerade XX_1, so setzt sich die Projection $A'C'$ von ABC aus den Projectionen $A'B'$ und $B'C'$ von AB und BC zusammen; die Art und Weise dieser Zusammensetzung bedarf aber einer näheren Discussion, weil verschiedene Fälle möglich sind. Denkt

man sich nämlich die erste Gerade AB zuerst projicirt, so kann die Projection C' von C drei verschiedene Lagen in Beziehung auf die Punkte A' und B' einnehmen; sie kann ebensowohl in der Verlängerung von $A'B'$ (d. h. ausserhalb $A'B'$ auf der Seite von B') liegen, oder zwischen A' und B' fallen, oder endlich auf die Verlängerung von $B'A'$ (d. h. ausserhalb $A'B'$ auf die Seite von A') zu liegen kommen. Diese Fälle untersuchen wir einzeln.

Fig. 148.



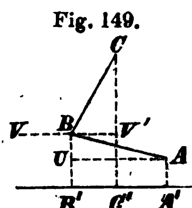
Bei der ersten Lage, die in obiger Figur dargestellt ist, bildet $A'C'$ die Summe von $A'B'$ und $B'C'$; man hat daher

$$A'C' = A'B' + B'C',$$

und man kann dies leicht trigonometrisch ausdrücken, wenn man $AB = a$, $BC = b$ setzt und die Winkel in Rechnung bringt, welche die Geraden a und b mit der Geraden XX_1, oder Parallelen derselben einschliessen. Ziehen wir nämlich $AU \parallel BV \parallel XX_1$ und setzen $\angle UAB = (a, x)$, $\angle VBC = (b, x)$, so ist zufolge der Definition des Cosinus $A'B' = a \cos(a, x)$ und $B'C' = b \cos(b, x)$, folglich

$$A'C' = a \cos(a, x) + b \cos(b, x).$$

Fig. 149.



Im zweiten Falle findet zwischen $A'B'$, $B'C'$ und $A'C'$ die Beziehung

$$A'C' = A'B' - B'C'$$

statt; dabei ist $A'B' = a \cos(a, x)$ und $B'C' = b \cos V'BC$, wenn $V'BC$ den spitzen Winkel bedeutet, den BC mit der Parallelen VBV' einschliesst. Bringen wir statt desselben den stumpfen Winkel VBC in Rechnung, so ist $\cos V'BC = -\cos VBC$, mithin $-B'C' = b \cos VBC$ und

$$A'C' = a \cos(a, x) + b \cos VBC.$$

Man erkennt nun augenblicklich, dass diese Gleichung die nämliche Form wie die frühere erhält, wenn man $\angle VBC$ mit (b, x) bezeichnet, d. h. wenn man die Winkel (a, x) und (b, x), von XX_1 ausgehend, immer nach einer und derselben Drehungsrichtung zählt. Die Gleichung

$$A'C' = a \cos(a, x) + b \cos(b, x)$$

gilt jetzt für beide Fälle.

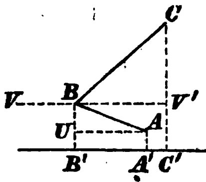


Fig. 150.

Bei der dritten Lage von C' hat man

$A'C' = B'C' - B'A' = -(A'B' - B'C')$

und dabei ist $B'A' = a \cos(a, x)$, ferner $B'C' = b \cos V'BC = -b \cos VBC = -b \cos(b, x)$, folglich

$$A'C' = -[a \cos(a, x) + b \cos(b, x)],$$

oder

$$-A'C' = a \cos(a, x) + b \cos(b, x).$$

Die rechte Seite stimmt mit der rechten Seite der früheren Gleichung überein. Die linke Seite dagegen enthält $-A'C'$ statt des früheren $A'C'$; dies erklärt sich aber sehr einfach aus dem Umstande, dass jetzt C' rechts von A' liegt, während es früher auf der linken Seite war, dass folglich auch $A'C'$ die entgegensetzte Lage eingenommen hat. Bezeichnen wir also die Projection $A'C'$ mit x und rechnen die Winkel immer nach derselben Drehungsrichtung, so ist die Formel

$$x = a \cos(a, x) + b \cos(b, x)$$

eine ganz allgemeine; der absolute Werth der rechten Seite giebt die Länge von x und das Vorzeichen derselben bestimmt die Lage von x.

Die vorigen Betrachtungen lassen sich leicht erweitern, um die Projectionen beliebig oft gebrochener Linien zu bestimmen. Handelt es sich z. B. um die Projection von $ABCD$, so denkt man sich zunächst die Projection $A'C'$ von ABC construirt und nimmt nachher die Projection $C'D'$ von CD hinzu; es wiederholt sich dann die obige Schlussweise. Will man, um die Sache möglichst einfach zu haben, das Vorkommen negativer Projectionen vermeiden, so braucht man die Gerade XX_1 nur so zu legen, dass die Punkte B', C', D' u. s. w. sämmtlich auf die eine Seite von A' (etwa auf die linke Seite) zu liegen kommen. Man gelangt dann ohne Mühe zu folgendem allgemeinen Satze: wenn eine beliebige gebrochene Gerade $ABCD \ldots MN$, deren Theile $AB = a$, $BC = b$, $CD = c, \ldots MN = m$ heissen mögen, auf eine Gerade XX_1 projicirt wird, so ist die Projection $A'N' = x$ durch die Gleichung

$$1) \quad x = a \cos(a, x) + b \cos(b, x) + \ldots + m \cos(m, x)$$

bestimmt, vorausgesetzt, dass die Winkel immer in einem und demselben Sinne gezählt und entgegengesetzte Lagen von x durch entgegengesetzte Vorzeichen ausgedrückt werden.

Für die Projection derselben gebrochenen Linie auf eine zweite Gerade YY_1 hat man auf gleiche Weise

$$y = a\cos(a,y) + b\cos(b,y) + \ldots + m\cos(m,y),$$

und hier ist der besondere Fall von Interesse, wo YY_1 senkrecht auf XX_1 steht, mithin x die Hauptprojection und y die Nebenprojection der gebrochenen Linie darstellt. Denkt man sich die Gerade YY_1 dadurch entstanden, dass sich die Gerade XX_1 um einen ihrer Punkte gedreht hat und zwar gleichfalls in dem Sinne, wie die Winkel (a,x), (b,x) u. s. w. gezählt wurden, so ist allgemein

$\angle(a,y) = 90^0 - \angle(a,x)$, $\angle(b,y) = 90^0 - \angle(b,x)$ u. s. w.

und daraus ergiebt sich

$$2)\quad y = a\sin(a,x) + b\sin(b,x) + \ldots + m\sin(m,x).$$

Die Sätze 1) und 2) sind für gebrochene Linien ganz das Nämliche, wie die einfachen Gleichungen $x = a\cos(a,x)$ und $y = a\sin(a,x)$ für eine Gerade a.

§. 54.

Die Fundamentalformeln der Polygonometrie.

Ein Vieleck $ABCD\ldots MNA$ kann als eine in sich selbst zurückkehrende gebrochene Linie betrachtet werden, deren Projectionen (in dem obigen Sinne genommen) der Null gleich sind; die Formeln des vorigen Paragraphen erleiden daher auch Anwendung auf die Vielecke, wenn man $x = y = 0$ nimmt und zu den Seiten $AB = a$, $BC = b$, $\ldots MN = m$ noch die Seite $NA = n$ hinzutreten lässt. Die betreffenden Gleichungen sind daher:

$$0 = a\cos(a,x) + b\cos(b,x) + \ldots + n\cos(n,x),$$
$$0 = a\sin(a,x) + b\sin(b,x) + \ldots + n\sin(n,x).$$

Durch Einführung der Aussenwinkel des Polygons erhalten diese Relationen eine etwas vortheilhaftere Gestalt. Da nämlich die Gerade XX_1 willkührlich gewählt werden darf, so können wir auch die letzte Vielecksseite NA dafür neh-

men und zugleich jede Seite über ihren Endpunkt hinaus verlängern, so dass die Aussenwinkel $A_1AB = \alpha$, $B_1BC = \beta$, $C_1CD = \gamma$ u. s. w. entstehen; es ist dann

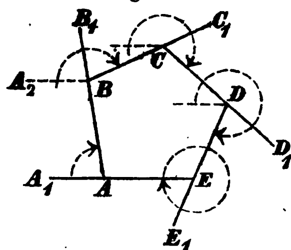


Fig. 151.

$$L(a,x) = L A_1AB = \alpha$$
$$L(b,x) = L A_2BC = L A_2BB_1 + L B_1BC$$
$$= \alpha + \beta$$
$$L(c,x) = L A_3CD = L A_3CC_1 + L C_1CD$$
$$= \alpha + \beta + \gamma$$

u. s. w.

Die aufgestellten Gleichungen lauten jetzt

$$0 = a \cos \alpha + b \cos(\alpha + \beta) + c \cos(\alpha + \beta + \gamma) + \ldots.$$
$$\ldots\ldots + n \cos(\alpha + \beta + \gamma + \ldots. + \nu),$$
$$0 = a \sin \alpha + b \sin(\alpha + \beta) + c \sin(\alpha + \beta + \gamma) + \ldots.$$
$$\ldots\ldots + n \sin(\alpha + \beta + \gamma + \ldots. + \nu).$$

Will man endlich die Winkel A, B, C, ... N des Vielecks selber in Rechnung bringen, so hat man nur

$$\alpha = 180^\circ - A,\ \beta = 180^\circ - B,\ \gamma = 180^\circ - C, \ldots.$$

zu setzen und erhält auf diese Weise

1) $$0 = a \cos A - b \cos(A + B) + C \cos(A + B + C) - \ldots$$
$$\ldots. \pm n \cos(A + B + C + \ldots + N),$$

2) $$0 = a \sin A - b \sin(A + B) + c \sin(A + B + C) - \ldots$$
$$\ldots. \pm n \sin(A + B + C + \ldots + N).$$

Der Gebrauch, welcher sich von diesen Gleichungen machen lässt, ist leicht zu ersehen, wenn man sich erinnert, dass ein Vieleck von n Seiten durch $2n - 3$ gegebene Stücke bestimmt wird, unter denen sich aber nicht sämmtliche n Winkel befinden dürfen. Da nun im Ganzen $2n$ Hauptbestandtheile (n Seiten und n Winkel) vorhanden sind, so bedarf man zur Berechnung der $2n - (2n - 3)$ unbekannten Stücke dreier Gleichungen und diese haben wir in der That, wenn zu den obigen Gleichungen noch die Formel für die Winkelsumme, nämlich:

3) $$A + B + C + \ldots + N = (2n - 4) R$$

hinzugenommen wird. Die hier entwickelten Relationen reichen also zur Berechnung eines Vielecks aus. Im Allgemeinen sind dabei folgende Hauptfälle zu unterscheiden:

1) gegeben $n-1$ Winkel und $n-2$ Seiten;
2) gegeben $n-2$ Winkel und $n-1$ Seite;
3) gegeben $n-3$ Winkel und n Seiten.

Wir wollen von jedem dieser Fälle ein Beispiel geben, woraus man den Gang der Rechnung entnehmen kann; eine vollständige Erörterung aller möglichen Fälle würde die Gränzen des vorliegenden Werkes weit überschreiten.

I. Es seien bekannt die Winkel $A, B, C, \ldots M$ und die Seiten $c, d, \ldots n$, zu bestimmen folglich der Winkel N und die Seiten a, b.

Aus No. 3) findet man sogleich

$$N = (2n-4)R - (A+B+C+\ldots+M),$$

und da jetzt die Gleichungen 1) und 2) nur noch die Unbekannten a und b enthalten, so können wir sie unter den Formen

$$a \cos A - b \cos(A+B) = U,$$
$$a \sin A - b \sin(A+B) = V$$

darstellen, wo U und V bekannte Grössen sind. Hieraus ergeben sich durch gewöhnliche Elimination die Werthe

$$a = \frac{U \sin(A+B) - V \cos(A+B)}{\sin B},$$
$$b = \frac{U \sin A - V \cos A}{\sin B}.$$

II. Gegeben $B, C, D, \ldots M$ und $a, b, c, \ldots m$; gesucht A, N und n.

Da $A+B+C+\ldots+N = (2n-4)R$ ist, so wird $\sin(A+B+\ldots+N) = 0$ und mithin kann man die Gleichung 2) mit Weglassung des letzten Gliedes in der Form

$$a \sin A - b \sin(A+B) + c \sin(A+B+C) - \ldots$$
$$\ldots \pm m \sin(A+B+C+\ldots+M) = 0$$

darstellen; sie enthält jetzt nur die eine Unbekannte A, welche leicht zu erhalten ist, wenn man überall A ausscheidet. Es wird dann

$$\sin A\,[a - b\cos B + c\cos(B+C)\ldots$$
$$\ldots \pm m\cos(B+C+\ldots+M)],$$
$$-\cos A\,[b \sin B - c\sin(B+C) + \ldots.$$
$$\ldots. \pm m\sin(B+C+\ldots+M)] = 0$$

und hier sind die eingeklammerten Grössen sammt und sonders bekannt. Bezeichnen wir sie mit P und Q, so ist

$$P \sin A - Q \cos A = 0,$$

oder

$$\tan A = \frac{Q}{P},$$

woraus A gefunden wird. Hierauf erhält man N aus der Gleichung

$$N = (2n - 4)\, R - (A + B + C + \ldots + M),$$

endlich n aus der Gleichung 1), indem man berücksichtigt, dass $\cos (A + B + C + \ldots + N) = 1$ ist und mithin

$$a \cos A - b \cos (A + B) + c \cos (A + B + C) - \ldots$$
$$\ldots \pm m \cos (A + B + C + \ldots + M) = \pm n.$$

III. Gegeben $A, B, C, \ldots K, a, b, c, \ldots n$, gesucht L, M, N. Substituirt man N aus der Gleichung

$$N = (2n - 4)\, R - (A + B + C + \ldots + M)$$

in die beiden Gleichungen 1) und 2), so enthalten letztere nur noch zwei Unbekannte, L und M, und zwar ist

$$a \sin A - b \sin (A + B) + c \sin (A + B + C) - \ldots$$
$$\ldots \pm l \sin (A + B + C + \ldots + L) \mp m \sin (A + B + C + \ldots + M) = 0.$$
$$a \cos A - b \cos (A + B) + c \cos (A + B \pm C) - \ldots$$
$$\ldots \pm l \cos (A + B + C + \ldots + L) \mp m \cos (A + B + C \ldots + M) \pm n = 0,$$

oder, wenn man für die bekannten Grössen Abkürzungsbuchstaben brauchen will,

$$P \pm l \sin (S + L) \mp m \sin (S + L + M) = 0,$$
$$Q \pm l \cos (S + L) \mp m \cos (S + L + M) = \mp n,$$

woraus sich L und M finden lassen, wenn man $S + L$ als eine Unbekannte, M als die andere ansieht, die Cosinus und Sinus entwickelt und zuletzt Alles durch die Tangenten ausdrückt.

§. 55.

Die Fläche des Vielecks.

Bezeichnen wir die Fläche eines Dreiecks ABC mit F_3, die Seiten AB, BC, CA der Reihe nach mit a, b, c, so gilt für die Fläche desselben die Formel

$$2 F_3 = ab \sin B,$$

oder, wenn wir statt des Dreieckwinkels B den Aussenwinkel $\beta = 180^0 - B$ in Rechnung bringen,

1) $$2 F_3 = ab \sin \beta.$$

In einem Vierecke $ABCD$ ziehe man die Diagonale AC, so zerfällt derselbe in zwei Dreiecke und man hat durch Anwendung der obigen Formel

$$2F_4 = ab \sin\beta + cd \sin\delta,$$

indem man die Fläche des Vierecks als die Summe zweier Dreiecksflächen ansieht; hätte das Viereck einen convexen Winkel, etwa bei D, so würde die fragliche Fläche nicht Summe, sondern die Differenz jener zwei Dreiecke sein; in diesem Falle würde $\sin\delta$ von selbst negativ und daher bleibt die obige Formel auch jetzt noch richtig. Bringen wir nun den Satz 5) des vorigen Paragraphen in Anwendung, indem wir, mit b als erster Seite anfangend, von der Rechten zur Linken gehen und die Seiten rückwärts verlängern, so ist

$$0 = b\sin\gamma + a\sin(\gamma+\beta) + d\sin(\gamma+\beta+\alpha)$$
$$= b\sin\gamma + a\sin(\gamma+\beta) - d\sin\delta.$$

Hieraus bestimmt sich $d\sin\delta$, und durch Substitution dieses Werthes wird

2) $$2F_4 = ab\sin\beta + ac\sin(\beta+\gamma) + bc\sin\gamma.$$

In dem Fünfecke $ABCDE$ ziehe man AD, so ist $F_5 = F_4 + \triangle ADE$, also

$$2F_5 = ab\sin\beta + ac\sin(\beta+\gamma) + bc\sin\gamma + de\sin\varepsilon.$$

Gehen wir von der Seite c als erster aus und wieder von der Rechten zur Linken, so ist

$$0 = c\sin\delta + b\sin(\delta+\gamma) + a\sin(\delta+\gamma+\beta) + e\sin(\delta+\gamma+\beta+\alpha),$$

oder

$$0 = c\sin\delta + b\sin(\delta+\gamma) + a\sin(\delta+\gamma+\beta) - e\sin\varepsilon.$$

Hieraus findet sich $e\sin\varepsilon$ und durch Substitution dieses Werthes ist nun

$$2F_5 = ab\sin\beta + ac\sin(\beta+\gamma) + ad\sin(\beta+\gamma+\delta) + bc\sin\gamma + bd\sin(\gamma+\delta) + cd\sin\delta.$$

Man übersieht ohne Mühe den Fortgang dieser Schlüsse und zugleich das Gesetz, nach welchem sich die Flächen-

formeln bilden. Heisst überhaupt F_n die Fläche des n-Ecks $ABCD..N$, so ist

$$
\begin{aligned}
2F_n = & \, ab \sin\beta + ac \sin(\beta+\gamma) + .. + am \sin(\beta+\gamma+..+\mu), \\
& + bc \sin\gamma + bd \sin(\gamma+\delta) + .. + bm \sin(\gamma+\delta+..+\mu), \\
& + cd \sin\delta + ce \sin(\delta+\varepsilon) + .. + cm \sin(\delta+\varepsilon+..+\mu), \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + kl \sin\lambda + km \sin(\lambda+\mu), \\
& + lm \sin\mu,
\end{aligned}
$$

und es würde nicht die mindeste Schwierigkeit haben nachzuweisen, dass diese Formel für F_{n+1} gilt, wenn sie für F_n richtig ist, woraus dann ihre allgemeine Giltigkeit unmittelbar folgt.

Cap. XI.

Anwendungen der Trigonometrie auf geodätische Probleme.

---

§. 56.

Die Aufgabe der Geodäsie.

Die allgemeine Aufgabe der Geodäsie besteht in der Ermittelung der gegenseitigen Lage von Punkten auf oder über der Erdoberfläche, wobei letztere als horizontale Ebene angesehen werden darf, so lange die horizontalen Entfernungen jener Punkte nicht beträchtlich sind. Die Bestimmung des Abstandes unzugänglicher Punkte bildet einen speciellen Fall der genannten allgemeinen Aufgabe; denn wäre z. B. die Entfernung zweier Punkte A und B aufzusuchen, die Möglichkeit einer directen Messung von

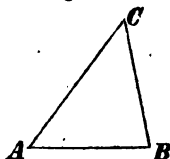
A nach B aber nicht vorhanden, so kann man sich A und B mit einem dritten Punkte C zu einem Dreiecke ABC verbunden denken, von diesem drei Bestandtheile, unter denen die Seite AB nicht vorkommt, direct messen und daraus AB durch Construction oder trigonometrische Rechnung ableiten. In ähnlicher Weise kommt es bei allen geodätischen Problemen darauf an, aus den zu bestimmenden und den etwa noch hinzugenommenen Hilfspunkten ein System von Dreiecken zu bilden und soviel Stücke unmittelbar zu messen, dass alle Dreiecke der Reihe nach bestimmt sind. Da sich eine Partie von Punkten auf verschiedene Weisen zu einem Systeme von Dreiecken verbinden lässt, so ist einige Willkür in der Anlage der Arbeit, aber es vermindert sich diese Willkürlichkeit wesentlich durch zwei Umstände; einerseits verbietet nämlich die Localität sehr häufig die directe Messung mancher Linien und Winkel, andererseits ist die Messung von Winkeln weit genauer und rascher als die von Geraden ausführbar und es liegt daher im Interesse der Genauigkeit, möglichst wenig Linien und möglichst viel Winkel auf dem Felde zu messen.

§. 57.

Bestimmung der gegenseitigen Lage von drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten.

Sind A, B, C die aufzunehmenden Punkte, so kann die Bestimmung des Dreiecks ABC entweder durch seine drei Seiten oder durch zwei Seiten und einen Winkel oder durch eine Seite und zwei Winkel vermittelt werden. Der erste Fall setzt die Zugänglichkeit des ganzen Dreieckumfanges voraus und gewährt trotzdem keine scharfe Bestimmung der Winkel; er ist daher von keiner practischen Anwendung. Mehr Aufmerksamkeit verdienen die beiden anderen Fälle.

Fig. 152.



I. Kann man von C aus die Punkte A und B sehen und erreichen, so misst man die Seiten $CA = b$, $CB = a$

und den Winkel C; die dritte Seite $AB = c$ bestimmt sich dann mittelst der Formel

1) $$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.$$

Ebenso leicht würde es sein, einen anderen Winkel, etwa B statt C, zur Bestimmung des Dreiecks zu benutzen; es ist dann

2) $$\sin A = \frac{a \sin B}{b}, \quad C = 180^0 - (A + B)$$

und c wie vorhin.

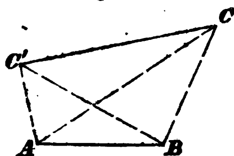
Hierin liegt zugleich eine Methode zur mittelbaren Messung einer Geraden AB, wenn man nicht direct von A nach B messen, wohl aber A und B von einem dritten Punkte C aus sehen und erreichen kann.

II. Die zweite Bestimmung des Dreiecks ABC besteht in der Messung einer Seite, etwa AB, und zweier Winkel, wodurch alle Winkel bekannt und die übrigen Seiten aus den Formeln

3) $$a = \frac{c \sin A}{\sin C}, \quad b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

berechnet oder construirt werden können. Sehr üblich ist die Messung der an der „Standlinie" AB liegenden Winkel (Visiren und Schneiden) und es empfiehlt sich dieses Verfahren durch die Leichtigkeit, mit der man der Reihe nach die Lage beliebig vieler Punkte $C, C' \ldots$ in Beziehung auf AB, mithin auch ihre gegenseitige Lage finden kann. Hat man z. B. ausser AB die Winkel $BAC = A$, $CBA = B$, $BAC' = A'$, $C'BA = B'$ gemessen, so ist für $AC = b$; $BC = a$, $AC' = b'$, $BC' = a'$

Fig. 153.



4) $$\begin{cases} a = \dfrac{c \sin A}{\sin (A + B)}, & b = \dfrac{c \sin B}{\sin (A + B)}, \\ a' = \dfrac{c \sin A'}{\sin (A' + B')}, & b' = \dfrac{c \sin B'}{\sin (A' + B')}; \end{cases}$$

aus a, a' und dem eingeschlossenen Winkel $CBC' = B - B'$ kann jetzt CC' berechnet werden, ebenso aus b, b' und $CAC' = A' - A$, nämlich

5) $$\begin{cases} CC' = \sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos (B - B')} \\ \quad = \sqrt{b^2 + b'^2 - 2bb' \cos (A - A')}. \end{cases}$$

Hierin liegt eine Methode zur Messung einer völlig unzugänglichen Geraden CC', deren Endpunkte aus zwei anderen bekannten Punkten A und B derselben Ebene gesehen werden können.

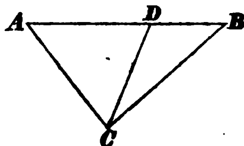
Die erwähnte Bestimmung aus einer Seite und zwei Winkeln setzt voraus, dass man das Winkelmessinstrument in zwei Ecken des Dreiecks aufstellen könne; ist aber diese Aufstellung nur in C möglich, so muss ein vierter Punkt zu Hilfe genommen werden.

§. 58.

Bestimmung der gegenseitigen Lage von vier Punkten in einer Ebene.

I. Wir betrachten zuerst den Fall, wo der vierte Punkt D mit zweien der schon vorhandenen Punkte, etwa mit A und B, in gerader Linie liegt, und setzen voraus, dass man sich in D aufstellen und nach A, B, C visiren könne. Misst man die Winkel $ACD = \alpha$, $BCD = \beta$, und einen der beiden Winkel $ADC = \delta$, $BDC = \delta' = 180^0 - \delta$, so kennt man die Winkel des Dreiecks ABC, nämlich

Fig. 154.



$$C = \alpha + \beta, \quad A = 180^0 - (\alpha + \delta), \quad B = 180^0 - (\beta + \delta'),$$

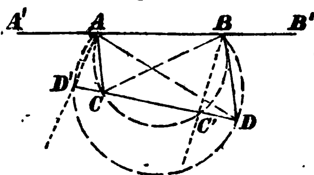
da ausserdem $AB = c$ bekannt ist, so hat man

$$6) \qquad a = \frac{c \sin(\alpha + \delta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \qquad b = \frac{c \sin(\beta + \delta')}{\sin(\alpha + \beta)},$$

und dadurch bestimmt sich zunächst die Lage von C, sowie nachher die von D (Seitwärtseinschneiden).

II. Liegt der vierte Punkt D nicht in einer Geraden mit zweien der Punkte A, B, C, so misst man die Winkel $ACB = \alpha$, $BCD = \beta$, $CDA = \gamma$, $ADB = \delta$ und kennt jetzt fünf Bestandtheile ($c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$) des Vierecks $ABDC$, welches nun entweder construirt oder berechnet werden kann.

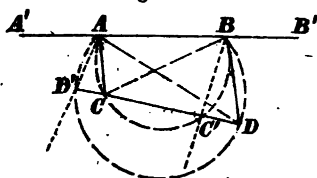
Fig. 155.



Rücksichtlich der Construction bemerken wir zunächst, dass C auf einem Kreise liegen muss, der über der Sehne

AB beschrieben ist und den Peripheriewinkel α enthält, ebenso D auf einem Bogen über AB mit dem Peripheriewinkel δ; beide Bögen können sogleich construirt werden. Zieht man noch die Gerade BC' nach dem Punkte C', wo CD den ersten Bogen zum zweitenmale schneidet, so ist in dem Sehnenviereck $ABC'C$ der Aussenwinkel $B'BC' = \angle ACC' = \alpha + \beta$; indem man also $\angle B'BC' = \alpha + \beta$ nimmt, bestimmt sich auf dem ersten Bogen der Punkt C'; auf gleiche Weise erhält man durch $\angle A'AD' = \gamma + \delta$ den entsprechenden Punkt auf dem zweiten Bogen, und die Verbindungslinie $C'D'$ schneidet beide Bögen in den gesuchten Punkten C und D.

Fig. 155.



Behufs der Rechnung sei $AC = x$, $BD = y$, $CD = z$, $\angle ABC = \varphi$, $\angle BAD = \psi$; in den Dreiecken ACD und ACB ist dann

$$7) \qquad \frac{z}{x} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\gamma}, \quad \frac{x}{c} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha},$$

mithin durch Multiplication beider Gleichungen

$$\frac{z}{c} = \frac{(\sin\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}\sin\varphi;$$

ferner ist in den Dreiecken BDC und BDA

$$8) \qquad \frac{z}{y} = \frac{\sin(\beta+\gamma+\delta)}{\sin\beta}, \quad \frac{y}{c} = \frac{\sin\psi}{\sin\delta},$$

also ähnlich wie vorhin

$$\frac{z}{c} = \frac{\sin(\beta+\gamma+\delta)}{\sin\beta\sin\delta}\sin\psi.$$

Die Vergleichung beider Werthe von $\frac{z}{c}$ liefert die Beziehung

$$9) \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\alpha\sin\gamma\sin(\beta+\gamma+\delta)}{\sin\beta\sin\delta\sin(\alpha+\beta+\gamma)},$$

und da noch eine zweite Gleichung zwischen φ und ψ existirt, nämlich

$$\varphi + \psi = \beta + \gamma,$$

so kommt es nur noch auf die Behandlung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten an. Um logarithmisch bequeme Formeln zu erhalten, führen wir einen Hilfswinkel ϑ ein, der durch die Gleichung

10) $$tan\,\vartheta = \frac{\sin\alpha \sin\gamma \sin(\beta+\gamma+\delta)}{\sin\beta \sin\delta \sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

bestimmt wird und haben dann statt der Gleichung 9) die folgende

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = tan\,\vartheta;$$

ziehen wir beiderseits die Einheit ab, so wird

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\psi} = tan\,\vartheta - 1,$$

ebenso ist entsprechend

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\psi} = tan\,\vartheta + 1;$$

durch Division beider Gleichungen und Anwendung der Formel 25) in §. 42 ergiebt sich

$$\frac{tan\,\frac{1}{2}(\varphi - \psi)}{tan\,\frac{1}{2}(\psi + \varphi)} = \frac{tan\,\vartheta - 1}{tan\,\vartheta + 1} = tan\,(\vartheta - 45^0)$$

oder wegen $\varphi + \psi = \beta + \gamma$

11) $$tan\,\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = tan\,\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\,tan\,(\vartheta - 45^0).$$

Vermöge der Gleichung 10) ist ϑ bekannt. Die vorstehende Formel liefert $\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$, und da man $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ schon kennt, so findet man jetzt die Winkel φ und ψ sehr leicht; die Gleichungen 7) und 8) geben schliesslich

12) $$x = \frac{c \sin\varphi}{\sin\alpha}, \quad y = \frac{c \sin\psi}{\sin\delta},$$

13) $$z = \frac{c \sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\varphi}{\sin\alpha \sin\gamma} = \frac{c \sin(\beta+\gamma+\delta)\sin\psi}{\sin\beta \sin\delta}.$$

Hiermit ist zugleich die Aufgabe gelöst „wenn die Lage zweier Punkte A und B schon bekannt ist, die Lage zweier andern Punkte C und D durch blosse Winkelmessungen an den letztern zu bestimmen."

Beispiel. Für $c = 215'$, $\alpha = 85^0 7'$, $\beta = 32^0 10'$, $\gamma = 28^0 20'$, $\delta = 72^0 11'$ findet sich $\vartheta = 50^0 31' 53''$.

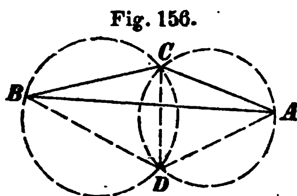
$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 30^0 15' \\ \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = 3^0 13' 58''\end{array}\right\} \begin{array}{l}\varphi = 33^0 28' 58'' \\ \psi = 27^0\ 1'\ 2''\end{array}$$

$$x = 119',08; \quad y = 102',6; \quad z = 141',66.$$

III. Kennt man die gegenseitige Lage von drei Punkten A, B, C, so lässt sich die Lage eines vierten Punktes D durch Messung zweier Winkel an D bestimmen; denn

aus den fünf Stücken $BC = a$, $AC = b$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle BDC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$ kann das Viereck $ACBD$ entweder construirt oder berechnet werden.

Fig. 156.



Die Construction ergiebt sich aus der Bemerkung, dass der Punkt D ebensowohl auf einem Kreisbogen liegen muss, welcher über der Sehne AC mit dem Peripheriewinkel β beschrieben ist, als auf einem Bogen über BC mit dem Peripheriewinkel α; der Punkt D ist daher der Durchschnitt beider Kreisbögen.

Für die Rechnung sei $BD = x$, $AD = y$, $CD = z$, $\angle CBD = \varphi$, $\angle CAD = \psi$, so ist in den Dreiecken BCD und ACD

14) $$\frac{x}{a} = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha}, \quad \frac{z}{a} = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha},$$

15) $$\frac{y}{b} = \frac{\sin(\beta + \psi)}{\sin \beta}, \quad \frac{z}{b} = \frac{\sin \psi}{\sin \beta};$$

die Vergleichung der hieraus folgenden Werthe von z führt zu der Beziehung

$$\frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{b \sin \psi}{\sin \beta} \text{ oder } \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

Andererseits kennt man die Summe der Winkel φ und ψ, nämlich

$$\varphi + \psi = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma),$$

es handelt sich daher wie vorhin um die Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten. Wir setzen zu diesem Zwecke

16) $$\tan \vartheta = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$$

und haben so die Beziehung

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \tan \vartheta,$$

aus welcher wie früher folgt

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi)}{\tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi)} = \frac{\tan \vartheta - 1}{\tan \vartheta + 1} = \tan(\vartheta - 45^0);$$

wegen $\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = 180^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ ergiebt sich weiter

17) $\tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \tan [180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)] \tan (\vartheta - 45^\circ)$
oder was dasselbe ist

18) $\tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \tan (45^\circ - \vartheta)$.

In Verbindung mit $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ führt eine der Gleichungen 17) und 18) zur Kenntniss der Winkel φ und ψ; nachher findet man

19) $$\begin{cases} x = \dfrac{a \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha}, \quad y = \dfrac{b \sin(\beta + \psi)}{\sin \beta}, \\ z = \dfrac{a \sin \varphi}{\sin \alpha} = \dfrac{b \sin \psi}{\sin \beta}. \end{cases}$$

Beispiel. Für $a = 312$, $b = 520$, $\alpha = 23^\circ 25'$, $\beta = 32^\circ 52'$, $\gamma = 65^\circ 27'$ erhält man $\vartheta = 50^\circ 40' 17''$ und nach No. 17)

$$\tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \tan 119^\circ 8' . \tan 5^\circ 40' 17''$$
$$= - \tan 60^\circ 52' . \tan 5^\circ 40' 17'',$$

woraus

$$\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = -(10^\circ 6' 10''4);$$

es ist also im vorliegenden Falle $\psi > \varphi$, nämlich

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\psi - \varphi) = 10^\circ 6' 10''4 \\ \frac{1}{2}(\psi + \varphi) = 119^\circ 8' \end{array}\right\} \begin{array}{l} \varphi = 109^\circ \; 1' 49''6, \\ \psi = 129^\circ 14' 10''4, \end{array}$$
$$x = 579{,}31; \quad y = 294{,}46; \quad z = 742{,}17.$$

Die erwähnte Bestimmung eines vierten Punktes durch drei schon bekannte Punkte kommt übrigens häufig vor und heisst das Rückwärtseinschneiden oder, nach ihrem Erfinder, die Pothenot'sche Aufgabe.

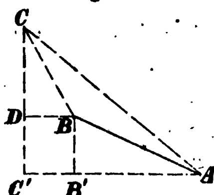
§. 59.
Höhenmessungen.

Die Aufgabe aller Höhenmessungen besteht darin, den Abstand eines Punktes von einer horizontalen Ebene zu ermitteln; wie bei der Aufnahme unzugänglicher Linien überhaupt, geschieht auch hier die Auflösung meistens durch Messung einer beliebig gewählten Standlinie und gewisser Winkel, welche theils Horizontal-, theils Verticalwinkel (sogen. Elevationswinkel) sein können. Die hauptsächlichsten Aufgaben dieser Art sind folgende.*)

*) Hinsichtlich der geringen stereometrischen Vorkenntnisse, welche zur Lösung derselben erforderlich sind, verweisen wir auf das erste Capitel des zweiten Bandes.

I. Wenn es möglich ist, die Standlinie $AB = c$ in eine durch die zu messende Höhe CC' gehende Verticalebene zu legen, so denke man sich durch den tiefsten Punkt A der Standlinie eine horizontale Gerade $AB'C'$ gezogen und beobachte in A die beiden Elevationswinkel $BAC' = \varepsilon_1$, $CAB' = \varepsilon_2$ und in B den Elevationswinkel $CBD = \varepsilon_3$; es ist dann aus naheliegenden Gründen

Fig. 157.



$$\angle BAC = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \quad \angle ABC = 180^0 - (\varepsilon_3 - \varepsilon_1),$$
$$\angle ACB = \varepsilon_3 - \varepsilon_2.$$

In dem Dreiecke ABC kennt man jetzt eine Seite $AB = c$ und die Winkel, man hat folglich

$$AC = \frac{c \sin (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}{\sin (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)},$$

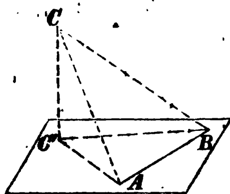
und daraus folgt CC', welches h heissen möge, indem man $h = AC \,.\, \sin \varepsilon_2$ und für AC seinen Werth setzt, also

20) $$h = \frac{c \sin (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \sin \varepsilon_2}{\sin (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)}.$$

Man findet hiermit die Höhe von C über der durch A gelegten Horizontalen; wollte man dagegen den Höhenunterschied der Punkte C und B berechnen, so vermindert man entweder h um $C'D = c \sin \varepsilon_1$ oder bestimmt erst BC auf ähnliche Art wie vorhin AC und nachher CD mittelst der Formel $CD = BC \sin \varepsilon_3$.

II. Lässt sich die Standlinie $AB = c$ nicht in eine Vertikalebene durch C aber doch wenigstens horizontal legen, so misst man an dem einen Endpunkte A den Horizontalwinkel $C'AB = \alpha$ und den Elevationswinkel $C'AC = \varepsilon$, am anderen Ende B den Horizontalwinkel $ABC' = \beta$; in dem horizontalen Dreiecke ABC' kennt man jetzt eine Seite und die Winkel, daraus folgt

Fig. 158.



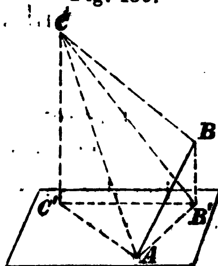
$$AC' = \frac{c \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)},$$

und nun ergiebt sich $CC' = h$ mittelst der Gleichung $h = AC' \tan \varepsilon$, nämlich

21) $$h = \frac{c \sin \beta \tan \varepsilon}{\sin(\alpha + \beta)},$$

III. Der complicirteste Fall tritt ein, wenn sich die Standlinie $AB = c$ weder in eine Verticalebene mit $CC' = h$ noch horizontal legen lässt; in diesem Falle misst man in A den Horizontalwinkel $B'AC' = \alpha$ und die beiden Elevationswinkel $BAB' = \varepsilon_1$, $CAC' = \varepsilon_2$, in B den Horizontalwinkel $AB'C' = \beta$. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke ABB' folgt dann

Fig. 159.



$$AB' = c \cos \varepsilon_1,$$

und nun verhält sich die Sache ebenso, als wäre die horizontale Gerade AB' als Standlinie genommen worden; nach No. 21) ist nämlich

$$h = \frac{AB' \sin \beta \tan \varepsilon_2}{\sin(\alpha + \beta)},$$

mithin nach Substitution des Werthes von AB'

22) $$h = \frac{c \sin \beta \cos \varepsilon_1 \tan \varepsilon_2}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Will man noch die Höhendifferenz der Punkte B und C, so ist h um $BB' = c \sin \varepsilon_1$ zu vermindern.

Anhang zur Trigonometrie.

I. Directe Methode zur Berechnung der trigonometrischen Functionen.

Bei der in §. 44 erörterten Berechnungsmethode geht man von irgend einem Winkel aus, dessen trigonometrische Functionen bekannt sind, und leitet von diesen die Functionen anderer Winkel ab; die Methode beruht also auf einer successiven Berechnung. Wenn dies auch in praktischer Beziehung, nämlich zur Herstellung trigonometrischer Tafeln, völlig ausreicht, so bleibt doch noch die tiefere wissenschaftliche Frage übrig, ob es wohl möglich sein würde, aus einem gegebenen Winkel u die zugehörigen trigonometrischen Functionen direct zu berechnen, ohne die Functionen irgend welcher kleinerer oder grösserer Winkel vorher zu kennen. Um diese Frage beantworten zu können, schicken wir einige Hilfssätze voraus.

a. Sind a und b beliebige positive Grössen, m eine ganze positive Zahl, so gilt bekanntlich die identische Gleichung

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1};$$

die grössere der beiden Zahlen a und b sei a; es wird dann die rechte Seite zu gross, wenn man statt jedes b das grössere a setzt, sie wird dagegen zu klein, wenn man an die Stelle jedes a das zu kleine b treten lässt, mithin ist

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} < ma^{m-1} \text{ und } \frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1}.$$

In der ersten Ungleichung nehmen wir $a = p$, $b = p - 1$, wodurch der Bedingung $a > b$ genügt wird, und $m = k + 1$; es ist dann

$$\frac{p^{k+1} - (p-1)^{k+1}}{k+1} < p^k;$$

aus der zweiten Ungleichung ziehen wir für $a = p + 1$, $b = p$, $m = k + 1$,

$$\frac{(p+1)^{k+1} - p^{k+1}}{k+1} > p^k,$$

also zusammen

$$\frac{(p+1)^{k+1} - p^{k+1}}{k+1} > p^k > \frac{p^{k+1} - (p-1)^{k+1}}{k+1}.$$

Wir setzen hier der Reihe nach $p = 1, 2, 3 \ldots n$ und addiren alle entstehenden Ungleichungen; dies giebt bei gehöriger Hebung

$$\frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1} > 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k > \frac{n^{k+1}}{k+1}.$$

Lassen wir linker Hand im Zähler -1 weg, wodurch die Ungleichung stärker wird, und dividiren durchgängig mit n^{k+1}, so erhalten wir

$$\frac{1}{k+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} > \frac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} > \frac{1}{k+1}.$$

Je grösser n ist, desto weniger differirt $\frac{1}{n}$ von Null und desto näher kommt $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1}$ der Einheit; bei unendlich wachsenden n können also die beiden äussersten Grössen einander beliebig nahe gebracht werden, ihr gemeinschaftlicher Gränzwerth ist $\frac{1}{k+1}$ und dieser muss nun auch der Gränzwerth der zwischenliegenden Grösse sein. Demnach ist für unendlich wachsende n:

1) Gränzwerth von $\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$.

b. In der Formel 1) des §. 43 setzen wir $u = \frac{v}{n}$ und dividiren beiderseits mit n; dies giebt

$$\frac{\cos\frac{v}{n} + \cos\frac{2v}{n} + \cos\frac{3v}{n} + \ldots + \cos\frac{nv}{n}}{n}$$

$$= -\frac{1}{2n} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{v}{n}}{2n\sin\frac{v}{2n}} = -\frac{1}{2n} + \frac{\sin\left(v + \frac{v}{2n}\right)}{2n\sin\frac{v}{2n}}.$$

Bei unendlich wachsenden n nähern sich $\frac{1}{2n}$ und $\frac{v}{2n}$ der gemeinschaftlichen Gränze Null; weil ferner $\sin\delta$ zwischen δ und $\delta - \frac{1}{2}\delta^3$ liegt, so ist

$$\frac{v}{2n} > \sin\frac{v}{2n} > \frac{v}{2n} - \tfrac{1}{6}\left(\frac{v}{2n}\right)^3,$$

$$v > 2n\sin\frac{v}{2n} > v - \frac{v^3}{8n^2},$$

und hieraus geht hervor, dass das Product $2n\sin\frac{v}{2n}$ der Gränze v zueilt. Nach diesen Bemerkungen zusammen hat man

2) Gränzwerth von $\dfrac{\cos\frac{v}{n} + \cos\frac{2v}{n} + \ldots + \cos\frac{nv}{n}}{n} = \dfrac{\sin v}{v}.$

c. In der Formel 3) des §. 43 nehmen wir $u = \frac{v}{n}$ und dividiren beiderseits mit n; dies giebt

$$\frac{\sin\frac{v}{n} + \sin\frac{2v}{n} + \sin\frac{3v}{n} + \ldots + \sin\frac{nv}{n}}{n}$$

$$= \frac{1}{2n}\cot\frac{v}{2n} - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\frac{v}{n}}{2n\sin\frac{v}{2n}} = \frac{\cos\frac{v}{2n} - \cos\left(v + \frac{v}{2n}\right)}{2n\sin\frac{v}{2n}}.$$

Durch Uebergang zur Gränze für unendlich wachsende n erhält man

3) Gränzwerth von $\dfrac{\sin\frac{v}{n} + \sin\frac{2v}{n} + \ldots + \sin\frac{nv}{n}}{n} = \dfrac{1 - \cos v}{v}.$

d. Nach diesen Vorbereitungen ist es sehr leicht, aus den schon bekannten Ungleichungen

4) $\cos v < 1,$

5) $\sin v < v,$

6) $\cos v > 1 - \frac{1}{2}v^2,$

beliebig viele neue Ungleichungen herzuleiten, welche eine weit genauere Berechnung von $\cos v$ und $\sin v$ gestatten (v bedeutet hier immer den Bogen). Lassen wir nämlich in No. 6) der Reihe nach $\frac{v}{n}, \frac{2v}{n}, \frac{3v}{n}, \ldots \frac{nv}{n}$ an die Stelle von v treten und nehmen das arithmetische Mittel aller entstehenden Ungleichungen, so ist

$$\frac{\cos\frac{v}{n} + \cos\frac{2v}{n} + \cos\frac{3v}{n} + \ldots + \cos\frac{nv}{n}}{n}$$

$$> 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}v^2.$$

Diese Relation besteht für jedes noch so grosse n; wenn aber n ins Unendliche wächst, so nähern sich beide Seiten bestimmten endlichen Gränzen und es wird nach No. 2) und No. 1)

$$\frac{\sin v}{v} > 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} v^2,$$

oder

7) $$\sin v > v - \frac{1}{2 \cdot 3} v^3.$$

Hier kann wieder das nämliche Verfahren angewendet werden. Man lässt nämlich $\frac{v}{n}, \frac{2v}{n}, \frac{3v}{n}, \ldots \frac{nv}{n}$ an die Stelle von v treten und nimmt das arithmetische Mittel aller entstehenden Ungleichungen; dies giebt zunächst

$$\frac{\sin \frac{v}{n} + \sin \frac{2v}{n} + \sin \frac{3v}{n} + \ldots + \sin \frac{nv}{n}}{n}$$

$$> \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2} v - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{n^4} v^3.$$

Der Uebergang zur Gränze für unendlich wachsende n liefert

$$\frac{1 - \cos v}{v} > \tfrac{1}{2} v - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \tfrac{1}{4} v^4,$$

oder

8) $$\cos v < 1 - \tfrac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} v^4.$$

Man übersieht sogleich, wie sich dieses einfache Verfahren fortsetzen lässt; die nächste Ungleichung dieser Art lautet

$$\frac{\sin v}{v} < 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} v^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} v^4,$$

oder

9) $$\sin v < v - \frac{1}{2 \cdot 3} v^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} v^5;$$

darauf erhält man

$$\frac{1 - \cos v}{v} < \tfrac{1}{2} v - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} v^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} v^5,$$

oder

10) $$\cos v > 1 - \tfrac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} v^4 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} v^6$$

u. s. w.

Gehörig zusammengestellt sind die Ergebnisse nach No. 4), 6), 8), 10) folgende

$$11)\quad \begin{cases} \cos v < 1, \\ \cos v > 1 - \frac{v^2}{1.2}, \\ \cos v < 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4}, \\ \cos v > 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} \end{cases}$$

u. s. w.

und nach No. 5), 7), 9)

$$12)\quad \begin{cases} \sin v < \frac{v}{1}, \\ \sin v > \frac{v}{1} - \frac{v^3}{1.2.3}, \\ \sin v < \frac{v}{1} - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5}, \\ \sin v > \frac{v}{1} - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2\ldots7} \end{cases}$$

u. s. w.

Die Differenzen je zweier auf einander folgenden Ausdrücke sind bei den Cosinusformeln der Reihe nach

$$\frac{v^2}{1.2}, \quad \frac{v^4}{1.2.3.4}, \quad \frac{v^6}{1.2\ldots6}, \quad \ldots$$

und bei den Sinusformeln

$$\frac{v^3}{1.2.3}, \quad \frac{v^5}{1.2\ldots5}, \quad \frac{v^7}{1.2\ldots7}, \quad \ldots$$

also überhaupt von der Form

$$\frac{v^m}{1.2.3\ldots m}.$$

Beschränken wir uns nun auf spitze Winkel, so ist v höchstens gleich dem Quadranten $= \frac{1}{2}\pi = 1{,}57\ldots$, mithin jedenfalls $v < 2$, und folglich

$$\frac{v^m}{1.2\ldots m} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \ldots \frac{2}{m} < 2 \,.\, 1 \,.\, (\tfrac{2}{3})^{m-2} < 5 \,.\, (\tfrac{2}{3})^m;$$

ferner hat man nach *a.*

$$\frac{1 - (\frac{2}{3})^m}{1 - \frac{2}{3}} > m\,(\tfrac{2}{3})^{m-1}, \quad 1 - (\tfrac{2}{3})^m > \frac{m}{3}\,(\tfrac{2}{3})^{m-1},$$

oder

$$1 > (\tfrac{2}{3})^m \left\{1 + \tfrac{1}{2} m\right\}$$

und umgekehrt

$$(\tfrac{2}{3})^m < \frac{1}{1 + \frac{1}{2} m},$$

folglich um so mehr

$$\frac{v^m}{1.2.3\ldots m} < \frac{5}{1+\frac{1}{2}m} < \frac{10}{m},$$

woraus unmittelbar hervorgeht, dass der Ausdruck linker Hand bei unendlich wachsenden m die Null zur Gränze hat. Die vorhin erwähnten Differenzen nehmen also bis zu jedem beliebigen Grade der Kleinheit ab und die Formeln 11) und 12) liefern demnach die Werthe von $\cos v$ und $\sin v$ um so genauer, je weiter die Rechnung fortgesetzt wird.

Als Beispiel diene die Berechnung von $\sin 16^0\,22'\,12''8$. Hier ist

$$\begin{aligned} Arc\, 16^0 &= 0{,}27925268 \\ Arc\, 22' &= 0{,}00639954 \\ Arc\, 12'' &= 0{,}00005818 \\ Arc\, 0''8 &= 0{,}00000388 \\ \hline v &= 0{,}28571428 \end{aligned}$$

mithin nach den Formeln unter No. 12)

$$\begin{aligned} \sin v &< 0{,}28571428 \\ \frac{v^3}{2.3} &= 0{,}00388727 \quad (-) \\ \hline \sin v &> 0{,}28182701 \\ \frac{v^5}{2\ldots5} &= 0{,}00001587 \quad (+) \\ \hline \sin v &< 0{,}28184288 \\ \frac{v^7}{2\ldots7} &= 0{,}00000003 \quad (-) \\ \hline \sin v &> 0{,}28184285 \end{aligned}$$

Die beiden letzten Angaben stimmen in sieben Decimalen überein und es ist daher auf eben soviel Stellen genau $\sin 16^0\,22'\,12''8 = 0{,}2818428$.

II. Graphische Rectification und Transposition von Kreisbögen.

Aus den Formeln 11) und 12) des vorigen Abschnittes erhält man

$$v\,(2+\cos v) \begin{cases} < 3v - \frac{1}{2}v^3 + \frac{1}{24}v^5, \\ > 3v - \frac{1}{2}v^3 + \frac{1}{24}v^5 - \frac{1}{720}v^7, \end{cases}$$

$$3 \sin v \begin{cases} > 3v - \frac{1}{2}v^3, \\ < 3v - \frac{1}{2}v^3 + \frac{1}{40}v^5, \end{cases}$$

und es lassen sich diese Ungleichungen benutzen um die Differenz

$$v\,(2+\cos v)-3\sin v$$

zwischen zwei Gränzen einzuschliessen. Nimmt man erstens statt des Minuenden den oben erwähnten zu grossen Werth und statt des Subtrahenden den zu kleinen Werth, so hat man

$$v\,(2+\cos v)-3\sin v<\tfrac{1}{24}v^5;$$

nimmt man dagegen den Minuenden zu klein und den Subtrahenden zu gross, so wird

$$v\,(2+\cos v)-3\sin v>\tfrac{1}{60}v^5-\tfrac{1}{720}v^7.$$

Je kleiner v ist, desto weniger betragen die rechten Seiten der vorigen Ungleichungen und um so eher darf man sich erlauben,

$$v\,(2+\cos v)-3\sin v=0.$$

oder

$$v=\frac{3\sin v}{2+\cos v}$$

setzen. In wie weit dies richtig ist, mag das Beispiel $v=Arc\,30^0=\frac{1}{6}\pi$ zeigen. Dann müsste sein

$$\tfrac{1}{6}\pi=\frac{3\,.\,\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{3}{4+\sqrt{3}}=\frac{3\,(4-\sqrt{3})}{13}=0{,}523373\,;$$

der wahre Werth von $\frac{1}{6}\pi$ ist 0,523599, mithin beträgt der Fehler 0,000226; für einen Radius = 1 Fuss = 100 Linien wäre die Differenz $=\frac{1}{50}$ Linie also ganz unmerklich, und hieraus geht hervor, dass man bei graphischen Arbeiten die obigen Formeln zur Rectification von Bögen $\leq 30^0$ benutzen kann. Dies giebt folgende Construction: durch den Anfangspunkt A des gegebenen Kreisbogens AB ziehe man eine Tangente an den Kreis und zugleich einen Durchmesser, auf welchem man die Strecke AC gleich dem dreifachen Radius nimmt; die Gerade CB schneidet dann von der Tangente eine Strecke AD ab, die dem Bogen AB sehr nahe kommt. Es ist nämlich für den Radius = 1, $Arc\,AB=v$, $BE=\sin v$,

$$CE:\,EB=CA:AD,$$

d. h.

$$2+\cos v:\sin v=\;3:AD,$$

woraus

$$AD = \frac{3 \sin v}{2 + \cos v}$$

oder näherungsweis $AD = v = Arc\, AB$ folgt.

Wenn der zu rectificirende Bogen mehr als 30° fasst, mithin $\frac{1}{6}\pi$ übersteigt, so liegt er entweder zwischen $\frac{1}{6}\pi$ und $\frac{2}{6}\pi$ oder zwischen $\frac{2}{6}\pi$ und $\frac{3}{6}\pi$ u. s. w. Man rectificirt dann nach §. 35 die halbe Kreisperipherie, wodurch man eine Gerade von der Länge π erhält und bestimmt hieraus dasjenige Sechstel von π, welches dem Bogen AB am nächsten kommt; ferner rectificirt man den überschiessenden Bogen, der nun jedenfalls weniger als 30° fasst, und addirt die beiden erhaltenen Geraden.

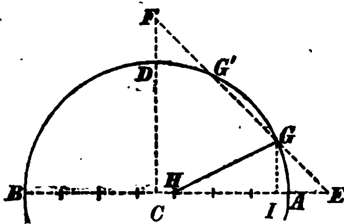
Die vorigen Constructionen lassen sich auch umgekehrt anwenden, um auf einem gegebenen Kreise einen Bogen abzuschneiden, der einer gegebenen Geraden gleichkommt. Ist erstens die gegebene Strecke im Verhältniss zum Radius so klein, dass der gesuchte Bogen voraussichtlich nicht mehr als 30° fassen wird, so legt man AD tangential an den Kreis, zieht wieder AC und DC, welche letztere den Kreis in B schneidet; AB ist dann der verlangte Bogen. Im entgegengesetzten Falle rectificirt man den Halbkreis und theile die erhaltene Strecke π in sechs gleiche Theile; die gegebene Gerade besteht dann aus einigen solchen Sechsteln plus einem Ueberschusse $< \frac{1}{6}\pi$. Man überträgt nun zuerst den Ueberschuss auf den Kreis und vergrössert den erhaltenen Bogen um die nöthigen Sechstel des Halbkreises.

Hieran knüpft sich endlich noch die Aufgabe, einen gegebenen Kreisbogen auf einen anderen Kreis zu übertragen. Die Lösung besteht einfach darin, dass man erst den gegebenen Bogen rectificirt, und die erhaltene Strecke auf den zweiten Kreis überträgt.

III. Die regelmässigen Vielecke.

Um die Genauigkeit der in §. 30 angegebenen Näherungsconstruction für regelmässige Vielecke beurtheilen zu können, wollen wir dieselbe der Rechnung unterwerfen.

Fig. 160.



Fällen wir von G aus das Perpendikel GI auf BE und setzen $AC = r$, $AI = x$, $GI = y$ und $GH = z$, so ist wegen $CF = CE$ auch $IG = IE$, oder $IG = AI + AE$, d. h.

1) $$y = z + \frac{2r}{n},$$

ferner $HI = AH - AI = 3 \cdot \frac{2r}{n} - x$ und

$$\overline{GH}^2 = \overline{GI}^2 + \overline{HI}^2,$$

d. i.

$$z^2 = \left(x + \frac{2r}{n}\right)^2 + \left(\frac{6r}{n} - x\right)^2$$

und aufgelöst nach gehöriger Zusammenfassung

2) $$z^2 = \frac{40r^2}{n^2} - \frac{8r}{n} . x + 2x^2.$$

Um nun x zu finden, bemerken wir, dass ein rechtwinkliges Dreieck entstehen würde, sobald die Geraden AG und BG gezogen werden, und dass folglich $\overline{GI}^2 = AI . IB$ sein muss; nach unserer Bezeichnung ist diess

$$\left(x + \frac{2r}{n}\right)^2 = x\,(2r - x)$$

oder auch

3) $$2x^2 = \frac{(2n-4)r}{n}\,x - \frac{4r^2}{n},$$

und wenn wir dies in die Gleichung 2) substituiren, so wird

4) $$z^2 = \frac{36r^2}{n^2} - \frac{(2n-12)r}{n}\,x.$$

Sehen wir dagegen die Gleichung 3) als quadratische mit der Unbekannten x an, so ergiebt sich durch Auflösung derselben

$$x = \frac{n - 2 \pm \sqrt{(n-2)^2 - 8}}{2n}\,r.$$

Hier muss das untere Zeichen genommen werden; die Linie EF schneidet nämlich den Kreis zweimal in G und G' und folglich giebt es zwei Werthe von x, nämlich AI und AI' (wenn man sich von G' das Perpendikel $G'I'$ herabgelassen denkt), von diesen Werthen können wir aber, der Construction zufolge, nur den kleineren brauchen und mithin ist:

$$x = \frac{n - 2 - \sqrt{(n-2)^2 - 8}}{2n} r.$$

Die Formel 4) verwandelt sich jetzt in die folgende:

$$z^2 = \frac{r^2}{n^2} [36 + (n-6)(n-2) - (n-6)\sqrt{(n-2)^2 - 8}],$$

wobei man noch $(n-4)^2 + 32$ für $36 + (n-6)(n-2)$ setzen kann. Da nun z näherungsweis die Seite des regelmässigen Sehnenvielecks von n Ecken sein soll, so wäre also, wenn wir s_n für z schreiben,

5) $$s_n = \frac{r}{n} \sqrt{(n-4)^2 + 32 - (n-6)\sqrt{(n-2)^2 - 8}}.$$

In wie weit dies richtig ist, lässt sich dadurch entscheiden, dass man den Centriwinkel des in Rede stehenden Vielecks berechnet; man hat nämlich unmittelbar für diesen Winkel, welcher ω heissen möge, die Formel

6) $$\omega = \frac{360^\circ}{n},$$

andererseits aber auch $\sin \frac{180^\circ}{n} = \sin \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2} s_n$ oder, wenn man für s_n die vorige Formel nimmt und $r = 1$ setzt,

7) $$\sin \tfrac{1}{2}\omega = \frac{1}{2n} \sqrt{(n-4)^2 + 32 - (n-6)\sqrt{(n-2)^2 - 8}}.$$

Hiernach lässt sich also der Sinus von $\frac{1}{2}\omega$ berechnen; die Tafeln geben dann $\frac{1}{2}\omega$, folglich auch ω, und der so bestimmte Centriwinkel müsste nun bei einer vollkommen genauen Formel $= \frac{360^\circ}{n}$ sein. Nehmen wir beispielsweis $n = 7$, so ist der wahre Centriwinkel

$$\omega = \frac{360^\circ}{n} = 51^\circ 25\tfrac{5}{7}',$$

die Formel 7) dagegen giebt

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega = \tfrac{1}{14} \sqrt{41 - \sqrt{17}} = 0{,}4337596.$$

Hierzu gehört den Tafeln nach der Winkel

$$\tfrac{1}{2}\omega = 25^\circ 42\tfrac{1}{3}', \quad \omega = 51^\circ 24\tfrac{2}{3}',$$

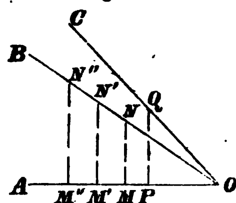
was von dem wahren Werthe nur wenig verschieden ist. Um überhaupt die Genauigkeit der Formel 7), d. h. der angegebenen Construction beurtheilen zu können, geben wir folgende kleine Tabelle, worin ω den wahren Werth des Centriwinkels und ω' seinen Näherungswerth bezeichnet.

n	ω'	ω	Diff.
7	$51^0\,24'\,\frac{2}{3}$	$51^0\,25'\,\frac{5}{7}$	$-1'\,\frac{1}{21}$
9	$39^0\,56'\,\frac{1}{3}$	40^0	$-3'\,\frac{2}{3}$
11	$32^0\,40'$	$32^0\,43'\,\frac{7}{11}$	$-3'\,\frac{7}{11}$
13	$27^0\,38'\,\frac{2}{3}$	$27^0\,41'\,\frac{7}{13}$	$-2\,\frac{34}{39}$
15	$23^0\,58'$	24^0	$-2'$
17	$21^0\;9'\,\frac{1}{3}$	$21^0\,10'\,\frac{10}{17}$	$-1'\,\frac{13}{51}$
19	$18^0\,56'\,\frac{1}{3}$	$18^0\,56'\,\frac{16}{19}$	$-0'\,\frac{29}{57}$
21	$17^0\;8'\,\frac{2}{5}$	$17^0\;8'\,\frac{4}{7}$	$-0'\,\frac{6}{35}$
23	$15^0\,39'\,\frac{1}{3}$	$15^0\,39'\,\frac{3}{23}$	$+0'\,\frac{14}{69}$
. .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
45	$8^0\;1'\,\frac{1}{3}$	8^0	$+1'\,\frac{1}{3}$
67	$5^0\,23'\,\frac{2}{3}$	$5^0\,22'\,\frac{26}{67}$	$+1'\,\frac{56}{201}$
89	$4^0\;3'\,\frac{2}{3}$	$4^0\;2'\,\frac{62}{89}$	$+0'\,\frac{259}{267}$
101	$3^0\,35'$	$3^0\,33'\,\frac{87}{101}$	$+1'\,\frac{14}{101}$

Ein weit bequemeres und zugleich genaueres Mittel zur Construction regelmässiger Vielecke bieten die trigonometrischen Tafeln.

Soll nämlich überhaupt ein in Graden, Minuten u. s. w. gegebener Winkel AOB graphisch dargestellt werden, so nimmt man aus den Tafeln den Werth von $\tan AOB$, der im Allgemeinen die Form eines Bruches $\frac{n}{m}$ hat, und construirt nach irgend einem Maasstabe ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten m und n zu Längenzahlen haben, nämlich $OM = m$, $MN = n$; der Winkel MON ist dann der gesuchte Winkel AOB. Hierbei muss man den Werth von $\tan AOB$ soweit abrunden, als die Genauigkeit des angewendeten Maasstabes geht. Soll z. B. der Winkel von 24^0 mittelst eines Maasstabes construirt werden, dessen Einheit eine Decimallinie ist, so würde man statt $\tan 24^0 = 0{,}4452287$ setzen

Fig. 161.



$$\tan 24^0 = 0{,}45 = \tfrac{9}{20},$$

also $m = 20$, $n = 9$ nehmen; dieser abgerundeten Tangente entspricht der Winkel 24° 13′ 40″, man begeht also einen Fehler von 13′ 40″. Weit genauer wird dieses Verfahren, wenn man nicht schlechthin abrundet, sondern einen gewöhnlichen Bruch aufsucht, der jenem Decimalbruche nahe kommt, aber aus kleineren Zahlen besteht*). So ist z. B. 0,4452287 wenig verschieden von $\tfrac{61}{137} = 0{,}4452554$, und wenn man jetzt

$$\tan 24^0 = \tfrac{61}{137} = \frac{6{,}1}{13{,}7}$$

nimmt, was mit Hilfe eines Transversalenmaasstabes ebenso leicht zu construiren ist, wie der vorige Werth, so erreicht der Fehler noch nicht 5 Secunden. Für den practischen Gebrauch geben wir folgende

Tabelle zur Construction regelmässiger Vielecke.

n	$\tan\omega'$	ω'	ω	δ
7	$\frac{79}{63}$	51° 25′ 43″5	51° 25′ 42″9	+ 0″6
9	$\frac{47}{56}$	40° 0′ 22″5	40°	+ 22″5
	$\frac{73}{87}$	39° 59′ 57″7		− 2″3
11	$\frac{9}{14}$	32° 44′ 6″8	32° 43′ 38″2	+ 28″6
	$\frac{232}{361}$	32° 43′ 37″9		− 0″3
13	$\frac{21}{40}$	27° 41′ 58″1	27° 41′ 32″3	+ 25″8
	$\frac{74}{141}$	27° 41′ 29″4		− 1″9
15	$\frac{61}{137}$	24° 0′ 4″6	24°	+ 4″6
17	$\frac{31}{80}$	21° 10′ 52″9	21° 10′ 35″3	+ 17″6
	$\frac{43}{111}$	21° 10′ 32″7		− 2″6
19	$\frac{23}{67}$	18° 56′ 47″4	18° 56′ 50″5	− 3″1
21	$\frac{29}{94}$	17° 8′ 43″9	17° 8′ 34″3	+ 9″6

Bei grossen n wird $\tan\omega'$ ein so kleiner Bruch, dass das rechtwinklige Dreieck, welches zur Construction von ω' dient, zwei sehr verschiedene Katheten erhält, was für

*) Solche Brüche findet man bekanntlich mit Hilfe von Kettenbrüchen.

die Zeichnung eine Unbequemlichkeit ist. Man thut dann besser, $2\omega'$ oder $4\omega'$ u. s. w. zu bestimmen und rückwärts zu theilen; z. B.

n	$\tan 2\omega'$	ω'	ω	δ
23	$\frac{45}{74}$	15° 39′ 7″4	15° 39′ 7″8	— 0″4
25	$\frac{106}{191}$	14° 23′ 58″7	14° 24′	— 1″3
27	$\frac{118}{225}$	13° 20′ 0″3	13° 20′	+ 0″3
29	$\frac{31}{67}$	12° 24′ 52″8	12° 24′ 49″7	+ 3″1
31	$\frac{109}{254}$	11° 36′ 46″4	11° 36′ 46″5	— 0″1

Sollten die angegebenen Werthe von $\tan \omega'$ oder $\tan 2\omega'$ nicht bequem genug für den gerade zur Hand liegenden Maasstab sein, so kann man sie leicht dadurch passend machen, dass man Zähler und Nenner mit einer zweckmässig gewählten Zahl multiplicirt oder dividirt; z. B. $\frac{9}{14} = \frac{13,5}{21} = \frac{18}{28}$ u. s. w.

IV. Das regelmässige Siebenzehneck.

Unter die wenigen regelmässigen Vielecke, welche geometrisch in aller Genauigkeit construirt werden können, gehört noch das regelmässige Vieleck von 17 Seiten. Da die Berechnung desselben ohne Trigonometrie nicht möglich ist, so musste sie in §. 30 übergangen werden; wir holen sie hier nach.

Die Seite des regelmässigen Siebenzehnecks würde sich leicht finden lassen, wenn man den Cosinus oder Sinus von $\frac{360^0}{17}$ oder von $\frac{180^0}{17}$ anzugeben wüsste. Setzen wir $\frac{180^0}{17} = \varphi$, so ist $\cos \varphi$ vorläufig unbekannt und ebenso sind es $\cos 2\varphi$, $\cos 3\varphi$ u. s. w.; es giebt aber Beziehungen zwischen diesen Unbekannten, mittelst welcher man ihre Werthe finden kann. So ist z. B. nach Formel 2) in §. 43 für $n = 8$, $u = \varphi$

$$\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \ldots + \cos 7\varphi - \cos 8\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2} - \frac{\cos(8+\frac{1}{2})\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi} = \tfrac{1}{2} - \frac{\cos 90^0}{2\cos\frac{90^0}{17}}$$

oder

1) $\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \ldots - \cos 8\varphi = \tfrac{1}{2}.$

Vertheilen wir die acht vorhandenen unbekannten Cosinus in zwei Gruppen dergestalt, dass

2) $\begin{cases} X = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi - \cos 6\varphi + \cos 7\varphi \\ Y = -\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 8\varphi \end{cases}$

gesetzt wird, so haben wir nach dem Vorigen die Gleichung

3) $X - Y = \tfrac{1}{2},$

und es würden sich die Unbekannten X und Y finden lassen, wenn man noch eine zweite Gleichung zwischen denselben erhalten könnte. Zu diesem Zwecke bilden wir das Product $2XY$ und zerlegen jedes doppelte Partialproduct von zwei Cosinus in eine Cosinussumme; die Ausführung dieser sehr leichten Rechnung giebt

$$2XY = 4[\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \ldots - \cos 8\varphi]$$

und hier kommt rechter Hand wieder jene schon in No. 1) summirte Reihe vor; wir erhalten so $XY = 1$ und durch Auflösung der nunmehrigen zwei Gleichungen $X - Y = \frac{1}{2}$ und $XY = 1$

$$X = \tfrac{1}{4}(+1 \pm \sqrt{17}), \quad Y = \tfrac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{17}),$$

wo wir aber nur das obere Zeichen gebrauchen können, weil aus naheliegenden Gründen X und Y positive Grössen sein müssen. Wir haben also

4) $X = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi - \cos 6\varphi + \cos 7\varphi = \tfrac{1}{4}(\sqrt{17} + 1),$

5) $Y = -\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 8\varphi = \tfrac{1}{4}(\sqrt{17} - 1).$

Wir zerlegen weiter X in zwei Theile x und ξ der Art, dass

6) $\cos 3\varphi + \cos 5\varphi = \xi, \quad \cos 6\varphi - \cos 7\varphi = x$

ist, wo nun ξ und x jedenfalls positiv ausfallen; wir haben dann

$$\xi - x = X = \tfrac{1}{4}(\sqrt{17} + 1);$$

ferner findet sich durch Multiplication und Zerlegung

$$2\xi x = \cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \ldots - \cos 8\varphi = \tfrac{1}{2}.$$

Durch Auflösung der beiden Gleichungen $\xi - x = X$ und $\xi x = \frac{1}{4}$ wird

7) $$\xi = \tfrac{1}{2}(\sqrt{X^2+1}+X)$$
$$= \tfrac{1}{8}(1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}) = \tfrac{1}{8}\xi',$$

8) $$x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{X^2+1}-X)$$
$$= \tfrac{1}{8}(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}) = \tfrac{1}{8}x'.$$

Auf ähnliche Weise zerlegen wir Y, indem wir setzen

9) $$\cos\varphi - \cos 4\varphi = \eta, \quad \cos 2\varphi + \cos 8\varphi = y.$$

Es ist dann einmal $y - \eta = Y$, ausserdem findet sich durch Multiplication und Zerlegung $\eta y = \frac{1}{4}$ und also

10) $$\eta = \tfrac{1}{2}(\sqrt{Y^2+1}-Y)$$
$$= \tfrac{1}{8}(1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}) = \tfrac{1}{8}\eta',$$

11) $$y = \tfrac{1}{2}(\sqrt{Y^2+1}+Y)$$
$$= \tfrac{1}{8}(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}) = \tfrac{1}{8}y'.$$

Betrachten wir nun die vier Gleichungen

12) $$\begin{cases} \cos 3\varphi + \cos 5\varphi = \xi, & \cos 6\varphi - \cos 7\varphi = x, \\ \cos\varphi - \cos 4\varphi = \eta, & \cos 2\varphi + \cos 8\varphi = y, \end{cases}$$

welche vier bekannt gewordene Grössen (ξ, x, η, y) und acht Unbekannte (die Cosinus) enthalten, etwas näher, so bemerken wir darin eine so eigenthümliche Verbindung der Unbekannten, dass die Bestimmung der letzteren ohne Schwierigkeit ausführbar ist. Jene Verbindung der Unbekannten besteht darin, dass man aus irgend einem Paare von Cosinus, welche in einer solchen Gleichung durch Addition oder Subtraction verbunden sind, sogleich das Product zweier Cosinus ableiten kann, die in einer andern solchen Gleichung vorkommen. In der That erhält man durch Umsetzung jeder Cosinussumme oder Cosinusdifferenz in ein Cosinusproduct aus No. 12)

$$2\cos\varphi\cos 4\varphi = \xi, \quad 2\cos 2\varphi\cos 8\varphi = x,\text{*)}$$
$$2\cos 6\varphi\cos 7\varphi = \eta, \quad 2\cos 3\varphi\cos 5\varphi = y.$$

*) Nämlich $\cos 6\varphi - \cos 7\varphi = \cos 6\varphi + \cos(180^\circ - 7\varphi) = \cos 6\varphi + \cos(17\varphi - 7\varphi) = \cos 6\varphi + \cos 10\varphi = 2\cos 2\varphi\cos 8\varphi$. Einer ähnlichen Umwandlung bedarf die Differenz $\cos\varphi - \cos 4\varphi$, um sie erst in eine Summe und dann in ein Product umzusetzen.

Stellt man diese Gleichungen mit den vorigen so zusammen, dass in je zwei Gleichungen immer dieselben Winkel vorkommen, so hat man

$$\begin{aligned} &\cos 3\varphi + \cos 5\varphi = \xi, \quad && 2\cos 3\varphi \cos 5\varphi = y, \\ &\cos 6\varphi - \cos 7\varphi = x, \quad && 2\cos 6\varphi \cos 7\varphi = \eta, \\ &\cos \varphi - \cos 4\varphi = \eta, \quad && 2\cos \varphi \cos 4\varphi = \xi, \\ &\cos 2\varphi + \cos 8\varphi = y, \quad && 2\cos 2\varphi \cos 8\varphi = x, \end{aligned}$$

und hier übersieht man die Möglichkeit, sämmtliche acht unbekannte Cosinus zu entwickeln, da in dem ersten Gleichungspaare nur die beiden Unbekannten $\cos 3\varphi$ und $\cos 5\varphi$ vorkommen, ebenso im zweiten Paare die Unbekannten $\cos 6\varphi$ und $\cos 7\varphi$ u. s. w. Wir wählen hier, wo es auf das Siebenzehneck ankommt, dessen Centriwinkel $\frac{360^0}{17} = 2 \cdot \frac{180^0}{17} = 2\varphi$ ist, das letzte Paar von Gleichungen, weil dieses den fraglichen Winkel enthält.

Durch Auflösung der beiden Gleichungen $\cos 2\varphi + \cos 8\varphi = y$ und $2\cos 2\varphi \cos 8\varphi = x$ findet man

$$\cos 2\varphi = \tfrac{1}{2}(y \pm \sqrt{y^2 - 2x}),$$
$$\cos 8\varphi = \tfrac{1}{2}(y \mp \sqrt{y^2 - 2x}),$$

wo man gleichzeitig entweder die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen hat; die letzteren dürfen hier aber nicht benutzt werden, weil sonst $\cos 2\varphi$ kleiner als $\cos 8\varphi$ ausfallen würde; so ist

13) $$\cos 2\varphi = \tfrac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 - 2x}),$$

oder, wenn man statt y und x setzt $\frac{1}{8}y'$ und $\frac{1}{8}x'$,

$$\cos 2\varphi = \tfrac{1}{16}(y' + \sqrt{y'^2 - 16x'}).$$

Substituirt man jetzt für y' und x' die unter 11) und 8) gefundenen Werthe

$$y' = -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}},$$
$$x' = -1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}},$$

so ergiebt sich nach einigen, weiter keinen Schwierigkeiten unterworfenen Reductionen

$$y'^2 - 16x' = 4(17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}})$$

und in Folge davon nach Ausziehung der Wurzel und Addition von y'

14) $$\cos 2\varphi =$$
$$\tfrac{1}{16}\left[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\right].$$

In einem mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreise ist $2\sin\varphi = \sqrt{2-2\cos 2\varphi}$ die Seite des regelmässigen Siebenzehnecks, also

15) $$2\sin\varphi = Chord\,\frac{360^0}{17} =$$
$$\tfrac{1}{4}\sqrt{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}$$

und bei numerischer Berechnung

$$2\sin\varphi = Chord\,\frac{360^0}{17} = 0{,}36749903563314\ldots$$

Um eine Construction für das reguläre Siebenzehneck zu erhalten, würde es sehr unvortheilhaft sein, von einer der verwickelteren Formeln 14) oder 15) ausgehen zu wollen, man kommt dagegen sehr leicht dadurch zum Ziele, dass man der Reihe nach X, Y, x, y, $\cos 2\varphi$ construirt, indem man diesen Grössen die zur Construction vortheilhafteste Form giebt. Für den Halbmesser 1 wird nämlich nach No. 4)

$$\tfrac{1}{2}X = \sqrt{\tfrac{17}{64}}+\tfrac{1}{8} = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{8})^2}+\tfrac{1}{8},$$

ferner auf ähnliche Weise nach No. 5)

$$\tfrac{1}{2}Y = \sqrt{\tfrac{17}{64}}-\tfrac{1}{8} = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{8})^2}-\tfrac{1}{8},$$

wonach die gleichzeitige Construction von $\frac{1}{2}X$ und $\frac{1}{2}Y$ äusserst leicht ist. Man hat dann weiter nach No. 8) und No. 11)

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}X)^2+(\tfrac{1}{2})^2}-\tfrac{1}{2}X,$$
$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2}Y)^2+(\tfrac{1}{2})^2}+\tfrac{1}{2}Y,$$

was sich wiederum leicht construiren lässt, weil aus dem Vorigen $\frac{1}{2}X$ und $\frac{1}{2}Y$ bekannt sind. Endlich ist nach No. 13) für $\sqrt{2x} = z$

$$\cos 2\varphi = \tfrac{1}{2}\left(y+\sqrt{y^2-z^2}\right)$$

und hieraus findet man $\cos 2\varphi$, nachdem vorher die mittlere Proportionale z zwischen dem Durchmesser 2 und der Linie x bestimmt worden ist. Errichtet man im Endpunkte des Cosinus eine Senkrechte auf demselben, so schneidet diese den Bogen 2φ ab, womit zugleich die Seite des regulären Siebenzehnecks bestimmt wird.

Man könnte noch fragen, auf welchen Gründen die vorhin ausgeführten Zerlegungen in X und Y, x und ξ u. s. w. beruhen, und ob es wohl möglich sein würde, durch ähnliche Zerfällungen noch andere regelmässige Vielecke zu berechnen und zu construiren. Auf diese Frage antwortet „die Theorie der Zahlen" mit folgendem allgemeinen Satze:

> Wenn n eine Primzahl und folglich $n-1$ eine zusammengesetzte Zahl ist, so zerlege man $n-1$ in seine Primfactoren, wodurch $n-1$ die Form $2^\alpha . 3^\beta . 5^\gamma \ldots$ erhält; die Theilung des Kreises in n gleiche Theile fordert dann die gleichzeitige Auflösung von α Gleichungen des zweiten, β Gleichungen des dritten, γ Gleichungen des fünften Grades u. s. w.

Da sich durch gerade Linie und Kreis nur Quadratwurzeln, d. h. die Wurzeln von Gleichungen zweiten Grades construiren lassen, so folgt aus dem obigen Theoreme, dass die Construction eines n-Ecks, n als Primzahl vorausgesetzt, nur dann elementar-geometrisch möglich ist, wenn $n-1$ eine Potenz der 2 ausmacht. Diese Eigenschaft findet statt bei den Zahlen $n = 3, 5, 17, 257$ u. s. w.; doch würde schon die Construction eines regelmässigen Vielecks von 257 Seiten überaus weitläufig werden.



Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Grundzüge

einer

wissenschaftlichen Darstellung

der

Geometrie des Maasses.

Ein Lehrbuch

von

Dr. Oskar Schlömilch,

Professor der höheren Mathematik und analytischen Mechanik an der K. S. polytechnischen Schule zu Dresden, Mitglied der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig etc.

Zweiter Theil.

Geometrie des Raumes.

Zweite Auflage.

Mit in den Text gedruckten Holzschnitten.

EISENACH,

bei Joh. Fr. Baerecke.

1862.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Obschon das vorliegende Lehrbuch seit einer Reihe von Jahren in mehreren Schulen eingeführt ist, so sind mir doch nur sehr wenige Bemerkungen gegen die Auswahl und Anordnung des Materiales zugekommen, und ich hatte daher keinen Grund, in dieser Beziehung wesentliche Aenderungen vorzunehmen. Dagegen habe ich auf Wunsch mehrerer erfahrener Schulmänner die Deductionen des ersten Capitels strenger gefasst und durch eine grössere Anzahl von Figuren anschaulicher zu machen gesucht. Ferner wurde in §. 10 Steiner's Beweis für den Euler'schen Satz von den Polyedern durch den von August gegebenen Beweis ersetzt, welcher an Einfachheit und Anschaulichkeit jedem anderen überlegen sein dürfte. Auch das Prismatoid und dessen Inhaltsbestimmung sind aufgenommen worden. Eine bedeutende Umarbeitung hat das Capitel von den Kegelschnitten erfahren. Die stereometrische Bedeutung

der Directrix veranlasste mich nämlich, die allgemeinen Eigenschaften aller Kegelschnitte voranzustellen (§. 29) und erst nachher die Parabel, Ellipse und Hyperbel einzeln abzuhandeln, wodurch die ganze Lehre an Einfachheit und Uebersichtlichkeit wesentlich gewinnt. Bei der Hyperbel habe ich die Eigenschaften der Asymptoten weiter als früher entwickelt und daran die Quadratur der Hyperbel geknüpft.

Dresden, im April 1862.

Schlömilch.

Inhalt.

Seite

Cap. V. Die Gestalten der runden Flächen und Körper.

Cap. VI. Die Kegelschnitte.

Cap. VII. Die Ausmessung der runden Körper.

Cap. VIII. Die Berechnung des körperlichen Dreiecks.



Geometrie des Raumes.

ERSTES BUCH.

Die unvollständig begränzten ebenen Raumgebilde.

Cap. I.

Die Geraden und Ebenen im Raume.

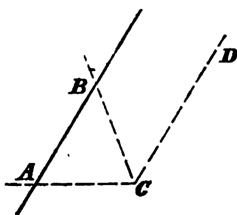
---

§. 1.

Die verschiedenen Bestimmungen der Ebene.

Wenn eine ihrer Lage nach veränderliche Gerade an einer als fest gedachten Geraden so hingleitet, dass sie stets durch einen und denselben ausserhalb der festen Geraden liegenden Punkt geht, so beschreibt die veränderliche Gerade eine Ebene und es gilt von dieser Fläche der Grundsatz, dass eine Gerade, welche zwei Punkte mit ihr gemein hat, ganz in derselben enthalten ist. Die Consequenzen jener Entstehungsweise und dieser Grundeigenschaft der Ebene sind es, mit denen wir uns zunächst beschäftigen müssen.

Fig. 1.



Da durch zwei Punkte im Raume nur eine einzige gerade Linie geht, so kann man sich die feste Gerade durch zwei gegebene Punkte *A* und *B* bestimmt denken; die Ausführung der vorhin erwähnten Bewegung, d. h. die Erzeugung der Ebene, erfordert dann

nur noch die Kenntniss eines ausserhalb *AB* liegenden festen Punktes, etwa *C*, zusammen also die Angabe dreier Punkte *A*, *B*, *C*.

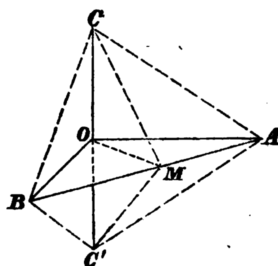
Letztere können wiederum durch zwei sich schneidende Gerade vertreten werden; ist nämlich *A* der Durchschnitt der beiden Geraden *AB* und *AC*, so kann man die erste als feste und die zweite als bewegliche Gerade in irgend einer ihrer Lagen ansehen, auf ihr den festen Punkt *C* willkührlich wählen und dann die Ebene wie früher entstehen lassen.

Statt einer beliebigen Lage der beweglichen Geraden könnte man auch die bestimmte Lage wählen, bei welcher die bewegliche Gerade einerlei Richtung mit der festen Geraden hat, ihr also parallel ist; man betrachtet dann die eine der beiden Parallelen *AB* und *CD* als die feste Gerade und wählt auf der andern willkührlich den festen Punkt.

Nach diesen Erörterungen darf man folgenden Satz aussprechen: Eine Ebene ist bestimmt: 1) durch eine Gerade und einen ausserhalb letzterer befindlichen Punkt, 2) durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte, 3) durch zwei sich schneidende Gerade, 4) durch zwei parallele Gerade.

Hieran knüpft sich unmittelbar die Folgerung, dass zwei Ebenen zu einer einzigen Ebene zusammenfallen, wenn sie entweder durch dieselbe Gerade und den nämlichen ausserhalb letzterer befindlichen Punkt hindurchgehen, oder wenn sie dieselben drei nicht in gerader Linie liegenden Punkte in sich enthalten, oder zwei sich schneidende Gerade gemeinschaftlich besitzen, oder endlich die nämlichen zwei Parallelen enthalten.

Fig. 2.



Eine wesentlich andere Bestimmung der Ebene entspringt aus der Betrachtung der Fläche, welche entsteht, wenn man sich von einem rechten Winkel den einen Schenkel als fest und den anderen (sammt der ganzen Winkelebene) um jenen herumgedreht denkt. Sei nämlich *AOC* die ursprüngliche, *BOC* irgend eine

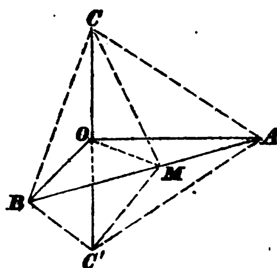
spätere Lage des rechten Winkels, AB eine Gerade, welche einen beliebigen Punkt von AO mit einem beliebigen Punkte von BO verbindet, endlich $OC = OC'$ eine auf dem festen Schenkel und auf seiner Verlängerung abgeschnittene Strecke von willkührlicher Grösse, so erkennt man zunächst, dass die Dreiecke AOC und AOC' wegen der Uebereinstimmung in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel congruent sind und folglich $AC = AC'$ ist. Aus denselben Gründen hat man $\triangle BOC \cong \triangle BOC'$ und $BC = BC'$. Die Dreiecke ABC und ABC' stimmen demnach in allen Seiten überein, sind daher congruent und besitzen dieselben Winkel, z. B. $\angle ABC = ABC'$. Verbindet man einen beliebigen Punkt M der Geraden AB mit C und C', so entstehen zwei Dreiecke BMC und BMC', welche in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (nämlich $BM = BM$, $BC = BC'$, $\angle MBC = \angle MBC'$) mithin congruent sind und gleiche dritte Seiten MC und MC' besitzen. Mittelst der Hülfslinie MO erhält man endlich zwei Dreiecke MOC und MOC', deren entsprechende Seiten gleich sind ($OC = OC'$, $MO = MO$, $MC = MC'$) die also congruent sein und gleiche Winkel enthalten müssen. Man hat daher $\angle MOC = \angle MOC'$, d. i., weil beide Winkel einen gestreckten ausmachen, $\angle MOC = 90^0$. Demnach lässt sich die Gerade OM als eine Zwischenlage des beweglichen von OA nach OB gedrehten Winkelschenkels ansehen und man erkennt zugleich, dass der bewegliche Schenkel an der Geraden AB hingleitet, während er stets durch den Punkt O geht; diess heisst aber: Wenn ein rechter Winkel um einen seiner Schenkel, als fest gedacht, herumgedreht wird, so beschreibt der bewegliche Schenkel eine Ebene.*)

Man kann diesen Satz auch folgendermassen aussprechen: Wenn eine Gerade auf zwei sich schneidenden Geraden zugleich senkrecht steht, so ist sie auch senkrecht auf jeder anderen Geraden,

*) Der Vergleich zwischen dieser und der früher zuletzt erwähnten Entstehungsweise zeigt, dass eine Ebene auf doppelte Weise mechanisch hergestellt werden kann, nämlich ebensowohl auf der Hobelbank als auf der Drehbank.

welche in der Ebene jener zwei sich schneidenden Geraden durch deren Durchschnittspunkt gelegt wird. Man sagt dann, die Gerade stehe senkrecht auf der ganzen Ebene und nennt sie nicht selten eine Normale derselben.

Fig. 2.



Ist nun diese Normale CC' und ein Punkt A gegeben, so kann man sich durch CC' und A eine Hülfsebene gelegt denken, in dieser eine Senkrechte von A auf CC' herablassen und auf diese Weise den rechten Winkel COA construiren, durch dessen Umdrehung die Ebene AOB erzeugt wird. Dabei ist es gleichgültig, ob der Punkt A ausserhalb oder in CC' liegt, nur würde man im letzteren Falle die Hülfsebene willkührlich durch CC' legen und von dem in CC' gegebenen Punkte aus eine Senkrechte auf CC' in der Hülfsebene aufsteigen lassen. Man hat daher den Satz: Eine Ebene ist durch einen Punkt und eine Normale bestimmt, und es folgt daraus, dass zwei Ebenen zusammenfallen, wenn sie eine Normale und einen Punkt gemein haben.

§. 2.

Die gegenseitigen Lagen räumlicher Gebilde.

I. Während zwei Gerade in einer Ebene sich entweder schneiden oder einander parallel laufen, ist im Raume noch der dritte Fall denkbar, dass die Geraden an einander vorbeigehen, ohne sich zu schneiden und ohne parallel zu sein. Derartige Linien nennt man kreuzende oder nicht in einer Ebene liegende Gerade, da namentlich durch die letztere Bezeichnung die beiden früheren Fälle ausgeschlossen sind. Um die Verschiedenheit ihrer Richtung auffassen zu können, hat man auch hier den Winkel zwischen beiden Geraden in Betracht gezogen; man versteht darunter den Winkel, welchen zwei Geraden bilden, die durch irgend einen Punkt des Raumes parallel zu den kreu-

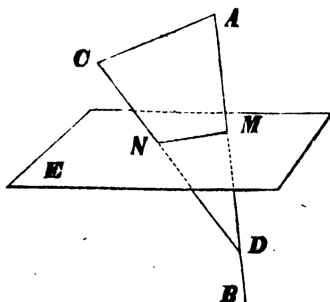
zenden Geraden gezogen sind. Demnach kann man z. B. sehr wohl sagen, zwei Gerade kreuzen sich rechtwinklig.

II. Um die Lage einer Geraden gegen eine Ebene untersuchen zu können, bemerken wir zunächst, dass jede Ebene den unendlichen Raum in zwei getrennte gleichfalls unendliche Räume theilt, dergestalt, dass man aus dem einen dieser Räume nicht in den anderen gelangen kann, ohne die trennende Ebene zu durchdringen. Zufolge dieses Grundsatzes muss eine Gerade eine Ebene durchschneiden, sobald sich in der Geraden zwei Punkte angeben lassen, die auf entgegengesetzten Seiten der Ebene liegen. Dieser Durchschnitt kann nur ein Punkt sein; denn bestünde er aus mehreren Punkten, so hätte die Gerade mindestens zwei Punkte mit der Ebene gemein und fiele daher ihrer ganzen Ausdehnung nach mit der Ebene zusammen, was gegen die Voraussetzung zweier auf verschiedenen Seiten der Ebene befindlichen Punkte der Geraden streitet. Man hat daher den Satz: Eine Gerade kann eine Ebene in nicht mehr als einem Punkte schneiden.

Ausserdem bleibt es aber denkbar, dass eine Gerade mit einer Ebene keinen Punkt gemein habe, was offenbar dann geschehen würde, wenn die Gerade ihrer ganzen Ausdehnung nach in dem einen jener beiden unendlichen Räume läge, ohne in den anderen überzugehen. Die Bedingungen, unter welchen dieser Fall eintritt, werden wir im nächsten Paragraphen untersuchen, vor der Hand genügt es, auf die Möglichkeit dieser Erscheinung hingewiesen zu haben.

III. Um endlich die Ebene mit der Ebene in Verbindung zu bringen, denken wir uns eine Gerade AB, welche die Ebene E in M schneidet, so dass etwa MA der oberhalb und MB der unterhalb E befindliche Theil von AB ist, und legen durch AB eine beliebige Ebene E', welche wir uns mittelst der festen Geraden AB und eines willkührlich gewählten Punktes C construirt den-

Fig. 3.



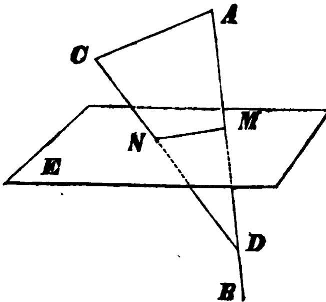


Fig. 3.

ken. Da *M* in der Geraden *AB*, und diese in der Ebene *E* liegt, so haben *E* und *E'* zunächst den Punkt *M* gemein, und um zu entscheiden, ob noch mehrere gemeinschaftliche Punkte vorhanden sind oder nicht, ziehen wir von *C* aus Gerade nach allen den Punkten von *AB*, welche auf der entgegengesetzten Seite der Ebene liegen. Alle diese Geraden wie z. B. *CD* gehören zur Ebene *E'* und schneiden *E*, woraus hervorgeht, dass der Durchschnitt zweier Ebenen nicht ein einzelner Punkt sein kann, sondern aus einer stetigen Folge von Punkten, d. h. aus einer Linie *MN* bestehen muss. Wäre diese gekrümmt, so würden sich auf ihr mindestens drei nicht in einer Geraden liegende Punkte angeben lassen, diese wären beiden Ebenen gemeinschaftlich und folglich müssten letztere zusammenfallen, was aber der Voraussetzung widerspricht, dass es in *E'* Punkte (*A* und *B*) giebt, die auf entgegengesetzten Seiten von *E* liegen. Man hat daher den Satz: Haben zwei Ebenen einen Punkt gemein, so besitzen sie noch unendlich viel andere gemeinschaftliche Punkte und zwar liegen diese in einer Geraden, der Durchschnittslinie beider Ebenen.*)

Ausserdem bleibt es aber denkbar, dass zwei Ebenen *E* und *E'* keinen Punkt also überhaupt nichts mit einander gemein haben, was offenbar dann geschehen würde, wenn *E'* ganz in dem einen der beiden Räume enthalten wäre, in welche *E* den unendlichen Raum theilt. Die Bedingungen, unter denen dieser Fall eintritt, werden wir in §. 4 erörtern und begnügen uns für jetzt mit der Hinweisung auf die Möglichkeit desselben.

---

*) Hierdurch ist die Möglichkeit ausgeschlossen, dass eine Ebene von einer anderen in einem Punkte berührt wird, wie dies bei gekrümmten Flächen vorkommen kann.

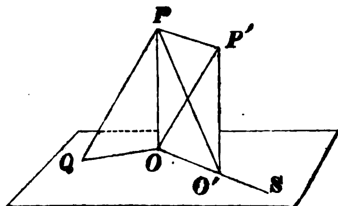
§. 3.

Die Ebene und die Gerade.

I. Gemäss der im vorigen Paragraphen unter No. II. angegebenen Unterscheidung setzen wir zunächst voraus, dass die Gerade die Ebene durchschneide, und betrachten vorerst die senkrechte Lage der Geraden gegen die Ebene, weil unmittelbar ersichtlich ist, dass sich dieser specielle Fall der zweiten in §. 1 erwähnten Entstehungsweise der Ebene am ungezwungensten anschliesst.

a) Senkrechte Lage. Aus der Bestimmung der Ebene durch eine Normale und einen Punkt geht augenblicklich die Möglichkeit hervor, in einem gegebenen Punkte O der Ebene E eine Senkrechte OP auf der Ebene zu errichten; gesetzt nun, es wäre noch eine zweite Normale OP' denkbar, so lege man durch OP und OP' eine Ebene, deren Durchschnitt mit E die Gerade OS sein möge; man hätte jetzt zwei sich schneidende Gerade OP, OP', welche in der Ebene $P'POS$ auf der nämlichen Geraden OS senkrecht stünden, was aber unmöglich ist. — Ferner erhellt aus der Entstehung der Ebene die Möglichkeit, von einem ausserhalb derselben gegebenen Punkte P eine Normale PO auf sie herabzulassen; wäre noch eine zweite solche Senkrechte PO' denkbar, so würde ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln POO' und $PO'O$ entstehen, was wiederum unmöglich ist. Beide Ergebnisse lassen sich zu dem Satze zusammenziehen: Durch einen gegebenen Punkt ist nur eine Normale zu einer Ebene möglich.

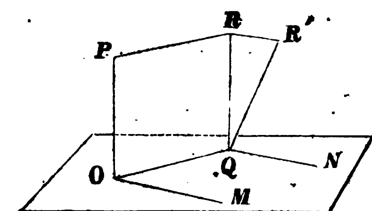
Fig. 4.



Verbindet man irgend einen anderen Punkt Q der Ebene mit O und P, so entsteht ein bei O rechtwinkliches Dreieck, in welchem die Hypotenuse PQ jederzeit grösser als die Kathete PO ist; demnach stellt das Perpendikel PO die kürzeste Gerade dar, welche von P nach der Ebene gezogen werden kann und heisst deshalb der Abstand oder die Entfernung des Punktes von der Ebene.

Irgend eine zur Normale *OP* parallele Gerade *QR* liegt mit *OP* in einer Ebene (§. 1.), welche die Ebene *E* in einer Geraden *OQ* schneidet. Die Winkel *POQ* und *RQO* sind dann gleichzeitig rechte Winkel. Zieht man in der Ebene *E* eine beliebige durch *O* gehende Gerade *OM* und durch *Q* die Gerade *QN*//*OM* so hat *QN* dieselbe Richtung wie *OM*; ebenso hat *QR* die nämliche Richtung wie *OP*, folglich müssen auch die entsprechenden Richtungsunterschiede d. h. die Winkel *MOP* und *NQR* gleich sein; (in der That kann man durch Verschiebung gleichzeitig *QN* mit *OM*, *QR* mit *OP* und daher ∠ *NQR* mit ∠ *MOP* zur Deckung bringen). Von den genannten Winkeln ist der erste ein rechter, mithin ist es auch *NQR*; ausserdem war nach dem Vorigen *OQR* ein rechter Winkel, also steht *QR* auf den Geraden *QO* und *QN* gleichzeitig senkrecht und ist folglich normal zur Ebene *MOQN*, d. h.: Steht von zwei oder mehreren im Raume parallelen Geraden die eine senkrecht auf einer bestimmten Ebene, so sind auch alle übrigen normal zu derselben Ebene.

Fig. 5.

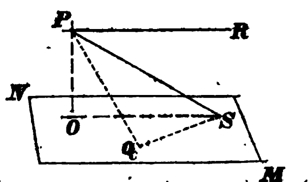


Zum Zwecke der Umkehrung dieses Satzes denken wir uns auf derselben Ebene in zwei verschiedenen Punkten *O* und *Q* die Normalen *OP* und *QR* errichtet; wäre nun *QR* nicht parallel zu *OP*, so müsste eine andere durch *Q* gehende Gerade *QR'* die Parallele zu *OP* darstellen. Die Geraden *QR* und *QR'* bestimmen zusammen eine Ebene, welche die gegebene Ebene in einer Geraden *QN* schneidet; nach der Voraussetzung ist dann ∠ *RQN* ein rechter Winkel, und wegen *QR'*//*OP* ist nach dem vorigen Satze ∠ *R'QN* gleichfalls ein rechter Winkel. Diese Folgerungen widersprechen einander, weil zwei sich schneidende Gerade nicht gleichzeitig senkrecht auf einer in derselben Ebene liegenden Geraden sein können; es muss daher *QR'* mit *QR* zusammenfallen, d. h.: Alle Normalen auf einer Ebene laufen einander parallel.

b) Schiefe Lage. Um die gegenseitige Lage einer

Ebene MN und einer im Punkte S sie durchschneidenden Geraden PS zu bestimmen, lassen wir von einem Punkte P der Geraden eine Senkrechte PO auf die Ebene herab und denken uns durch PS und PO eine Ebene gelegt, welche die Ebene MN in einer Geraden schneiden wird. Diese Durchschnittslinie OS ist nichts Anderes als die Projection der ursprünglichen Geraden auf die gegebene Ebene und zwar giebt es zufolge der vorhin unter a) auseinandergesetzten Lehren nur eine solche Projection; diese bildet, da sie PS nothwendig schneiden muss, mit PS einen bestimmten Winkel PSO, welcher die Neigung der Geraden gegen die Ebene unzweideutig angiebt. Wir definiren ihn daher wie folgt: „Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ist der Winkel zwischen der Geraden und ihrer Projection auf die Ebene.“ Zieht man durch S in der Ebene irgend eine Gerade $SQ = SO$ und nachher PQ, so entstehen zwei Dreiecke, OSP und QSP, in denen $OS = QS$, $PS = PS$ dagegen $PO < PQ$ ist; hieraus ergiebt sich $\angle PSO < \angle PSQ$ und es ist folglich der Neigungswinkel der kleinste Winkel, unter welchem die Gerade PS irgend andere in der Ebene MN liegende Gerade schneiden kann.*)

Fig. 6.



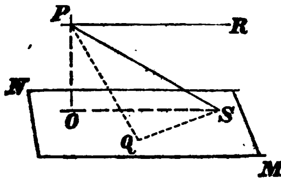
Wenn endlich der Fall vorkommen sollte, dass die Ebene MN nicht selbst, sondern nur die Richtung einer Normalen von ihr gegeben wäre, so kennt man wenigstens die Lage von PO (oder einer Parallelen dazu), mithin den Winkel OPS und findet daraus $\angle OSP = 90^{\circ} - \angle OPS$; der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ist also das Complement des Winkels zwischen der Geraden und einer Normalen auf der Ebene.

II. Die letzte Bemerkung bahnt den Uebergang zu demjenigen Falle, wo die Gerade die Ebene nicht schneidet; dreht man nämlich die Gerade PS um P in der Ebene OPS

*) Sowie OS die Projection von PS ist, so lässt sich auch der Winkel OSQ als die Projektion des Winkels PSQ betrachten. Man findet leicht, dass beide Winkel gleichzeitig spitze, rechte oder stumpfe sind.

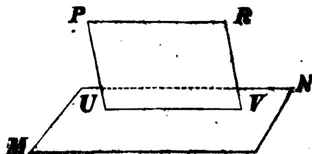
herum, bis sie in die zu *OS* parallele Lage *OR* kommt, so geht $\angle OPS$ in 90° und der Neigungswinkel *OSP* in Null über. Die Gerade *PR* nennt man jetzt **parallel der Ebene** *MN* und es ist diess nur ein abgekürzter Ausdruck dafür, dass die Gerade ihrer Projection auf die Ebene parallel läuft. Eine solche Gerade schneidet selbstverständlich ihre Projection nicht, dass sie aber auch der Ebene nirgends begegnen kann, ist leicht einzusehen; wäre nämlich *T* der Durchschnitt von *PR* und der Ebene *MN*, so würde *T* einerseits der Geraden *PR*, und da diese in der Ebene *SOPR* liegt, auch dieser Ebene angehören müssen, andererseits müsste *T* in die Ebene *MN* fallen und könnte folglich nur in dem Durchschnitte beider Ebenen, d. h. in der Linie *OS* zu suchen sein, was dem vorausgesetzten Parallelismus von *PQ* und *OS* widerspricht. — Wenn umgekehrt *PR* die Ebene nicht schneidet, so fragt es sich, ob dann auch *OS*//*PR* ist oder nicht; wäre das letztere der Fall, so würde *PR* die Gerade *OS* und mithin auch die Ebene *MN* schneiden, was gegen die Voraussetzung streitet, es kann also nur der erste Fall stattfinden. Man hat daher folgenden Doppelsatz: **Wenn eine Gerade einer Ebene parallel ist, so schneidet sie dieselbe nicht, und umgekehrt, wenn sie die Ebene nicht schneidet, so läuft sie ihr parallel.**

Fig. 6.



Betrachten wir noch die Voraussetzung, dass eine Gerade *PR* irgend einer in der Ebene *MN* gezogenen Geraden *UV* parallel gehe, so sind wieder zwei Fälle möglich; die Gerade schneidet entweder die Ebene oder nicht. Fände das Erste statt, so würde der Durchschnitt *W* in *PR*, mithin auch in der Ebene *VUPR*, und zugleich in der Ebene *MN*, also in der nöthigenfalls verlängerten Geraden *UV* liegen müssen, weil letztere die gemeinsame Durchschnittslinie der genannten Ebenen darstellt; wegen *PR*//*UV* kann aber *W*

Fig. 7.



nicht in UV liegen und daher muss der zweite Fall statt finden; d. h.: **Wenn eine Gerade irgend einer in einer Ebene liegenden Geraden parallel geht, so ist sie auch der Ebene parallel.**

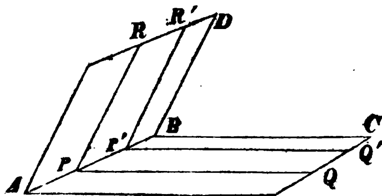
Endlich ist leicht zu sehen, dass alle Senkrechten, welche man von einer zu einer Ebene parallelen Geraden auf die Ebene herablassen kann, einander parallel, gleich und in derselben Ebene enthalten sind; die gemeinsame Länge aller dieser Senkrechten nennt man die **Entfernung** der Geraden von der Ebene.

§. 4.

Zwei Ebenen.

I. Um von der gegenseitigen Lage zweier sich in der Geraden AB schneidenden Ebenen eine Vorstellung zu erhalten, errichten wir in irgend einem Punkte P der Durchschnittslinie zwei auf derselben senkrechte Gerade, von denen die eine in der einen Ebene liegt und die andere in der anderen; diese Senkrechten PQ und PR schliessen einen Winkel QPR ein, der zu dem obigen Zwecke brauchbar sein würde, wenn sich nachweisen liesse, dass er derselbe bleibt, wo man auch den Punkt P in der Geraden AB wählen mag, und dass er erst dann eine Aenderung erleidet, wenn die Ebenen eine Aenderung ihrer gegenseitigen Lage erfahren. Um das Erste zu entscheiden denken wir uns in einem anderen Punkte P' der Geraden AB dieselbe Construction vorgenommen; die Gerade $P'Q'$ liegt

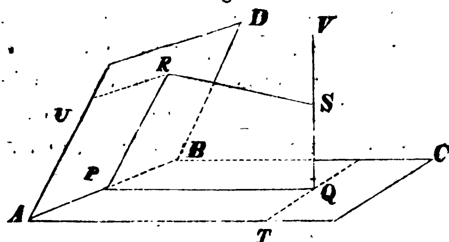
Fig. 8.



dann mit PQ in einer Ebene senkrecht zu AB, ist mithin parallel zu PQ, aus demselben Grunde ist $P'R' \parallel PR$, folglich der Richtungsunterschied zwischen $P'Q'$ und $P'R'$ gleich dem Richtungsunterschiede zwischen PQ und PR oder $\angle Q'P'R'$

$= \angle QPR$. Denken wir uns zweitens die verschiedene Lage der beiden betrachteten Ebenen *ABC* und *ABD* dadurch entstanden, dass eine mit *ABC* zusammenfallende Ebene so lange um die Gerade *AB* gedreht wurde, bis sie mit der Ebene *ACD* zusammenfiel, so ist die hierzu nöthige Drehung einerlei mit der Drehung, welche erfordert wird, um die Gerade *PQ* in die Lage *PR* überzuführen, und es würde daher einer kleineren oder grösseren Drehung der Ebenen ein kleinerer oder grösserer Winkel *QPR* entsprechen. Aus beiden Bemerkungen zusammen geht hervor, dass der Winkel *QPR* die gegenseitige Lage der beiden Ebenen bestimmt, er heisst deshalb der Neigungswinkel derselben (bei manchen Schriftstellern Keilwinkel) in Zeichen: $\angle C(AB)D$.

Fig. 9.



Die Entstehung der Geraden *PQ*, *PR* und des Winkels *QPR* kann man sich noch etwas anders vorstellen; legt man nämlich durch *P* eine Ebene normal zu *AB*, so schneidet diese Hülfsebene die Ebene *ABC* in einer zu *AB* senkrechten durch *P* gehenden Geraden, welche keine andere als die Gerade *PQ* sein kann; ebenso lässt sich *PR* als Durchschnitt der Hülfsebene mit der Ebene *ABD* betrachten. Ferner können wir in der Hülfsebene *QPR* auf *PQ* und *PR* Senkrechte errichten, die sich in *S* schneiden, und dann ist $\angle QPR = 180^0 - \angle QSR$. Legt man durch *Q* eine Parallele *QT* zu *AB*, so ist *QS* auf dieser Parallelen senkrecht, weil eine durch *P* parallel zu *QS* gezogene Gerade auf *AB* senkrecht stehen würde, ausserdem ist *QS* senkrecht zu *PQ*, mithin *QS* eine Normale der Ebene *ABC*; ebenso bildet *RS* eine Normale zur Ebene *ABD* und man kann daher sagen: Der spitze Neigungswinkel zweier Ebenen ist gleich dem spitzen Winkel zwischen ihren Normalen.

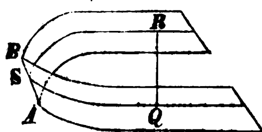
Eine dritte Auffassungsweise besteht darin, dass man

sich von einem willkührlich gewählten Punkte S die Normalen SQ und SR auf die Ebenen ABC, ABD herabgelassen und durch beide Geraden eine Ebene gelegt denkt, welche AB in P, ABC in PQ und ABD in PR schneidet; zieht man wiederum $QT // AB // RU$, so ist $\angle TQP = 90^0 = \angle APQ$ und ebenso $\angle URP = 90^0 = \angle APR$, die Gerade AP steht also auf PQ und PR gleichzeitig, mithin auch auf der Ebene $QPRS$ senkrecht. Diess giebt folgenden Satz: Fällt man von einem willkührlich gewählten Punkte Senkrechte auf zwei vorhandene Ebenen und legt durch diese Perpendikel eine neue Ebene, so ist letztere normal zur Durchschnittslinie der ersten zwei Ebenen.

Endlich kann man noch bemerken, dass die Winkel SQT und SRU die Neigungswinkel der Ebene $PQSR$ gegen die Ebenen ABC und ABD darstellen, und dass man wegen $\angle SQT = \angle SRU = 90^0$ den vorigen Satz auch folgendermassen ausdrücken kann: Steht eine Ebene auf zwei anderen Ebenen senkrecht, so ist sie auch normal zur Durchschnittslinie der letzteren Ebenen.

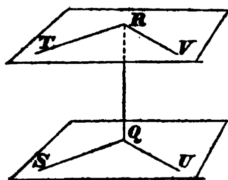
II. Wir betrachten nun den Fall, wo beide Ebenen sich nicht schneiden. Wenn nämlich SQ mit SR zusammenfällt, also beide Ebenen eine gemeinschaftliche Normale besitzen, so wird der spitze Neigungswinkel der Ebenen $= 0$ und dann sagt man, die eine Ebene sei der anderen parallel. Ob sich zwei solche Parallelebenen schneiden oder nicht, entscheidet folgende Betrachtung. Hätten beide Ebenen auch nur einen Punkt gemein, so würden sie nach §. 2, III. eine Gerade AB gemein haben, in dieser liesse sich ein Punkt S willkührlich wählen und durch ihn und durch die beiden Punkte Q, R, in welchen die gemeinschaftliche Normale die Ebenen durchdringt, eine Hülfsebene legen; es entstünde jetzt ein Dreieck QRS mit zwei rechten Winkeln (bei Q und R), was unmöglich ist; d. h.: Zwei Parallelebenen schneiden sich nicht.

Fig 10.



Behufs der Umkehrung dieses Satzes denken wir uns zwei sich nicht schneidende Ebenen, errichten auf der ersten in einem willkührlichen Punkte Q eine Senkrechte, deren Durchschnitt mit der zweiten Ebene R heissen möge,

Fig. 11.



und legen durch QR zwei beliebige Ebenen, welche die ursprünglichen Ebenen in QS und QU, RT und RV schneiden. Nun können erstens die in einer Ebene liegenden Geraden QS und RT nicht zusammentreffen, weil sonst die ursprünglichen zwei Ebenen selbst einen Punkt zusammen haben müssten, es ist also $RT // QS$; aus denselben Gründen hat man $RV // QU$, mithin $\angle TRQ = \angle SQR = 90^0$, ebenso $\angle VRQ = \angle UQR = 90^0$ und folglich RQ senkrecht auf der zweiten Ebene; d. h.: **Zwei sich nicht schneidende Ebenen besitzen eine gemeinschaftliche Normale und sind daher parallel.**

Etwas allgemeiner werden diese Sätze, wenn man zwei Ebenen betrachtet, deren Normalen nicht zusammenfallen, sondern nur parallel laufen; mittelst der Lehren des §. 3, I. a) findet man leicht das Theorem: **Zwei mit parallelen Normalen versehene Ebenen besitzen auch gemeinsame Normalen und sind deshalb parallel.***)

Auch ohne Zuziehung der Normalen lässt sich die parallele Lage zweier Ebenen E und E' beurtheilen, falls in der Ebene E' zwei sich schneidende Gerade LM und LN gegeben sind, von denen jede der Ebenen E parallel ist.

---

*) Nennt man Ebenen von gleicher **Stellung** solche, deren Normalen gleiche Richtung haben (parallel sind), so werden die Fundamentalsätze über parallele Ebenen den früheren Sätzen über parallele Gerade völlig analog; man hat nämlich erstens die entsprechende Definition: „Zwei Ebenen von gleicher Stellung heissen parallel“ und ausserdem die Sätze:

1) Ebenen von gleicher Stellung treffen nicht zusammen,

2) Ebenen von verschiedener Stellung treffen immer zusammen,

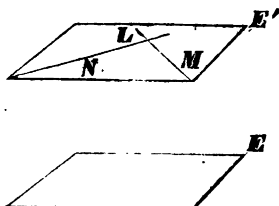
und umgekehrt:

3) Zwei nicht zusammentreffende Ebenen haben gleiche Stellung,

4) Zwei zusammentreffende Ebenen haben verschiedene Stellung.

Gesetzt nämlich, die beiden Ebenen schnitten sich in der Geraden *GH*, so könte diese wohl einer der Geraden *LM* und *LN* nicht aber beiden zugleich parallel sein, und daher muss wenigstens eine der Geraden *LM* und *LN* die Gerade *GH* schneiden, mithin auch der Ebene *E* begegnen weil *GH* in *E* liegt. Diess widerspricht der Voraussetzung, dass die Geraden *LM* und *LN* der Ebene *E* parallel sind, mithin können *E'* und *E* sich nicht schneiden; d. h.: Zwei Ebenen sind parallel, wenn eine derselben zwei sich schneidende Gerade enthält, welche der anderen parallel sind.

Fig. 12.



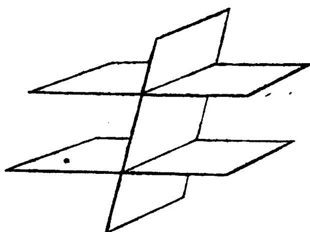
Endlich ist leicht zu sehen, dass alle Senkrechten, welche von beliebigen Punkten der einen Parallelebene auf die andere herabgelassen werden, nicht nur parallel, sondern auch gleich lang sind; diese unveränderliche Linie heisst die Entfernung der beiden parallelen Ebenen.

§. 5.

Drei Ebenen.

Denken wir uns von drei Ebenen zunächst zwei aufgestellt, so sind diese entweder parallel oder sie schneiden sich in einer Geraden; im ersten Falle kann die dritte Ebene nur zwei verschiedene Lagen haben, entweder ist sie nämlich den beiden Ebenen parallel oder nicht. Die erste Lage bietet keinen Stoff zu weiteren Untersuchungen, bei der anderen Lage schneidet die dritte Ebene jede der beiden Parallelebenen, und zwar sind diese Durchschnitte parallele Gerade, weil sie in einer (der dritten) Ebene liegen und einander ebensowenig als die beiden Parallelebenen begegnen können. In dem zweiten Hauptfalle, wenn die ursprünglichen beiden Ebenen nicht parallel sind, existirt eine Durchschnittslinie, und

Fig. 13.



um die Lage derselben mit der Lage der dritten Ebene vergleichen zu können, unterscheiden wir die beiden Unterfälle, ob diese Durchschnittslinie in der dritten Ebene liegt oder nicht. Findet das Erste statt, so haben die drei Ebenen eine und dieselbe Gerade, sonst aber nichts weiter gemein (Fig. 14); im zweiten Falle liegt der Durchschnitt der ersten und zweiten Ebene entweder parallel zur dritten Ebene oder nicht. Nennen wir E_1, E_2, E_3 die drei Ebenen, g_1, g_2, g_3 die Durchschnitte von E_2 mit E_3, E_3 mit E_1, E_1 mit E_2, so ist bei der ersten Lage $g_3 // E_3$, folglich g_2 eine Gerade, die mit g_3 in einer Ebene (E_1) liegt und g_3 nicht schneidet, weil sonst, gegen die Voraussetzung, g_3 und E_3 einen Punkt gemein haben müssten; daraus ergiebt sich, dass $g_2 // g_3$ ist, eben so $g_1 // g_3$, und folglich sind die drei Durchschnitte der Ebenen parallel untereinander (Fig. 15). Bei der zweiten Lage ist g_3 nicht parallel E_3 und folglich existirt ein Durchschnittspunkt O von E_3 mit g_3; dieser Punkt gehört erstens zur Ebene E_3, ausserdem zur Geraden g_3, also, weil diese den Ebenen E_1 und E_2 gemeinsam ist, auch gleichzeitig zu den Ebenen E_1 und E_2; die drei Ebenen haben dann einen Punkt O gemein, in welchem die drei Durchschnittslinien g_1, g_2, g_3 zusammenlaufen (Fig. 16).

Fig. 14.

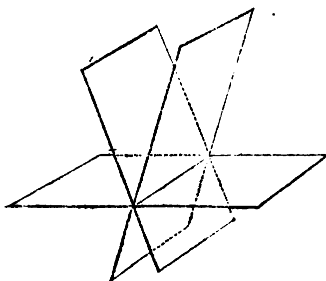


Fig. 15.

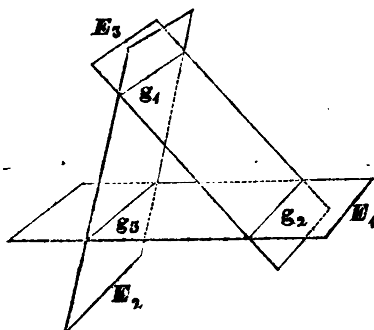
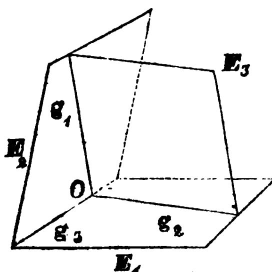


Fig. 16.



Von diesen fünf allein möglichen Fällen geben die vier ersten zu ganz ähnlichen Betrachtungen Veranlassung, wie sie in §. 3 des ersten Theiles durchgeführt sind, und es besteht der ganze Unterschied nur darin, dass man statt der dort vorkommenden Geraden und Winkel hier Ebenen und Neigungswinkel eintreten lässt; diese äusserst leichte Untersuchung können wir füglich dem Leser überlassen, dagegen bedarf der fünfte (allgemeine) Fall einer näheren Erörterung, welche in Cap. II. gegeben werden soll.

Constructionen zu Cap. I.

Ausser den Constructionen in einer Ebene, welche wir früher behandelt haben, setzen wir noch einige stereometrische Fundamentalconstructionen voraus, die man zwar nicht auf mechanische Weise (durch Lineal und Zirkel) wohl aber in Gedanken ausführen kann; es sind diess folgende Constructionen:

a) Durch drei Punkte, oder durch einen Punkt und eine Gerade, oder durch zwei sich schneidende oder durch zwei parallele Gerade eine Ebene zu legen;

b) den Durchschnitt einer Geraden und einer Ebene zu finden;

c) den Durchschnitt zweier Ebenen zu bestimmen.

Durch diese Hülfsmittel lassen sich folgende Aufgaben lösen.

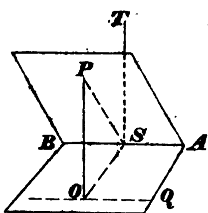
1) Durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene, nicht in einer Ebene liegende Gerade g_1 und g_2 schneidet. Denken wir uns durch P und g_1 eine Ebene gelegt, so schneidet diese im Allgemeinen die Gerade g_2 in einem Punkte Q; die Verbindungslinie PQ schneidet g_2, aber auch g_1, da sie mit letzterer Geraden in einer Ebene liegt, demnach ist PQ die gesuchte Gerade.

Man erkennt hieraus, dass die Aufgabe: „eine Gerade zu ziehen, welche drei gegebene Gerade g, g_1, g_2 schneidet“ unbestimmt ist, da P willkührlich auf g gewählt werden darf.

2) Durch einen Punkt P eine Gerade parallel zwei gegebenen Ebenen zu legen. Schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden g, so ist eine durch P parallel zu g gezogene Gerade beiden Ebenen parallel, weil g sowohl zu der einen als zur anderen Ebene gerechnet werden darf; schneiden sich die gegebenen Ebenen nicht, so bleibt die Aufgabe unbestimmt.

3) Durch einen ausserhalb einer Ebene liegenden Punkt P auf diese eine Senkrechte herabzulassen. In der gegebenen Ebene wählen wir eine Gerade AB willkührlich und legen durch diese und durch den gegebenen Punkt P eine Ebene; in letzterer lassen wir von P eine Senkrechte PS auf AB herab und errichten in deren Fusspunkte S ein Perpendikel SO auf AB; die beiden Senkrechten SP und SO bestimmen eine zu AB normale Ebene und in dieser fällen wir von P auf SO das Perpendikel PO. Dass nun PO die gesuchte Senkrechte darstellt, erkennt man leicht, sobald durch O eine Parallele OQ zu AB und durch S eine Parallele ST zu PO gezogen wird; weil nämlich ST in der Normalebene OSP liegt, ist ST senkrecht auf AS, folglich PO senkrecht auf OQ, ausserdem PO senkrecht zu OS, folglich PO normal zu der gegebenen Ebene QOS.

Fig. 17.



4) In einem Punkte S einer Ebene auf dieser eine Normale zu errichten. Fällt man von einem willkührlich ausserhalb der Ebene gewählten Punkte O eine Senkrechte PO auf die Ebene, legt ferner durch PO und S eine Hülfsebene und zieht in dieser $ST // OP$, so muss (nach §. 3. I. a) ST die gesuchte Senkrechte sein.

5) Durch einen Punkt P eine Ebene parallel einer gegebenen Ebene E zu legen. Der letzte Satz in §. 4. führt unmittelbar zu folgender Construction: Man zieht in E zwei beliebige sich schneidende Gerade a, b

durch P Parallelen a', b' zu denselben und legt endlich durch a', b' eine Ebene E'; diese ist die gesuchte Ebene.

6) Durch einen Punkt P eine Ebene parallel zwei nicht in einer Ebene befindlichen Geraden zu legen. Wie vorhin erhält man die gesuchte Ebene dadurch, dass man durch P Parallelen zu den vorhandenen zwei Geraden und durch diese Parallelen eine Ebene legt.

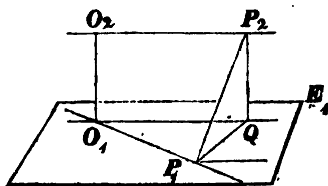
7) Eine Ebene zu construiren, welche eine gegebene Gerade g in sich enthält und auf einer gegebenen Ebene E senkrecht steht. Lässt man von irgend einem Punkte P in g eine Normale auf E herab und legt dann eine Ebene durch g und jene Normale, so hat man die gesuchte Ebene, da sich aus §. 4, I. leicht abnehmen lässt, dass die construirte Ebene gegen E um 90° geneigt ist.

8) Durch zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 eine Ebene senkrecht zu einer gegebenen Ebene E zu legen. Die beiden Punkte P_1 und P_2 bestimmen eind Gerade P_1P_2, welche in der gesuchten Ebene enthalten sein muss, und es kommt daher die Aufgabe auf die vorige zurück, wenn man P_1P_2 für g setzt.

9) Durch einen Punkt P eine Ebene parallel einer Geraden g und senkrecht zu einer gegebenen Ebene E zu legen. Zieht man durch P eine Parallele PM zu g und eine Senkrechte PO auf E, so ist die durch PM und PO gehende Ebene die gesuchte.

10) Die kürzeste Entfernung zweier nicht in einer Ebene befindlichen Geraden g_1 und g_2 zu construiren. Wählt man in der Geraden g_1 den Punkt P_1 willkührlich und zieht durch ihn eine Parallele zu g_2, so bestimmen g_1 und die Parallele zusammen eine Ebene E_1, welche g_1 enthält und parallel zu g_2 ist (No. 6).

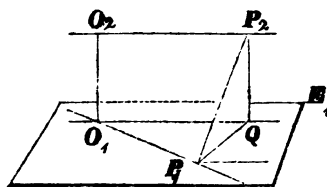
Fig. 18.



Legt man ferner durch g_2 eine Ebene senkrecht zu E_1, so schneiden sich beide Ebenen in einer Geraden, die nichts Anderes als die Projection von g_2 auf

E_1 ist. Diese Projection schneidet g_1 in einem Punkte O_1; eine in O_1 senkrecht auf E_1 errichtete Gerade schneidet g_2 in einem Punkte O_2 und so entsteht eine begrenzte Gerade $O_1 O_2$, die sowohl g_1 als g_2 rechtwinklig schneidet. Um sie mit der Entfernung zweier beliebigen Punkte P_1 in g_1 und P_2 in g_2 vergleichen zu können, ziehe man P_2Q senkrecht zu E_1 und verbinde Q mit P_1; der Winkel P_1QP_2 ist dann ein rechter, und in dem rechtwinkligen Dreiecke P_1QP_2 hat man $P_1P_2 > P_2Q$ und wegen $P_2Q = O_1O_2$ ist auch $P_1P_2 > O_1O_2$ mithin O_1O_2 die kürzeste Entfernung beider Geraden. Dieses Resultat lässt sich, wenn man will, in Form eines Lehrsatzes aussprechen, nämlich: „Der kleinste Abstand zweier Geraden wird durch eine auf beiden zugleich senkrechte Strecke dargestellt; letztere ist einerlei mit der Entfernung zweier Ebenen, von denen jede eine Gerade enthält und der anderen parallel liegt."

Fig. 18.



Cap. II.

Der körperliche Winkel.

---

§. 6.

Grundbegriffe.

Wenn drei von einem Punkte O ausgehende Gerade OA, OB, OC zu je zweien durch Ebenen verbunden werden, so entsteht ein eigenthümliches stereometrisches Gebild: der **körperliche Winkel** oder die **Ecke**; der Punkt O heisst der **Scheitel** oder die **Spitze** des körperlichen Winkels, die drei beliebig langen Geraden OA, OB, OC werden die **Kanten** desselben und die drei Ebenen AOB, BOC, COA seine **Seitenebenen** genannt. Ausserdem

enthält die Ecke noch sechs Stücke, nämlich einerseits die drei Winkel, welche in den Seitenebenen von den Kanten gebildet und als Kantenwinkel (von Manchen als Seitenwinkel oder Seiten) bezeichnet werden, andererseits die drei Neigungswinkel je zweier Seitenebenen; letztere an den Kanten liegende Winkel heissen die Flächenwinkel (oft auch kurzweg die Winkel) der Ecke. Zur Bezeichnung einer Ecke dienen vier Buchstaben, von welchen der Scheitelbuchstabe den ersten Platz erhält, im obigen Falle z. B. *OABC*.

Denkt man sich die Kanten und Seitenebenen einer Ecke ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung nach construirt, so entstehen um die ursprüngliche Ecke herum noch sieben neue Ecken, so dass der ganze unendliche Raum in acht unvollständig begränzte unendliche Räume zerfällt. Jene acht Ecken sind in der Figur:

OABC,
OA'BC, *OAB'C*, *OABC'*,
OAB'C', *OA'BC'*, *OA'B'C*,
OA'B'C'.

Fig. 19.

Dabei theilen sich die sieben hinzugekommenen Ecken in drei Gruppen, welche bereits in dem obigen Schema unterschieden worden sind, und deren Eigenthümlichkeiten sich folgendermassen ausdrücken lassen.

Man hat erstens drei Ecken, von denen jede mit der gegebenen Ecke zwei Kanten gemein hat, während die dritte Kante die Rückverlängerung der entsprechenden Kante der ursprünglichen Ecke ist; ferner stimmt jede der drei neuen Ecken mit der ursprünglichen Ecke in einem Kanten- und in einem Flächenwinkel überein, die übrigen Kanten- und Flächenwinkel sind einander paarweis supplementar.

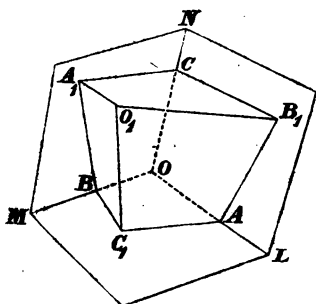
Es existiren ferner drei Ecken, deren jede mit der

ursprünglichen Ecke eine Kante gemein hat, während die übrigen Kanten die Rückverlängerungen von den entsprechenden Kanten der ursprünglichen Ecke sind; jede dieser neuen Ecken stimmt ferner in einem Kanten- und in einem Flächenwinkel mit der gegebenen Ecke überein; die übrigen Flächenwinkel sind einander paarweis supplementar.

Endlich ist noch eine Ecke vorhanden, welche keine Kante mit der anfänglichen Ecke gemein hat, deren Kanten vielmehr die Rückverlängerungen der Kanten der ursprünglichen Ecke sind. Diese Ecke (die sogenannte Gegenecke) enthält dieselben Kanten- und Flächenwinkel wie die gegebene Ecke, kann aber gleichwohl mit derselben nicht zur Deckung (Congruenz) gebracht werden. Denkt man sich nämlich die Ecke $OA'B'C'$ umgekehrt, so folgen die Kanten, verglichen mit denen von $OABC$, in entgegengesetztem Sinne aufeinander (links herum, wenn dort rechts herum) und es verhalten sich dann die Ecken zu einander wie rechte und linke Hand, woraus die Unmöglichkeit der Congruenz augenblicklich erhellt. Derartige Ecken, und überhaupt solche Raumgebilde, welche zwar aus denselben Bestandtheilen, aber in entgegengesetztem Sinne der Aufeinanderfolge zusammengesetzt sind, heissen symmetrisch gleich.

Eine neue und sehr wichtige Beziehung zwischen zwei Ecken findet sich auf folgendem Wege. Innerhalb des von einer Ecke $OLMN$ umschlossenen Raunes sei O_1 ein willkührlicher Punkt; von ihm aus lassen wir auf die drei Seitenebenen von $OLMN$ die Senkrechten O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1 herab und legen durch je zwei derselben Ebenen, welche die Kanten der ursprünglichen Ecke in A, B, C schneiden mögen. Um nun die Kanten- und Flächenwinkel der neu entstandenen Ecke $O_1A_1B_1C_1$ kennen zu lernen, bemerken wir zunächst, dass die Ebenen $AB_1O_1C_1$, $BC_1O_1A_1$, $CA_1O_1B_1$ auf den Kanten OA, OB, OC senkrecht

Fig. 20.



stehen (§. 4, I.), dass folglich die Winkel B_1AC_1, C_1BA_1, A_1CB_1 die Neigungswinkel je zweier der ursprünglichen Ebenen, d. h. die Flächenwinkel der Ecke $OABC$ sind; daraus ergiebt sich

$$\angle B_1O_1C_1 = 180^\circ - \angle B_1AC_1,\quad \angle C_1O_1A_1 = 180^\circ - \angle C_1BA_1,$$
$$\angle A_1O_1B_1 = 180^\circ - \angle A_1CB_1,$$

und es sind folglich die Kantenwinkel der neuen Ecke die Supplemente von den Flächenwinkeln der ursprünglichen Ecke. — Weil ferner A_1B und A_1C senkrecht zu A_1O_1 in den beiden Ebenen $A_1O_1C_1$ und $A_1O_1B_1$ liegen, so ist $\angle BA_1C$ der an der Kante O_1A_1 liegende Flächenwinkel der neuen Ecke; die anderen Flächenwinkel sind CB_1A und AC_1B; für diese Winkel hat man die Gleichungen

$$\angle BA_1C = 180^\circ - BOC,\quad \angle CB_1A = 180^\circ - COA,$$
$$\angle AC_1B = 180^\circ - AOB,$$

mithin sind die Flächenwinkel der neuen Ecke die Supplemente von Kantenwinkeln der ursprünglichen Ecke. Demnach lässt sich zu jeder Ecke eine andere construiren, deren Kantenwinkel die Supplemente von den Flächenwinkeln, und deren Flächenwinkel die Supplemente von den Kantenwinkeln der ersten Ecke darstellen; die neue Ecke heisst die Supplementarecke oder Polarecke der ursprünglichen.

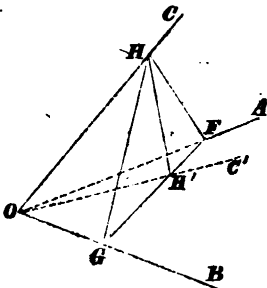
§. 7.

Beziehungen zwischen den Winkeln einer Ecke.

Denken wir uns den Winkel AOB als den grössten Kantenwinkel der Ecke $OABC$, und die Ebene des Winkels BOC so lange um BO gedreht, bis sie mit der Ebene AOB zusammenfällt, so muss der Schenkel OC nothwendig zwischen die Schenkel AO und BO zu liegen kommen; diese neue Lage sei OC', also $\angle BOC' = \angle BOC$. Nehmen wir ferner auf OC und OC' zwei gleiche Abschnitte $OH = OH'$ und legen durch H, H' und einen willkührlich auf BO gewählten Punkt G eine Ebene, welche die Seitenebenen der Ecke in den Geraden FG, GH, HF schneidet, so entstehen zunächst zwei (vermöge der Uebereinstimmung in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel) congruente Drei-

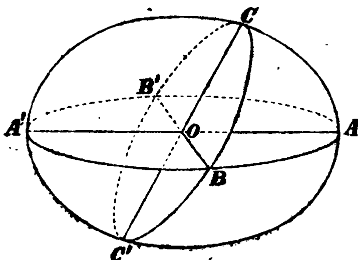
ecke GOH und GOH'; hieraus folgt $GH = GH'$ und mithin ist das Dreieck GHH' gleichschenklig. Da die Winkel an der Basis eines solchen Dreieckes nur spitze sein können, so muss der Nebenwinkel von $GH'H$, nämlich $\angle FH'H$, ein stumpfer Winkel sein und er ist dann von selbst der grösste Winkel in dem Dreiecke $FH'H$. Daraus folgt weiter, dass FH die grösste Seite des Dreieckes $FH'H$ ist, und wenn man jetzt FH und FH' als Bestandtheile der Dreiecke FOH und FOH' ansieht, so führen die Beziehungen $FO = FO$, $OH' = OH$, $FH' < FH$ zu der Folgerung $\angle FOH' < \angle FOH$; durch beiderseitige Addition der Gleichung $\angle GOH' = \angle GOH$ wird hieraus $\angle FOG < \angle FOH + \angle GOH$. Demnach beträgt selbst der grösste Kantenwinkel einer Ecke weniger als die Summe der beiden anderen Kantenwinkel, und es gilt daher überhaupt der Satz, dass irgend ein Kantenwinkel weniger ausmacht als die beiden übrigen Kantenwinkel zusammen. Nennen wir die Kantenwinkel AOB, BOC, COA der Reihe nach c, a, b, so ist hiernach $c < a + b$, $b < a + c$, $a < b + c$; gewöhnlich sagt man dafür: In jeder dreiseitigen Ecke beträgt die Summe zweier Seiten mehr als die dritte Seite.

Fig. 21.



Die Allgemeinheit dieses Satzes erlaubt zwei wichtige Anwendungen; man kann ihn nämlich ebensowohl auf eine der sechs Nebenecken von AOB als auf die Polarecke anwenden. Für die Ecke $OA'BC$ hat man

Fig. 22.



$$\angle BOC < \angle A'OB + \angle A'OC$$

d. i.

$$a < 180^\circ - c + 180^\circ - b$$

oder

$$a + b + c < 360^\circ;$$

d. h.: **In jeder dreiseitigen Ecke beträgt die Summe der Seiten weniger als vier rechte Winkel.**

Bezeichnen wir ferner mit a_1, b_1, c_1 die Kantenwinkel der Polarecke und mit A, B, C die Flächenwinkel der ursprünglichen Ecke, so ist $a_1 = 180^0 - A$, $b_1 = 180^0 - B$, $c_1 = 180^0 - C$, andererseits

$$a_1 < b_1 + c_1,\ b_1 < a_1 + c_1,\ c_1 < a_1 + b_1,$$

mithin durch Substitution der Werthe von a_1, b_1, c_1

$$B + C - A < 180^0,\ C + A - B < 180^0,\ A + B - C < 180^0,$$

d. h.: **In jeder dreiseitigen Ecke beträgt der Ueberschuss zweier Flächenwinkel über den dritten weniger als zwei rechte Winkel.**

Durch Addition der vorigen drei Ungleichungen folgt

$$A + B + C < 3 \,.\, 180^0,$$

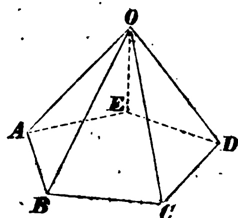
d. h.: **In jeder dreiseitigen Ecke ist die Winkelsumme kleiner als sechs rechte Winkel.**

Die beiden Sätze, welche hier für die Seiten- und Winkelsummen einer dreiseitigen Ecke gefunden wurden, lassen sich leicht auf Ecken mit beliebig vielen Seiten ausdehnen. Denken wir uns nämlich von einem Punkte O im Raume n gerade Linien OA, OB, OC, ... ON ausgehend und jede derselben mit der folgenden durch eine Ebene verbunden, so entsteht eine n-seitige räumliche Ecke; über diese könnte man ganz ähnliche Betrachtungen wie in §. 6. über die dreiseitige Ecke anstellen, doch würde die Aufzählung aller nebenliegenden Ecken einige Weitläufigkeit verursachen, ohne einen wesentlichen Nutzen zu bringen. Man beschränkt sich daher auf die Construction der Gegenecke und der Polarecke; die erste ist wiederum der ursprünglichen Ecke symmetrisch gleich; die letztere entsteht auf ganz dieselbe Weise wie die Polarecke der dreiseitigen Ecke und besitzt ebenfalls die Eigenschaft, dass ihre Kantenwinkel die Flächenwinkel der ursprünglichen Ecke zu 180^0 ergänzen und dass ihre Flächenwinkel die Supplemente von den Kantenwinkeln der anfänglichen Ecke sind.

Schneidet man eine n-seitige Ecke durch eine Ebene, so entstehen n Dreiecke OAB, OBC, OCD ... und ein n-Eck $ABCD$..., dessen Winkel sämmtlich concav sind, wenn keiner der Flächenwinkel bei O mehr als 180^0 beträgt, was

wir im Folgenden voraussetzen. Zugleich bilden sich an jeder der Ecken A, B, C ... drei Winkel, von denen zwei den genannten Dreiecken angehören und der letzte in das n-Eck fällt; an der Ecke B z. B. sind diese Winkel ABO, CBO, ABC, die wir der Reihe nach durch β_1, β_2, β_3 bezeichnen wollen. Die analoge Bezeichnung möge für die übrigen Winkel gelten, ausserdem sollen die Kantenwinkel AOB, BOC, ... mit a, b, c ... bezeichnet werden. In den n Dreiecken ABO, BCO ... hat man nun erstlich die gesammte Winkelsumme

Fig. 23.



$$\left.\begin{array}{l} a + b + c + \dots \\ + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \dots \\ + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \dots \end{array}\right\} = n \,.\, 180^0;$$

zweitens kann jeder der Punkte A, B, C ... als Scheitel einer dreiseitigen Ecke betrachtet und auf jede solche Ecke der vorhin genannte Satz angewendet werden; diess giebt

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \beta + \gamma_1 + \dots \\ + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \dots \end{array}\right\} > \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 + \dots$$

oder, weil die rechts stehende Winkelsumme des n-Ecks $(2n - 4) R = (n - 2)\, 180^0$ beträgt,

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \dots \\ + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \dots \end{array}\right\} > (n - 2)\, 180^0;$$

durch Subtraction dieser Ungleichung von der obigen Gleichung folgt

$$a + b + c + \dots < 2 \,.\, 180^0,$$

d. h.: **Die Summe aller Seiten einer beliebigen, nur concave Flächenwinkel enthaltenden Ecke beträgt weniger als vier rechte Winkel.** Geht die körperliche Ecke in eine Ebene über, so wird die Summe ihrer Seiten $= 360^0$.

Mittelst der Polarecke folgt daraus ein Satz über die Winkelsumme einer n-seitigen Ecke. Bezeichnen wir nämlich die Winkel der gegebenen Ecke mit A, B, C ..., die Seiten der Polarecke mit a_1, b_1, c_1 ..., so ist wegen $A + a_1 = B + b_1 \dots = 180^0$

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C\ldots \\ +a_1+b_1+c_1\ldots \end{array}\right\}=n\,.\,180^0,$$

woraus bereits folgt

$$A+B+C+\ldots<n\,.\,180^0;$$

andererseits ergiebt sich durch Subtraction der Ungleichung $a_1+b_1+c_1+\ldots<360^0$ von der obigen Gleichung

$$A+B+C+\ldots>(n-2)\,180^0,$$

d. h.: **Die Winkelsumme einer n-seitigen, nur concave Flächenwinkel enthaltenden Ecke beträgt mehr als $2n-4$ und weniger als $2n$ rechte Winkel.**

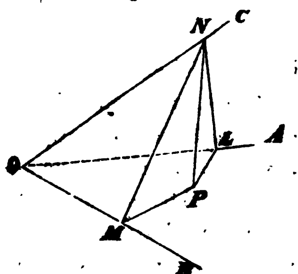
§. 8.

Die Bestimmung der dreiseitigen Ecke.

Sowie früher eine Untersuchung über die Anzahl der Stücke durchgeführt wurde, welche zur Bestimmung eines ebenen Dreieckes erforderlich sind, so kann auch bei der aus drei Kantenwinkeln (Seiten) und drei Flächenwinkeln (Winkeln) bestehenden dreiseitigen Ecke die Frage gestellt werden, wie viele dieser Bestandtheile gegeben sein müssen, wenn die Ecke vollständig bestimmt sein soll. Zunächst erhellt nun sehr leicht, dass weder ein noch zwei Kantenwinkel zur Bestimmung der Ecke ausreichen, und es ist daher die nachherige Untersuchung mit dem Falle anzufangen, wo sämmtliche Kantenwinkel gegeben sind. Zunächst müssen wir aber die räumliche Figur beschreiben, an welche die späteren Erörterungen geknüpft werden sollen.

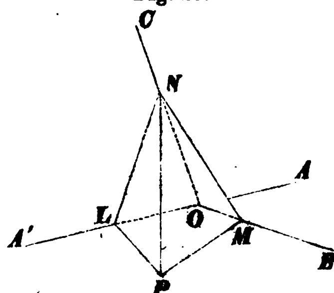
In der dreiseitigen Ecke $OABC$ mögen die Kantenwinkel (Seiten) durch $BOC=a$, $COA=b$, $AOB=c$ bezeichnet werden; ON sei ein beliebiger Abschnitt auf der Kante OC und NP die Entfernung des Punktes N von der Ebene AOB. Durch irgend einen Punkt der Geraden NP denke man sich eine Normale zur Ebene AOC gezogen und durch NP und jene Normale eine Ebene

Fig. 24.



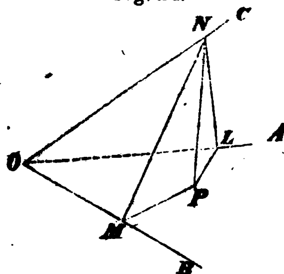
gelegt; nach §. 4 steht diese Ebene senkrecht auf der Kante AO, und wenn L der Durchschnitt beider ist, so sind die Geraden LN und LP winkelrecht zu OA, und folglich ist $\angle NLP$ der an der Kante OA liegende Flächenwinkel, welcher A heissen möge. Auf ähnliche Weise lässt sich eine Ebene construiren, welche die Geraden NP in sich enthält und auf der Kante OB senkrecht steht, so dass MN und MP rechtwinklig zu OB sind und $\angle NMP$ der an der Kante OB liegende Flächenwinkel B ist. — Diese Construction erleidet nur eine geringe Modification, wenn der Fusspunkt der Normale NP nicht in den Winkelraum AOB, sondern in den Raum eines der Nebenwinkel oder des Scheitelwinkels von AOB fällt. Liegt z. B. P in dem Nebenwinkelraume $A'OB$, so ist $LNMP$ das Supplement des Flächenwinkels an OB, wie die Figur zeigt. Aehnlich verhält sich die Sache in den übrigen Fällen.

Fig. 25.



I. Sind die drei Seiten a, b, c gegeben, so kann man die Strecke ON willkührlich wählen und einzeln für sich die rechtwinkligen Dreiecke ONL und ONM (in irgend einer Ebene) construiren, da jedes dieser Dreiecke durch die Hypotenuse und den einen anliegenden Winkel bestimmt ist; man kennt jetzt die Geraden OL, OM und kann sie auf den Schenkeln des Winkels AOB abschneiden. Errichtet man weiter in in der Ebene AOB durch L und M Senkrechte auf OA und OB, so schneiden sich diese in einem Punkte P, und hierdurch werden die Linien LP, MP bekannt; endlich ist PN eine Normale zu der Ebene AOB, mithin kennt man in dem Dreiecke LPN die drei Stücke LN, LP, $\angle LPN = 90°$, und daraus folgt der Winkel $PLN = A$; auf gleiche Weise bestimmt sich das Dreieck MPN durch MN, MP,

Fig. 24.



$\angle MPN = 90^\circ$ und daraus $\angle PMN = B$. Wäre der Winkel $AOC = b$ ein stumpfer und $\angle BOC = a$ ein spitzer wie in Fig. 25, so würde der Fusspunkt L auf die Rückverlängerung von OA, mithin P in den Nebenwinkelraum $A'OB$ fallen und dann ist $\angle PMN$ nicht $= B$, sondern $= 180^\circ - B$ also $B = 180^\circ - \angle PMN$. Aehnlich verhält sich die Sache, wenn b spitz und a stumpf ist oder wenn beide Winkel stumpf sind; in jedem Falle aber führt die angegebene Construction zur Kenntniss der Flächenwinkel A und B. Man übersieht auf der Stelle, dass mittelst desselben Verfahrens jedes beliebige andere Paar von Flächenwinkeln gefunden werden kann, und dass man also den Satz aussprechen darf: Eine dreiseitige Ecke ist durch ihre drei der Grösse und Anordnung nach gegebenen Seiten bestimmt.

Hieraus leitet man unmittelbar den weiteren Satz ab: Zwei dreiseitige Ecken, welche dieselben Seiten besitzen, sind congruent oder symmetrisch, je nachdem die genannten Bestandtheile in demselben oder in entgegengesetztem Sinne aufeinander folgen.

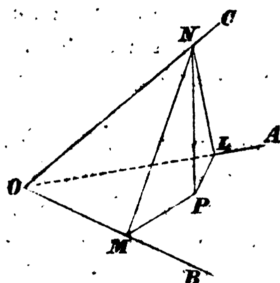
Ferner gehen aus der obigen Betrachtung noch die beiden Sätze hervor: Sind zwei Seiten einer dreiseitigen Ecke einander gleich, so sind es auch die gegenüberliegenden Winkel, sind sie ungleich, so steht der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber.

II. Den obigen Ergebnissen reihen sich unmittelbar analoge Resultate an, wenn man die Polarecke in Betrachtung zieht. Sind nämlich von einer Ecke die drei Winkel A, B, C gegeben, so kennt man die Seiten der Polarecke $a_1 = 180^\circ - A$, $b_1 = 180^\circ - B$, $c_1 = 180^\circ - C$, auf letztere kann man jetzt das Obige anwenden und die Winkel A_1, B_1, C_1 der Polarecke bestimmen, aus diesen folgen dann die Seiten $a = 180^\circ - A_1$, $b = 180^\circ - B_1$, $c = 180^\circ - C_1$ der ursprünglichen Ecke. Demnach gelten die Sätze: Eine dreiseitige Ecke ist durch ihre drei der Grösse und Anordnung nach gegebenen Winkel bestimmt; ferner: Zwei dreiseitige Ecken, welche

dieselben Winkel besitzen, sind congruent oder symmetrisch, je nachdem die genannten Bestandtheile in demselben oder im entgegengesetzten Sinne aufeinander folgen; endlich: Sind zwei Winkel einer dreiseitigen Ecke gleich, so sind es auch die gegenüberliegenden Seiten, sind sie ungleich, so steht dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber.

III. Wir betrachten jetzt den Fall, wo zwei Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel A gegeben sind.

Fig. 26.



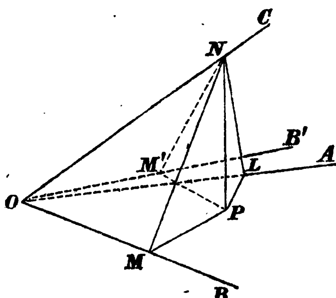
Wählt man wiederum ON willkührlich und fällt in der Ebene des Winkels $AOC = b$ die Senkrechte NL, so erhält man NL und den Fusspunkt L; an die Ebene LON denken wir uns den Winkel $AOB = c$ unter dem gegebenen Neigungswinkel A angelegt und erhalten damit den Schenkel OB; dass nun die dritte Seite BOC bestimmt ist, erhellt bereits aus dem Umstande, dass durch OC und OB nur eine Ebene gelegt werden kann, es lässt sich dies aber noch genauer nachweisen. Errichtet man nämlich in L auf OA eine in die Ebene AOB fallende Senkrechte und lässt auf diese das Perpendikel NP herab, so ist der Punkt P bestimmt und zugleich sind es die Geraden LP, NP; mittelst einer Senkrechten von P auf OB findet sich weiter der Punkt M und seine Verbindungslinien mit N, O und P; in dem Dreiecke OMN kennt man jetzt die drei Seiten, mithin auch den Winkel $MON = BOC$, welcher die dritte Seite der Ecke ist. Aus No. I. ergiebt sich nun, dass auch die Winkel der Ecke aufgefunden werden können, und man hat daher den Satz: Eine dreiseitige Ecke ist durch zwei Seiten und den zwischenliegenden Winkel bestimmt; daraus folgt weiter: Zwei dreiseitige Ecken, welche in zwei Seiten und dem zwischenliegenden Winkel übereinstimmen, sind congruent oder symmetrisch, je nachdem die genannten Bestandtheile in dem-

selben oder in entgegengesetztem Sinne aufeinanderfolgen.

IV. Durch Betrachtung der Polarecke ergeben sich hieraus die entsprechenden Sätze: Eine dreiseitige Ecke ist durch zwei Winkel und die zwischenliegende Seite bestimmt, ferner: Zwei dreiseitige Ecken, welche in zwei Winkeln und der zwischenliegenden Seite übereinstimmen, sind congruent oder symmetrisch, je nachdem die genannten Bestandtheile in demselben oder im entgegengesetzten Sinne aufeinanderfolgen.

V. Sind zwei Seiten a, b und ein Gegenwinkel A gegeben, so kann man zunächst wiederum ON willkührlich wählen und durch die Senkrechten NL und NM die Punkte L, M, sowie die Geraden OL, LN und OM bestimmen; in dem Dreiecke LPN kennt man jetzt ausser dem rechten Winkel bei P noch LN und $\angle PLN = A$, mithin das ganze Dreieck; die Kathete LP desselben bestimmt mit OL zusammen das bei L rechtwinklige Dreieck OLP und dessen Hypotenuse OP, endlich sind von dem Dreiecke OPM die Seiten OP, OM und der Winkel $OMP = 90^0$ bekannt, so dass sich die Construction desselben ausführen lässt. Hierbei findet aber in so fern eine Zweideutigkeit statt, als man nicht weiss, ob das Dreieck OPM nach der Vorderseite von OP oder nach der entgegengesetzten Seite zu gelegt werden soll; in der That bleiben auch alle bisherigen Schlüsse dieselben, wenn man sich OB' so gezogen denkt, dass $\angle POB' = \angle POB$, also $OM' = OM$ und $PM' = PM$ wird. Demnach muss man sagen: Durch zwei Seiten und einen Gegenwinkel ist eine dreiseitige Ecke im Allgemeinen zweideutig bestimmt; es folgt daraus: Zwei dreiseitige Ecken, welche in zwei Seiten und einem Gegen-

Fig. 27.



winkel übereinstimmen, brauchen nicht nothwendig congruent oder symmetrisch zu sein.

VI. Die Betrachtung der Polarecke führt zu den analogen Sätzen: Durch zwei Winkel und eine Gegenseite ist eine dreiseitige Ecke im Allgemeinen zweideutig bestimmt, und: Zwei dreiseitige Ecken, welche in zwei Winkeln und einer Gegenseite übereinstimmen, brauchen nicht nothwendig congruent oder symmetrisch zu sein.

Constructionen zu Cap. II.

Die im vorigen Paragraphen angestellten Erörterungen veranlassen die naheliegende Frage, ob es möglich ist, aus den gegebenen Bestimmungsstücken einer dreiseitigen Ecke die übrigen Bestandtheile durch Construction abzuleiten. Nun sind zwar die Mittel hierzu bereits vollständig in dem Vorigen enthalten, weil aber Constructionen im Raume nur gedacht, nicht graphisch ausgeführt werden können, so müssen wir jene Constructionen so einrichten, dass sie auch in einer Ebene ausführbar sind.

1) Aus den Seiten einer dreiseitigen Ecke die Winkel derselben zu finden. Denkt man sich die Ebene des Kantenwinkels $AOC = b$ so lange um die Kante AO gedreht, bis sie in die Ebene des Winkels $AOB = c$ gelangt, auf gleiche Weise BOC um BO, LPN um LP und MPN um MP gedreht und in die Ebene AOB niedergelegt, so entsteht eine ebene Figur, in welcher die Kante ON zweimal und der Punkt N viermal vorkommt; es ist nämlich $\angle LON_1 = b$, $\angle MON_2 = a$, $ON_1 = ON_2$, ferner PN_3 senkrecht auf LP, PN_4 rechtwinklig zu MP, $LN_1 = LN_3$, $MN_2 = MN_4$, $PN_3 = PN_4$,

Fig. 28.

endlich $\angle PLN_3 = A$ und $\angle PMN_4 = B$. Diess giebt folgende Construction: man lege die gegebenen Winkel $C_1OA = b$, $AOB = c$, $BOC_2 = a$ aneinander, nehme von O aus auf OC_1 und OC_2 zwei gleiche Abschnitte $ON_1 = ON_2$, fälle von N_1 die Senkrechte N_1L auf OA, von N_2 die Senkrechte N_2M auf OB, verlängere diese Perpendikel, bis sie sich in P schneiden und construire nun zwei rechtwinklige Dreiecke LPN_3 und MPN_4 aus den Katheten LP, MP und den Hypotenusen $LN_3 = LN_1$, $MN_4 = MN_2$; die Winkel PLN_3 und PMN_4 sind dann zwei Winkel der dreiseitigen Ecke, vorausgesetzt, dass P innerhalb des Winkels c fällt. Liegt dagegen P im Nebenwinkel von c auf der Seite des Winkels a, so ist $A = 180° - \angle PLN_3$ und $B = \angle PMN_4$, liegt P im Nebenwinkel von c nach b hin, so hat man $A = \angle PLN_3$ und $B = 180° - \angle PMN_4$, fällt endlich P in den Scheitelwinkel von c, so wird $A = 180° - \angle PLN_3$ und $B = 180° - \angle PMN_4$. Eine Probe für die Genauigkeit der Construction besteht darin, dass $PN_3 = PN_4$ sein muss.

Unmöglich wird die Construction, wenn zwei von den Kantenwinkeln a, b, c zusammen weniger als der dritte ausmachen, oder wenn $a + b + c > 360°$ ist; man erkennt diess auch bei der Construction selbst, sobald man die Winkel a und b nicht neben c, sondern in c hinein legt.

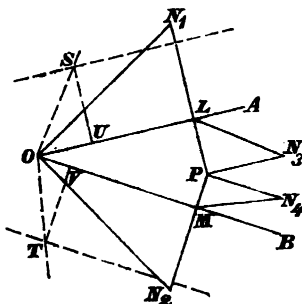
2) Aus den drei Winkeln einer dreiseitigen Ecke die Seiten zu finden. Vermöge der Eigenschaften der Polarecke hat man zunächst die Supplemente $a_1 = 180° - A$, $b_1 = 180° - B$, $c_1 = 180° - C$ als Seiten einer Ecke zu betrachten, die Winkel A_1, B_1, C_1 derselben zu construiren und daraus $a = 180° - A_1$, $b = 180° - B_1$, $c = 180° - C_1$ herzuleiten.

3) Aus zwei Seiten und dem zwischenliegenden Winkel eine dreiseitige Ecke zu construiren. Denken wir uns die dreiseitige Ecke auf die nämliche Weise wie bei der ersten Aufgabe in einer Ebene ausgebreitet, so erhalten wir zwar dieselbe Figur, aber mit dem Unterschiede, dass jetzt b, c und $\angle PLN_3 = A$ gegeben, dagegen a und $\angle PMN_4 = B$ unbekannt sind; die Construction ist dann folgende. Man legt die Winkel b und c neben einander, wählt N_1 willkührlich in OC_1, fällt auf OA

von N_1 aus die Senkrechte N_1L und verlängert sie über L hinaus; an diese Verlängerung bringt man in L den Winkel $PLN_3 = A$, nimmt auf dem Schenkel LN_3 desselben den Abschnitt $LN_3 = LN_1$ und lässt von N_3 auf den anderen Schenkel das Perpendikel N_3P herab; nachdem man hiermit den Punkt P bestimmt hat, zieht man durch P die Normale PM zu OB und stellt $PN_4 = PN_3$ senkrecht auf PM, der Winkel PMN_4 ist dann $= B$. Um noch a zu bestimmen, nimmt man auf der Verlängerung von PM die Strecke $MN_2 = MN_4$ und zieht ON_2, wodurch der Winkel $MON_2 = a$ entsteht. Eine Probe für die Genauigkeit hat man darin, dass $ON_2 = ON_1$ sein muss.

4) Aus zwei Winkeln und der zwischenliegenden Seite eine dreiseitige Ecke zu construiren. Wie bei der zweiten Aufgabe geht man auch hier zunächst auf die Construction der Polarecke aus und leitet auf dieser die gesuchte Ecke ab. Will man dagegen mit Vermeidung der Polarecke zu einer directen Construction gelangen, was bei dem häufigen Vorkommen gerade dieser Aufgabe von Werth ist, so handelt es sich darum, innerhalb des gegebenen Winkels $AOB = c$ den Punkt P so zu wählen, dass das aus dem Perpendikel PL und dem Winkel $PLN_3 = A$ construirte rechtwinklige Dreieck eine Kathete PN_3 erhält, welche der Kathete PN_4 in dem auf gleiche Weise gebildeten Dreiecke MPN_4 gleich ist. Man erreicht diess auf folgende Weise. An die Schenkel AO und BO lege man nach Aussen die gegebenen Winkel A und B an, ziehe ferner zu OA eine beliebige ausserhalb liegende Parallele und zu BO eine Parallele, welche von BO dieselbe Entfernung hat, wie die erste Parallele von AO; fällt man von den Durchschnitten S und T der Winkelschenkel und der Parallelen auf OA und OB die Senkrechten SU und TV, so sind diese gleich. Man

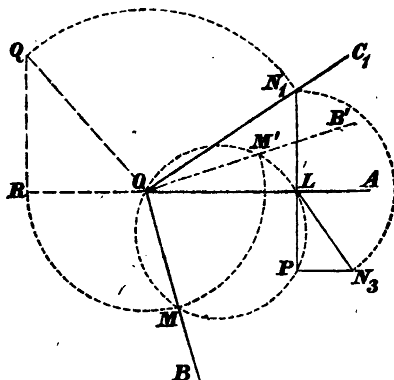
Fig. 29.



ziehe ferner in der Entfernung OU eine Parallele zu OA innerhalb des Winkels AOB, ebenso eine Parallele zu OB in der Entfernung OV. Beide Parallelen schneiden sich in einem Punkte P, von diesem lässt man auf OA und OB die Senkrechten PL und PM herab und construirt die rechtwinkligen Dreiecke PLN_3 und PMN_4 mit den Winkeln $PLN_3 = \angle AOS = A$, $\angle PMN_4 = \angle BOT = B$; diese Dreiecke sind den Dreiecken UOS und VOT congruent, mithin $PN_3 = PN_4$, weil $US = VT$. Der weitere Verlauf der Construction besteht nun darin, dass man PL verlängert und aus L mit dem Halbmesser LN_3 einen Kreisbogen beschreibt, welcher die verlängerte PL in N_1 schneidet, dass man ferner auf analoge Weise den Punkt N_2 bestimmt und schliesslich ON_1 und ON_2 zieht, wo nun $\angle AON_1 = a$, $\angle BON_2 = b$ sein muss. Als Constructionsprobe dient die Gleichheit von ON_1 und ON_2.

5) Aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel eine dreiseitige Ecke zu construiren. Sind a, b und A gegeben, so kann man zunächst mit b und A ganz dieselbe Construction wie in No. 3) vornehmen und hierdurch die Lage des Punktes P, sowie OL und LP bestimmen; um nun weiter $\angle AOB = c$ zu finden, bedarf es der Construction des Vierecks $OLPM$, von welchem vier Bestandtheile (OL, LP, $\angle OLP = \angle OMP = 90°$) schon bekannt sind und also nur noch einer, nämlich OM fehlt. Letztere Gerade wird erhalten, wenn man das im Raume befindliche rechtwinklige Dreieck OMN irgendwo in der Ebene der Figur construirt, und es geschieht diess am bequemsten auf die Weise, dass man LO über O hinaus verlängert, an die Verlängerung den Winkel a anlegt und das rechtwinklige Dreieck OQR construirt, worin $\angle ROQ = a$ und $OQ = ON_1$ ist; die

Fig. 30.



Kathete OR ist dann der Grösse nach $= OM$. Beschreibt man jetzt über OP als Durchmesser einen Kreis und aus O mit OR als Halbmesser einen zweiten Kreis, so schneidet dieser den ersten Kreis in zwei Punkten M, M' und es würde nun ebensowohl $OLPM$ als $OLPM'$ das gesuchte Viereck sein, in welchem $\angle LOM = c$ oder $\angle LOM' = c$ ist. Legt man $\angle ROQ = a$ an OM oder an OM', so hat man wie in No. 1) die drei Seitenwinkel der Ecke nebeneinander und kann jetzt die noch fehlenden Winkel der Ecke bestimmen.

Die Construction giebt im Allgemeinen zwei Auflösungen und zwar sind beide möglich, wenn $OR < OP$ ist; wäre dagegen $OR = OP$, so würden die beiden Kreise sich nicht schneiden, sondern im Punkte P berühren und dann existirt nur eine Auflösung; endlich für $OR > OP$ haben beide Kreise keinen Punkt gemein und dann wird die Aufgabe unmöglich.

6) **Aus zwei Winkeln und einer Gegenseite eine dreiseitige Ecke zu construiren.** Wie bei den Aufgaben 2) und 4) construirt man zunächst die Polarecke und leitet aus dieser die gesuchte Ecke ab.

ZWEITES BUCH.

Vollständig von Ebenen begränzte Raumgebilde.

Cap. III.

Die Gestalten ebenflächiger Körper.

---

§. 9.

Pyramide, Prisma und Prismatoid.

Jedes von Flächen vollständig begränzte Raumgebilde heisst ein Körper; sind die Begränzungsflächen sammt und sonders Ebenen, wie wir diess für jetzt voraussetzen, so wird der Körper ein Polyeder genannt; die Durchschnitte je zwei aneinanderstossender Begränzungsebenen heissen seine Kanten, die Durchschnitte der Kanten seine Ecken und die an den Ecken von den Kanten gebildeten Winkel seine Kantenwinkel.

I. Zu dem einfachsten Polyeder gelangt man dadurch, dass man einen von drei Ebenen gebildeten körperlichen Winkel mittelst einer vierten Ebene durchschneidet; der entstehende Körper heisst eine dreiseitige Pyramide und enthält vier dreieckige Begränzungsebenen, sechs Kanten und vier Ecken. Die in der schneidenden Ebene liegende Begränzungsfläche kann man die Grundfläche oder Basis der Pyramide nennen, den Scheitel des durchschnittenen körperlichen Winkels ihre Spitze und die

Senkrechte von der Spitze auf die Basis ihre Höhe. In ähnlicher Weise entsteht eine mehrseitige Pyramide, wenn ein mehrseitiger Körperwinkel von einer Ebene durchschnitten wird; ist der Körperwinkel aus n Ebenen gebildet, so heisst die Pyramide n-seitig und enthält $n+1$ Gränzflächen (n Dreiecke und ein n-Eck), $2n$ Kanten und $n+1$ Ecken (eine n-seitige und n dreiseitige); die übrigen Benennungen bleiben dieselben.

Aus der obigen Entstehungsweise der Pyramide folgt von selbst, durch welche Stücke eine Pyramide bestimmt ist. Denkt man sich zunächst den körperlichen Winkel an der Spitze gegeben (etwa durch Zusammensetzung mehrerer dreiseitiger Körperwinkel, von denen jeder einzelne bestimmt sein muss), so muss noch die Lage der schneidenden Ebene fixirt werden; hierzu sind drei Punkte auf drei von der Spitze ausgehenden Kanten, d. h. die Längen dreier in der Spitze zusammenlaufender Kanten erforderlich.

Statt die Grundfläche gegen die Spitze zu orientiren, kann man auch umgekehrt die Basis als bekannt voraussetzen und die Lage der Spitze gegen die Basis feststellen. Diess ist auf mehrere Arten möglich; entweder bestimmt man eine Kante der Grösse und Richtung nach, wo dann der Anfangspunkt der betreffenden Kante eine Ecke der Basis und der Endpunkt die Pyramidenspitze ist, oder man sieht die Spitze der Pyramide als Spitze eines Dreieckes an, dessen Grundlinie eine Seite der Basis ist und dessen Ebene gegen die Grundfläche geneigt ist, oder entlich man betrachtet die Spitze der Pyramide als Durchschnitt dreier an die Basis gelehnter Ebenen. Im ersten Falle wird die Pyramide durch ihre Grundfläche, eine nach der Spitze gehende Kante und durch den körperlichen Winkel bestimmt, welchen die aufsteigende Kante mit den zwei sie schneidenden Grundkanten bildet; im zweiten Falle bedarf es ausser der Basis noch des Neigungswinkels einer Seitenfläche und zweier Stücke derselben; im dritten Falle müssen die Grundfläche und die Neigungswinkel dreier an sie stossenden Seitenflächen gegeben sein.

Aus diesen Grundzügen sind die Bedingungen für die Congruenz oder symmetrische Gleichheit zweier Pyramiden

leicht herzuleiten, indem man beachtet, dass zwei in den hinreichenden Bestimmungsstücken übereinstimmende Pyramiden congruent oder symmetrisch gleich sind, je nachdem die in Betracht gezogenen Bestandtheile in derselben oder in entgegengesetzter Ordnung aufeinanderfolgen. Schneidet man eine Pyramide durch eine zur Basis parallele, zwischen Spitze und Grundfläche gelegte Ebene, so zerfällt die Pyramide in eine kleinere Pyramide und in einen zweiten Körper, welcher abgestumpfte Pyramide genannt wird. Die Vergleichung der grösseren und kleineren Pyramide zeigt, dass die Grundkanten beider parallel laufen (weil jede Ebene von zwei Parallelebenen in parallelen Geraden geschnitten wird), und dass folglich die gleichnamigen Begränzungsflächen beider Pyramiden ähnliche Figuren sind, während die Kanten- und Flächenwinkel in beiden Pyramiden dieselben sind*).

II. Hält man in einer abgestumpften Pyramide von beliebig vielen Seiten die beiden Parallelebenen fest und entfernt die Spitze mehr und mehr von jenen Ebenen, so nähern sich die nach der Spitze gehenden Kanten mehr und mehr der parallelen Lage; nach Eintritt der letzteren hat man eine Schaar paralleler Geraden, welche durch Ebenen verbunden und von zwei Parallelebenen geschnitten sind; der so entstehende Körper heisst ein Prisma und zwar ein n-seitiges, wenn jenes System paralleler Geraden aus n Geraden bestest. Das n-seitige Prisma enthält demnach $n+2$ Begränzungsflächen, $3n$ Kanten und $2n$ dreiseitige Ecken; die beiden parallelen Begränzungsflächen sind congruente n-Ecke, von denen man das eine die Basis des Prisma's und deren Entfernung man die Höhe desselben zu nennen pflegt, die übrigen n Seitenflächen sind Parallelogramme.

Um ein Prisma zu bestimmen, muss man erstens die Basis und zweitens eine der (von der Basis nach der Gegenfläche gezogenen) parallelen Kanten ihrer Grösse und

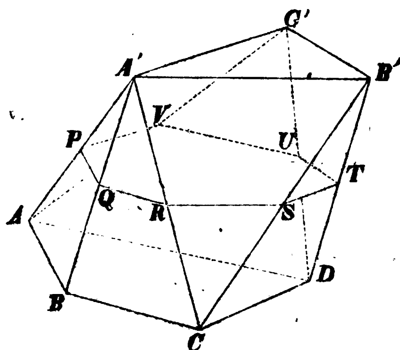
*) Man kann auf diese Bemerkung die Lehre von der Aehnlichkeit der Pyramiden (und überhaupt der Polyeder) gründen, welche wir aber nur andeuten, da ihr bei weitem nicht jene Wichtigkeit zukommt wie der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

Lage nach angeben; die erste Bestimmung ist die eines Vieleckes, die zweite geschieht auf die Weise, dass man aus irgend welchen Stücken den körperlichen Winkel bestimmt, den die betreffende Kante mit den zwei ihr begegnenden Grundkanten bildet und auf der ihrer Richtung nach somit bestimmten Kante ihre gegebene Länge abträgt. Zwei aus denselben Stücken construirte Prismen sind congruent oder symmetrisch gleich, je nachdem die Bestandtheile beiderseits in gleicher oder entgegengesetzter Ordnung aneinander gereiht sind.

Ausser dem dreiseitigen Prisma verdient noch dasjenige vierseitige Prisma erwähnt zu werden, dessen Basis ein Parallelogramm ist; es heisst ein Parallelepipeden. Die gegenüberliegenden Seitenflächen desselben sind congruent und parallel; jeder Ecke liegt eine andere so gegenüber, dass beide keine Kante gemein haben, je zwei solcher Gegenecken sind symmetrisch gleich. Die Verbindungslinie der Scheitel zweier Gegenecken heisst eine Diagonale des Parallelepipedons und es giebt vier solcher Diagonalen. Diese schneiden und halbiren sich gegenseitig in einem Punkte; jede durch zwei Diagonalen bestimmte Ebene heisst eine Diagonalebene des Parallelepipedons.

III. Denkt man sich in jeder von zwei Parallelebenen ein Vieleck construirt und zwar in der einen Ebene das *m*-Eck *ABCD*..., in der anderen das *n*-Eck *A'B'C'D'*..., so lässt sich durch jede Seite des einen und durch jede Ecke des anderen Polygones eine Ebene legen. Von der Seite *AB* ausgehend, erhält man zunächst die *n* Ebenen

Fig. 31.



ABA', *ABB'*, *ABC'*, *ABD'*, etc.,

ferner wenn man mit der Seite *BC* anfängt, die *n*-Ebenen

BCA', *BCB'*, *BCC'*, *BCD'*, etc.

und indem man auf diese Weise alle m Seiten des Polygones $ABCD$ ... benutzt, gelangt man zu mn Ebenen. Ferner lässt sich jede der n Seiten $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, etc. mit jedem der m Punkte A, B, C, D, etc. combiniren und hierdurch entstehen die nm Ebenen

$$A'B'A, \quad A'B'B, \quad A'B'C, \text{ etc.}$$
$$B'C'A, \quad B'C'B, \quad B'C'C, \text{ etc.}$$
u. s. w.,

so dass im Ganzen $2mn$ Verbindungsebenen zwischen beiden Vielecken hergestellt werden können. Unter diesen befinden sich $m+n$ äussere Ebenen, welche die übrigen zwischen sich fassen; diese Ebenen betrachten wir als Seitenflächen, die gegebenen Polygone als Grundflächen eines Körpers, welcher **Prismatoid** heissen möge. Die Figur zeigt die Gestalt des Körpers für den Fall $m = 4$, $n = 3$, und dabei ist der mittlere Querschnitt $PQRSTUV$ angegeben worden, um die sieben Seitenflächen deutlicher hervortreten zu lassen. Ein Prismatoid, dessen Grundflächen ein m-Eck und ein n-Eck sind, besitzt hiernach $m+n$ Ecken, $m+n+2$ Begränzungsebenen und $2(m+n)$ Kanten.

Will man die stereometrischen Gebilde mit planimetrischen vergleichen, so entspricht von den hier aufgeführten Körpern die Pyramide dem Dreieck, das Prisma dem Parallelogramm, das Prismatoid dem Trapez.

§. 10.

Allgemeine Eigenschaften der Polyeder.

Die Formen der Polyeder sind so unendlich mannichfaltig, dass es ein überaus mühsames und überdiess wenig Nutzen bringendes Geschäft sein würde, all die verschiedenen Körperformen aufzählen zu wollen, welche bei dem Durchschnitte von vier, fünf, sechs u. s. w. Ebenen entstehen können; wir unterlassen daher eine solche Discussion und geben dafür die Entwickelung solcher Gesetze, welche entweder allen Polyedern oder wenigstens einer sehr umfassenden Classe derselben zukommen.

Im Folgenden bezeichne e die Anzahl der Ecken eines

Polyeders, f die Gesammtzahl seiner Begränzungsflächen, k die Anzahl der Kanten, w die Anzahl der von den Kanten gebildeten Winkel; es ist dann unsere nächste Aufgabe, den Zusammenhang zwischen e, f, k und w aufzufinden.

Für die dreiseitige Pyramide ist $e = 4$, $f = 4$, $k = 6$, mithin

1) $$e + f = k + 2.$$

Denken wir uns an eine solche Pyramide $ABCD$ eine zweite $A'B'C'D'$ entweder nach aussen oder nach innen, aber jedenfalls so angesetzt, dass die Flächen ABC und $A'B'C'$ sich decken, so hat das neue Polyeder eine Ecke D' mehr als

Fig. 32.

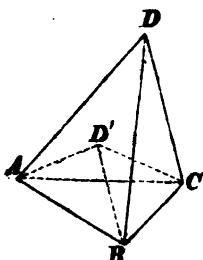
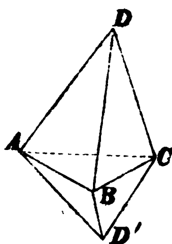


Fig. 33.

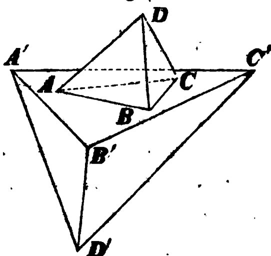


das vorige; die beiden zusammenfallenden Flächen ABC und $A'B'C'$ zählen nicht als Seitenflächen, und daher bilden die acht Seitenflächen beider Pyramiden nur einen sechsseitigen Körper, d. h.: Die Anzahl der Seitenflächen ist gegen früher um zwei gewachsen; endlich sind drei neue Kanten AD', BD', CD' hinzugekommen. Da nun $1 + 2 = 3$, so wachsen beide Seiten der Gleichung 1) um gleichviel, mithin besteht jene Gleichung nicht nur für die dreiseitige Pyramide, sondern auch für den neuern Körper. Denkt man sich an letzteren wieder eine dreiseitige Pyramide angesetzt, deren Basis mit einer der Seitenflächen zusammenfällt, so wird nochmals e um 1, f um 2, k um 3 vermehrt, mithin gilt auch für den neuen Körper die Gleichung 1). Es leuchtet augenblicklich ein, wie diese Schlüsse fortgesetzt werden können und dass hiernach bei jedem nur von Dreiecken begränzten Polyeder $e + f = k + 2$ sein muss. Um diesen Satz auf andere Polyeder auszudehnen, stellen wir uns vor, der Flächenwinkel zwischen zwei benachbarten dreieckigen Seitenflächen z. B. BCD und BCD' gehe in einen gestreckten Winkel über. Die Anzahl der Ecken bleibt dabei ungestört, die Anzahl der Seitenflächen vermindert sich um die Einheit, weil jene zwei Seitenflächen zu einer einzigen zusammenfallen, gleichzeitig nimmt die

Anzahl der Kanten um die Einheit ab, weil die gemeinschaftliche Kante jener Seitenflächen aufhört Kante zu sein und zur Diagonale der neuen Seitenfläche wird. Da nun beide Seiten der Gleichung $e+f=k+2$ um gleichviel, nämlich um die Einheit vermindert werden, so bleibt die Gleichung ungestört, d. h. sie gilt auch für Polyeder, deren Seitenflächen theils Dreiecke, theils Vierecke sind. Ferner kann man eine viereckige Seitenfläche mit einer benachbarten dreieckigen zusammenfallen lassen, indem man den zwischenliegenden Flächenwinkel $=180^0$ werden lässt. Wiederum nehmen jetzt f und k gleichzeitig um die Einheit ab, mithin gilt die Relation $e+f=k+2$ auch für Polyeder, an denen fünfeckige Seitenflächen vorkommen. Die Fortsetzung dieser Schlüsse zeigt augenblicklich, dass die genannte Gleichung bei allen Polyedern richtig bleibt, deren Seitenflächen irgend welche Vielecke sind.

Noch müssen wir eine Ausnahme erwähnen, welche der vorige Satz erleiden kann, und wir gehen desshalb auf den Anfang der durchgeführten Betrachtung zurück. Wenn die Grundflächen ABC und $A'B'C'$ der beiden aneinandergesetzten dreiseitigen Pyramiden sich nicht völlig decken, so wächst die Anzahl der Ecken um mehr als die Einheit, auch gehen nicht zwei Seitenflächen verloren, sondern nur eine und daher nimmt f um 3 zu, endlich beträgt der Zuwachs von k jedenfalls mehr als 3. So ist z. B. in der Figur: $e=8$, $f=7$, $k=8$ und $e+f$ nicht $=k+2$. Das gemeinschaftliche aller solchen Ausnahmefälle besteht darin, dass ringförmig durchbrochene Seitenflächen vorkommen, nach deren Wegnahme das Polyeder in zwei getrennte Theile zerfällt. Der obige Satz ist daher auf solche Polyeder einzuschränken, deren Oberfläche auch nach Wegnahme irgend einer Seitenfläche eine ununterbrochene Reihenfolge gewöhnlicher Vielecke darstellt. Derartige Polyeder heissen Euler'sche Polyeder, und die für sie geltende Gleichung $e+f=k+2$ nennt man den Euler'schen Satz von den Polyedern.

Fig. 34.



Um eine Relation zwischen k und w zu erhalten, genügt folgende Bemerkung. Zählt man die Gesammtmenge der Seiten aller begränzenden Vielecke, wobei jede dreieckige Seitenfläche mit drei Seiten, jede viereckige mit vier Seiten u. s. w. in Rechnung gebracht wird, so hat man jede Kante zweimal gezählt, weil sie zwei verschiedenen Begränzungsflächen als Seite angehört; die Gesammtmenge aller Vielecksseiten ist daher $2k$. Jedes begränzende Vieleck enthält ebensoviel Seiten als Winkel und letztere sind die Kantenwinkel des Polyeders, man hat folglich

2) $$w = 2k \quad \text{oder} \quad k = \tfrac{1}{2}w.$$

Hieran knüpfen sich die Gesetze, nach denen sich die grösste und kleinste Menge von Kanten und Ecken bestimmt, welche ein Polyeder von gegebener Flächenzahl haben kann. Wir bemerken zuerst, dass jede Begränzungsfläche des Polyeders mindestens drei Winkel zählen, also $w \geqq 3f$ sein muss; vermöge der Gleichung 2) folgt hieraus $k \geqq \frac{3}{2}f$. Da ferner jede Ecke wenigstens drei Kantenwinkel enthält, so ist $w \geqq 3e$ oder vermöge des Werthes von w, $k \geqq \frac{3}{2}e$. Aus der letzten Ungleichung folgt, wenn $e = k + 2 - f$ gesetzt wird, $k \leqq 3f - 6$, also mit dem Vorigen zusammen

3) $$\tfrac{3}{2}f \leqq k \leqq 3f - 6.$$

Hieraus ergeben sich Gränzen für e, wenn $e + f - 2$ für k substituirt wird; der erste Theil der Ungleichung liefert $e \geqq 2 + \frac{1}{2}f$, der zweite $e \leqq 2f - 4$, also ist zusammen

4) $$2 + \tfrac{1}{2}f \leqq e \leqq 2f - 4.$$

Mittelst der Ungleichungen 3) und 4) in Verbindung der Gleichung 1) lässt sich entscheiden, wie viel Polyeder mit einer vorgeschriebenen Anzahl von Seitenflächen existiren können. Fragt man z. B. nach den möglichen Sechsflächnern, so ist $f = 6$, $5 \leqq e \leqq 8$, $9 \leqq k \leqq 12$; demnach kann

$$e = 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8$$

gesetzt werden und es sind

$$k = 9, \ 10, \ 11, \ 12$$

die zugehörigen nach der Formel $k = e + f - 2$ berechneten Werthe von k.

§. 11.

Die regelmässigen Polyeder.

Regelmässig heisst ein Polyeder, wenn seine sämmtlichen Seitenflächen congruente regelmässige Vielecke und alle seine Körperwinkel gleich sind. Beide Bedingungen können gleichzeitig nur in wenigen Fällen erfüllt werden, weil einerseits die an jeder Ecke befindlichen Kantenwinkel zusammen weniger als 360° ausmachen müssen und andererseits mindestens drei Kantenwinkel zur Bildung einer Ecke gehören.

Sollen die Seitenflächen reguläre Dreiecke sein, so ist jeder Kantenwinkel $= 60°$; drei, vier oder fünf Winkel von 60° geben zusammen jedesmal weniger als 360°, dagegen ist $6 . 60° = 360°$, $7 . 60° > 360°$ u. s. w., und es können daher aus gleichseitigen Dreiecken nur drei regelmässige Polyeder zusammengesetzt werden.

Sind die Seitenflächen Quadrate, so ist jeder Kantenwinkel $= 90°$; drei derselben geben eine Summe $< 360°$, bei vier oder mehr Winkeln von 90° ist keine Ecke mehr möglich; es giebt daher nur ein von Quadraten umschlossenes reguläres Polyeder.

Sind die Seitenflächen regelmässige Fünfecke, so beträgt jeder Kantenwinkel 108°; drei dieser Winkel machen zusammen weniger, vier aber mehr als 360° aus und es ist daher nur ein regelmässiges Polyeder mit fünfeckigen Seitenflächen möglich.

Bei dem regulären Sechseck, Siebeneck u. s. w. werden die Kantenwinkel so gross, dass schon die Summe von drei Kantenwinkeln eben so viel oder noch mehr als 360° beträgt; es sind also nur fünf reguläre Polyeder möglich, die sich auf folgende Weise näher charakterisiren lassen.

Wird jede Ecke des Polyeders von drei Winkeln des gleichseitigen Dreiecks gebildet, so ist $w = 3f = 3e$ oder $2k = 3f$ und $2k = 3e$; nimmt man die Gleichung $e + f = k + 2$ hinzu, so ergeben sich die Werthe

$$f = 4, \quad e = 4, \quad k = 6;$$

dieser Körper ist nichts anderes als die reguläre dreiseitige Pyramide, das sogenannte Tetraeder.

Stossen in jeder Ecke vier Winkel des gleichseitigen Dreiecks zusammen, so hat man $w = 3f = 4e$ oder $2k = 3f$ und $2k = 4e$, und durch Verbindung mit $e + f = k + 2$

$$w = 24 \quad f = 8, \quad e = 6, \quad k = 12;$$

dieser von acht gleichseitigen Dreiecken begränzte Körper heisst das Oktaeder.

Ist jede Ecke aus fünf Winkeln des regulären Dreiecks zusammengesetzt, so muss $w = 3f = 5e$ oder $2k = 3f$ und $2k = 5e$ sein; mit $e + f = k + 2$ verbunden, giebt diess

$$f = 20, \quad e = 12, \quad k = 30;$$

dieser von zwanzig gleichseitigen Dreiecken eingeschlossene Körper heisst das Ikosaeder.

Wird jede Ecke des Polyeders von drei Winkeln des Quadrates gebildet, so ist $w = 4f = 3e$ oder $2k = 4f$ und $2k = 3e$, woraus durch Verbindung mit $e + f = k + 2$ folgt

$$f = 6, \quad e = 8, \quad k = 12;$$

dieser von sechs Quadraten eingeschlossene Körper ist der Würfel (Hexaeder, Cubus).

Wenn endlich zu jeder Ecke des Polyeders drei Winkel eines regelmässigen Fünfecks gehören, so hat man $w = 5f = 3e$ oder $2k = 5f$ und $2k = 3e$; durch Hinzunahme der Gleichung $e + f = k + 2$ ergiebt sich

$$f = 12, \quad e = 20, \quad k = 30;$$

dieser von zwölf regelmässigen Fünfecken begränzte Körder heisst das Dodekaeder.

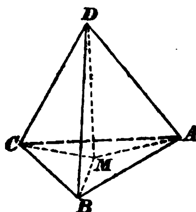
Man bemerkt übrigens eine eigenthümliche Reciprocität in den angegebenen Zahlen; das Oktaeder und Hexaeder sind nämlich in so fern verwandt, als die Eckenzahl des einen Körpers gleich der Flächenzahl des anderen und folglich die Kantenzahl in beiden dieselbe ist; auf gleiche Weise entspricht dem Ikosaeder das Dodekaeder; das Tetraeder dagegen steht für sich allein, weil bei ihm die Anzahl der Flächen mit der Menge der Ecken übereinstimmt.

§. 12.
Fortsetzung.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen bedürfen in doppelter Hinsicht einer Vervollständigung; einerseits wurde nur auf die Congruenz der regelmässigen Seitenflächen des Polyeders Rücksicht genommen und die Frage, ob daraus auch die Gleichheit aller Körperwinkel folge, noch unbeantwortet gelassen, andererseits ist bis jetzt zwar die Möglichkeit regulärer Körper, keineswegs aber die Wirklichkeit derselben gezeigt worden und es bedarf dieses Nachweises um so mehr, als nicht unmittelbar anschaulich klar ist, auf welche Weise z. B. zwölf Fünfecke oder zwanzig Dreiecke zu einem regulären Körper zusammengefügt werden können. Beide Forderungen erledigen wir gleichzeitig durch folgende Betrachtungen.

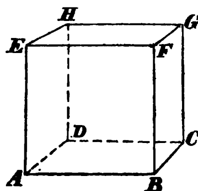
Das Tetraeder. Das gleichseitige Dreieck, welchem die Seitenflächen des Tetraeders congruent werden sollen, sei ABC und M der Mittelpunkt des demselben umschriebenen Kreises, also $MA = MB = MC$; errichtet man auf der Ebene des Dreiecks in M eine Normale, bestimmt auf derselben den Punkt D so, dass $AD = AB$, und zieht noch BD und CD, so sind die Dreiecke AMD, BMD, CMD aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel congruent, mithin $CD = BD = AD$ und folglich auch $= AB = BC = CA$. Der entstandene Körper hat also sechs gleich grosse Kanten, diese bilden vier gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen, endlich sind die Körperwinkel bei A, B, C und D gleich, weil jeder von drei gleichen Kantenwinkeln gebildet wird. Die entstandene dreiseitige Pyramide ist folglich das Tetraeder.

Fig. 35.



Das Hexaeder. Wenn $ABCD$ das Quadrat ist, über welchem der Würfel construirt werden soll, so denke man sich durch die vier Seiten AB, BC, CD, DA Ebenen senkrecht zur Ebene des Quadrates errichtet und durchschneide dieselben mittelst einer parallel zu $ABCD$

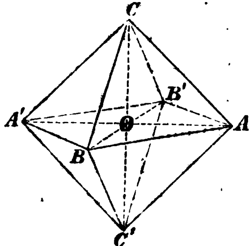
Fig. 36.



in der Entfernung $AE = AB$ gelegten Ebene; aus den bekannten Eigenschaften des Prisma's folgt dann sehr leicht, dass der entstandene Körper ein Würfel sein muss.

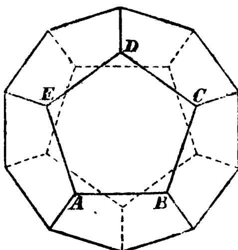
Das Oktaeder. Errichtet man auf der Ebene eines rechten Winkels in dessen Scheitel eine Normale, so erhält man zunächst drei aufeinander senkrechte Gerade; auf jeder von ihnen schneiden wir nach beiden Seiten hin dieselbe Strecke $OA = OA' = OB = OB' = OC = OC'$ ab und verbinden C sowohl als C' mit AB, BA', $A'B'$ und $B'A$ durch Ebenen. Der entstandene Körper lässt sich als eine Zusammensetzung von acht dreiseitigen Pyramiden ($OABC$, $OBA'C$ u. s. w.) ansehen, diese Pyramiden sind einander congruent, folglich alle Kanten gleich und die Seitenflächen congruente regelmässige Dreiecke. Jeder vierseitige Körperwinkel besteht aus vier dreiseitigen Körperwinkeln, welche in jenen acht Pyramiden vorkommen und daher congruent sind; daraus folgt sofort die Gleichheit aller Körperwinkel und mithin die Regelmässigkeit des Körpers. Wäre die Grösse einer Kante $AB = AC$ vorgeschrieben, so würde man den Abschnitt OA aus der Bemerkung finden, dass OA die Seite eines Quadrates bildet, von welchem AC die Diagonale ist.

Fig. 37.



Das Dodekaeder. An ein regelmässiges Fünfeck $ABCDE$ kann man sich fünf ihm congruente Fünfecke dergestalt angesetzt denken, dass an jeder Ecke des ursprünglichen Fünfecks ein Körperwinkel entsteht, welcher aus drei Kantenwinkeln von 108° gebildet ist, unter denen einer mit einem Winkel des Fünfecks zusammenfällt; man erhält auf diese Weise eine hohle Oberfläche von sechs Seiten mit congruenten Flächen und Winkeln. Denkt man sich dieselbe Fläche wiederholt construirt

Fig. 38.



so passen die ausspringenden Spitzen der einen in die einspringenden Winkel der anderen Oberfläche, und indem man beide Oberflächen auf diese Weise vereinigt, erhält man den von zwölf regulären Fünfecken begränzten Körper, dessen Winkel gleich sind, weil sie immer von denselben drei Kantenwinkeln gebildet werden.

Das Ikosaeder. Um zunächst einen aus fünf gleichseitigen und gleichgeneigten Dreiecken bestehenden Körperwinkel zu erhalten, denken wir uns ein regelmässiges Fünfeck $A'B'C'D'E'$, im Mittelpunkte O des ihm umschriebenen Kreises eine Normale auf der Ebene $A'B'C'D'E'$ errichtet und auf dieser ein Stück OF' so abgeschnitten, dass $A'F' = A'B'$ ist; verbindet man F' mit A', B', C', D' und F', so besitzt der bei F' entstehende fünfseitige Körperwinkel die verlangten Eigenschaften. Sei nun weiter ABC ein gleichseitiges Dreieck und an jeder Ecke desselben ein dem Winkel bei F' congruenter fünfseitiger Körperwinkel construirt, deren Kanten sämmtlich die Länge AB haben, so entsteht eine aus zehn gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzte hohle Oberfläche mit gleichen Körperwinkeln. Eine zweite dieser congruenten Oberfläche kann mit der ersten zu einer ununterbrochenen Fläche zusammengefügt werden, indem man jeden dreiseitigen Winkel der einen Oberfläche an einen zweiseitigen Winkel der anderen legt; man erhält damit einen von zwanzig regelmässigen Dreiecken begränzten, mit gleichen Winkeln versehenen Körper, also das Ikosaeder.

Fig. 39.

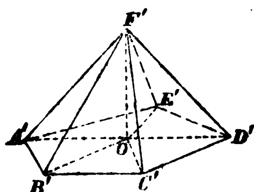
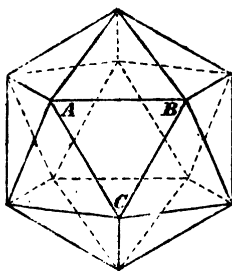


Fig. 40.

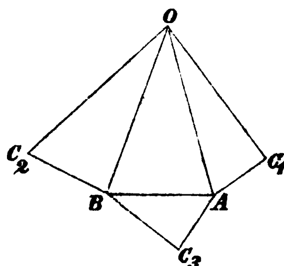


Constructionen zu Cap. III.

Denkt man sich eine Seitenfläche irgend eines Polyeders um eine ihrer Kanten gedreht, bis sie mit einer benachbarten Seitenfläche in eine Ebene zusammenfällt, und wendet man dieses Verfahren gleichförmig auf jede nächstfolgende Seitenfläche an, so kann man zuletzt alle Seitenflächen in eine Ebene niederlegen; die so entstehende Figur, welche alle Seitenflächen des Körpers in ihrer wahren Grösse darstellt, heisst das Netz des Polyeders. Schneidet man dasselbe aus einem ebenen Material von geringer Dicke und biegt die einzelnen Seitenflächen durch Drehung um ihre Kanten soweit auf, dass die entsprechenden Kanten des Netzes aneinanderstossen, so erhält man einen Körper, welcher als Modell des Polyeders dienen kann. Die Herstellung solcher Netze, wenn die nöthigen Bestimmungsstücke des Körpers gegeben sind, bildet im Allgemeinen den Gegenstand der folgenden Constructionen.

1) Eine dreiseitige Pyramide zu construiren, wenn die drei in der Spitze O zusammenlaufenden Kanten AO, BO, CO und die von denselben eingeschlossenen Kantenwinkel a, b, c gegeben sind. Denkt man sich die drei Seitenflächen BOC, COA, AOB in eine Ebene, etwa in die Ebene AOB, auf die nämliche Weise umgelegt, wie diess in den Constructionen zu Cap. II. geschehen ist, und die Basis ABC um AB gedreht, bis sie in dieselbe Ebene fällt, so erscheint die Ecke C in drei Lagen C_1, C_2, C_3, und zwar ist $OC_1 = OC_2 = OC$, $AC_1 = AC_3$, $BC_2 = BC_3$; die letztere Bemerkung führt unmittelbar zu folgender Construction: man lege die gegebenen Kantenwinkel so aneinander, dass $\angle AOB = c$, $\angle AOC_1 = b$, $\angle BOC_2 = a$ ist,

Fig. 41.

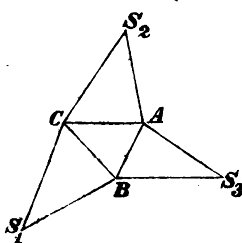


nehme OA, OB, $OC_1 = OC_2$ den gegebenen Kanten gleich, ziehe AB, AC_1, BC_2 und construire über AB als Grundlinie das Dreieck ABC_3 mit den Schenkeln $AC_3 = AC_1$, $BC_3 = BC_2$.

2) Eine dreiseitige Pyramide aus ihren sechs Kanten AB, BC, CA, AO, BO, CO zu construiren. Die Betrachtung des vorigen Netzes giebt folgende Auflösung: man construirt zunächst das Dreieck AOB und über den Seiten desselben die Dreiecke aus den Seiten $AC_1 = AC$, $OC_1 = OC$, $BC_2 = BC$, $OC_2 = OC$, $AC_3 = AC_1$ und $BC_3 = BC_2$.

3) Eine dreiseitige Pyramide zu construiren, wenn ihre Basis und die Winkel A, B, C gegeben sind, welche die Grundfläche mit den nach der Spitze gehenden Seitenflächen einschliesst. Nennen wir ABC die Grundfläche, S die Spitze und denken uns die Seitenflächen ABS, BCS, CAS in die Ebene ABC umgelegt, so kommt die Spitze S in drei Lagen S_1, S_2, S_3 vor, und zwar so, dass $AS_2 = AS_3 = AS$, $BS_3 = BS_1 = BS$, $CS_1 = CS_2 = CS$ ist. Von dem dreiseitigen Körperwinkel bei C kennt man drei Bestandtheile, nämlich den Kantenwinkel $ACB = c$ und die anliegenden Neigungswinkel A, B; daraus lassen sich die beiden übrigen Kantenwinkel herleiten (No. 4 in den Constructionen zu Cap. II.) und man erhält dadurch $\angle ACS_2$ und $\angle BCS_1$. Durch wiederholte Anwendung derselben Construction ergeben sich die Kantenwinkel CBS_1 und ABS_3; das Dreieck BCS_1 ist jetzt aus einer Seite und den anliegenden Winkeln bestimmt, wegen $BS_3 = BS_1$ und $CS_2 = CS_1$ kennt man von den Dreiecken ABS_3 und ACS_2 jedesmal zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel und somit ist die Construction leicht zu beendigen.

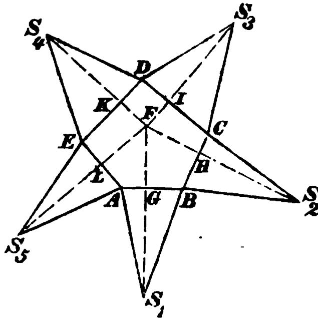
Fig. 42.



4) Eine n-seitige Pyramide zu construiren, wenn ihre Basis, eine nach der Spitze gehende Kante und der dreiseitige Körperwinkel gege-

ben sind, welchen jene Kante mit den sie schneidenden zwei Grundkanten bildet. Die Basis der Pyramide sei *ABCDE*, ihre Spitze *S*; denkt man sich von *S* auf *ABCDE* eine Senkrechte *SF* (die Höhe der Pyramide) construirt und von *F* auf die Kanten *AB*, *BC*, *CD*, *DE* die Perpendikel *FG*, *FH*, *FI*, *FK*, *FL* herabgelassen, so sind die Ebenen *SFG*, *SFH*, *SFI*, *SFK*, *SFL* normal zu den entsprechenden Kanten, und ebenso stehen die Geraden *SG*, *SH*, *SI*, *SK*, *SL* senkrecht auf den nämlichen Kanten.

Fig. 43.



Legt man eine der Seitenebenen, etwa *ABS*, in die Ebene der Basis nieder, indem man sie um *AB* dreht, so beschreibt die Spitze *S* einen Kreis, dessen Ebene normal zu *AB* und identisch mit der Ebene *SFG* ist; nach geschehener Umlegung fallen daher die Geraden *FG* und *SG* in eine Gerade FGS_1 zusammen, welche senkrecht auf *AB* steht. Dasselbe Verfahren kann man auf die übrigen Seitenflächen anwenden, die Spitze *S* erscheint dann in *n* verschiedenen Lagen S_1, S_2, S_3 etc. und zwar ist dabei einerseits $BS_1 = BS_2$, $CS_2 = CS_3$, $DS_3 = DS_4$ u. s. w., andererseits sind die Geraden FS_1, FS_2, FS_3 etc. senkrecht zu den entsprechenden Kanten *AB*, *BC*, *CD* etc. Kennt man nun die Basis *ABCDE*, die Länge einer Seitenkante *BS* und den Körperwinkel an *B*, so lassen sich zunächst die ausser $\angle ABC$ noch an *B* vorhandenen zwei Kantenwinkel *ABS* und *CBS* construiren, wenn sie nicht direct gegeben sein sollten; legt man sie an *AB* und *CB*, so dass $\angle ABS_1 = \angle ABS$, $\angle CBS_2 = \angle CBS$, und nimmt $BS_1 = BS_2 = BS$, so erhält man zunächst die Punkte S_1 und S_2 sowie die Seitenflächen ABS_1 und CBS_2. Um die übrigen Seitenflächen zu finden, lässt man von S_1 und S_2 auf *AB* und *CB* die Perpendikel S_1G und S_2H herab, deren Durchschnitt den Punkt *F* giebt; fällt man weiter von *F* auf *CD* die Senkrechte *FI* und durchschneidet sie

mit einem aus C mit dem Halbmesser CS_2 beschriebenen Bogen, so bestimmt sich der Punkt S_3, sowie die Seitenfläche CDS_3; die Senkrechte FK und ein aus D mit DS_3 beschriebener Bogen liefern dann S_4 u. s. w. Eine Constructionsprobe liegt darin, dass die letzte Kante der ersten, im vorliegenden Falle $AS_5 = AS_1$, sein muss.

5) Eine n-seitige Pyramide zu construiren, wenn ihre Basis, ihre Höhe h und der Fusspunkt der letzteren gegeben ist. Bei der vorigen Betrachtung war SF die Höhe der Pyramide und die Geraden SG, SH, SI ... stellten die Höhen der einzelnen dreieckigen Seitenflächen ABS, BCS, CDS ... dar; die Dreiecke SFG, SFH, SFI etc. sind sämmtlich bei F rechtwinklig und SG, SH, SI etc. die Hypotenusen derselben; man kann daher diese Linien construiren, wenn die allen Dreiecken gemeinsame Kathete SF und die Perpendikel FG, FH, FI etc. bekannt sind. Hieraus ergiebt sich folgende Construction: von dem gegebenen Fusspunkte F fälle man auf alle Seiten der gegebenen Basis $ABCDE$ die Senkrechten FG, FH, FI etc. und nehme auf den Verlängerungen derselben GS_1 gleich der Hypotenuse eines aus den Katheten h und FG gebildeten rechtwinkligen Dreiecks, HS_2 gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks aus den Katheten h und FH etc., S_1 verbinde man nachher mit A und B, eben so S_2 mit B und C etc. Eine Constructionsprobe liegt darin, dass $BS_1 = BS_2$, $CS_2 = CS_3$, $DS_3 = DS_4$ u. s. w. sein muss.

6) Das Netz des Tetraeders. Wenn eine Kante dieses regulären Körpers gegeben ist, so kennt man alle Kanten und erhält nun dadurch, dass man das Tetraeder als regelmässige dreiseitige Pyramide betrachtet und demgemäss die in No. 2 gegebene Construction für $AB = BC = CA = AO = BO = CO$ anwendet, sogleich die gesuchte Figur.

7) Das Netz des Würfels. Man denkt sich zunächst die Ebene $EFGH$ in die Ebene $EFBA$ gedreht und nachher die vier auf $ABCD$ senkrechten Ebenen in die Ebene von $ABCD$ umgelegt; die entstandene Figur ist das Netz und besteht aus sechs in Form eines Kreuzes anein-

anderliegenden Quadraten, deren Seiten der gegebenen Würfelkante gleich sind.

8) Das Netz des Oktaeders. Das Oktaeder lässt sich als Zusammensetzung zweier über derselben quadratischen Grundfläche nach entgegengesetzten Seiten hin construirten vierseitigen Pyramiden ansehen, deren Seitenflächen reguläre Dreiecke sind; das Netz für die Mantelfläche der einen Pyramide besteht daher aus vier gleichseitigen Dreiecken, welche fächerförmig nebeneinander gelegt sind. Zwei solcher Figuren geben das Netz des ganzen Körpers; will man dasselbe in einem Stücke haben, so braucht man die beiden Fächer nur so zu legen, dass eine Aussenkante des einen mit einer Aussenkante des anderen zusammenfällt, also die Mittelpunkte beider Fächer nach entgegengesetzten Seiten liegen.

9) Das Netz des Dodekaeders. Die eine Hälfte von der Oberfläche des Körpers besteht aus einer regelmässig fünfeckigen Basis, an welche sich fünf congruente Seitenflächen anlehnen; denkt man sich letztere in die Ebene der Basis niedergelegt, so erhält man das halbe Netz zusammengesetzt aus einem regulären Fünfeck, über dessen Seiten congruente regelmässige Fünfecke beschrieben sind. Zwei derartige sternförmige Figuren bilden das ganze Netz, welches man dadurch in zusammenhängender Gestalt bekommt, dass man eine Aussenkante der einen Figur mit einer Aussenkante der anderen zusammenfallen lässt.

10) Das Netz des Ikosaeders. Denkt man sich den Körper auf einer Spitze stehend (wie in der Figur zu §. 12), so darf man ihn als aus drei Haupttheilen zusammengesetzt ansehen; das Mittelstück enthält zehn gleichseitige Dreiecke und an demselben sind oben und unten zwei fünfseitige Pyramiden angefügt. Die Abwickelung des mittleren Theiles giebt ein Netz von zehn gleichseitigen Dreiecken, die so nebeneinander liegen, dass sie ein Parallelogramm ausfüllen, dessen längere Seite das Fünffache der kürzeren Seite ausmacht und mit ihr einen Winkel von 60° einschliesst. In die Ebene dieses Parallelogramms kann man die Seitenflächen der genannten zwei fünfseiti-

gen Pyramiden niederlegen, sie erscheinen dann als zehn gleichseitige Dreiecke, von denen fünf auf der einen und fünf auf der anderen von den beiden längeren Seiten des Parallelogramms aufgesetzt sind. Nach diesen Angaben wird man die Figur leicht entwerfen können.

Cap. IV.

Die Vergleichung und Ausmessung der Polyeder.

---

§. 13.

Die Oberflächen der Polyeder.

Da sämmtliche Begränzungsflächen eines Polyeders ebene Vielecke sind und die Fläche jedes derartigen Vielecks sehr leicht ermittelt werden kann, so hat es auch nicht die mindeste Schwierigkeit, die gesammte Oberfläche eines Polyeders zu bestimmen. Diess lässt sich auf zweierlei Weise erreichen, durch Construction und durch Rechnung. Will man das Erste, so braucht man nur das Netz des gegebenen Körpers zu entwerfen, und man gelangt hierzu im Allgemeinen dadurch, dass man das Polyeder als eine Zusammenstellung von Pyramiden betrachtet und die Seitenflächen der letzteren in eine Ebene ausbreitet. Die Fläche des Netzes, welches zum vorliegenden Zwecke nicht aus einem einzigen zusammenhängenden Figurencomplex zu bestehen braucht, ist dann der Oberfläche des Körpers gleich und kann nöthigenfalls zu einem einzigen Vielecke zusammengezogen werden (Thl. I. §. 13).

Will man sich der Rechnung bedienen, so müssen zunächst so viel Bestandtheile des Polyeders gemessen werden, dass jede Begränzungsfläche bestimmt ist, worauf man die früher zur Flächenberechnung der Vielecke gegebenen Formeln in Anwendung bringt. So ist z. B. ein Parallelepipedon, dessen Flächen- und Kantenwinkel sammt

und sonders rechte Winkel sind, durch seine drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten bestimmt; nennen wir letztere a, b, c, so besteht die gesuchte Oberfläche S zunächst aus drei Rechtecken mit den Seiten a und b, b und c, c und a, sowie aus drei ferneren, den genannten Rechtecken congruenten Begränzungsflächen; man hat daher

$$S = 2(ab + bc + ca).$$

Eine dreiseitige Pyramide ist durch ihre sechs Kanten bestimmt, die wir so bezeichnen wollen, dass a, b, c die in einer Ecke zusammenstossenden Kanten und a_1, b_1, c_1 die gegenüberliegenden Kanten bedeuten; die Oberfläche der Pyramide besteht aus vier Dreiecken, und wenn wir zur Abkürzung unter dem Symbol $\triangle(fgh)$ die Fläche eines aus den Seiten f, g, h construirten Dreiecks verstehen, so ist

$$S = \triangle(abc_1) + \triangle(bca_1) + \triangle(cab_1) + \triangle(a_1 b_1 c_1),$$

wo jeder Summand nach Formel 15) auf S. 75 des ersten Theiles bestimmt wird.

Die gesammte Oberfläche einer abgestumpften Pyramide besteht aus drei Hauptheilen, aus der Fläche der vieleckigen Basis, aus der Fläche der hierzu parallelen und ähnlichen Begränzungsebene, endlich aus den Flächen einer Reihe von Trapezen; hiernach ist die Berechnung der Oberfläche sehr leicht. Ebensowenig Schwierigkeiten bietet die Bestimmung der Oberfläche eines Prismatoides.

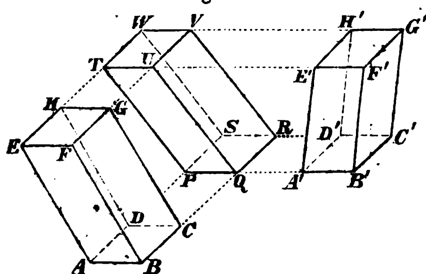
§. 14.

Vergleichung der Volumina von Parallelepipeden und Prismen.

Ueber zwei in einer Ebene liegenden congruenten Parallelogrammen $ABCD$ und $A'B'C'D'$, deren gleichnamige Seiten sich in paralleler Lage befinden, denken wir uns zwei Parallelepipede von gleichen Höhen errichtet; die den Grundflächen parallelen und gleichen Begränzungsflächen $EFGH$ und $E'F'G'H'$ liegen dann in einer Ebene; erweitern wir ferner die Ebenen $BCGF$, $ADHE$ und ebenso $A'B'F'E'$, $D'C'G'H'$ bis zu ihren gegenseitigen Durchschnitten, so entsteht ein neues Parallelepiped $PQRSTUVW$,

welches sich mit jedem der beiden ursprünglichen Parallelepipede vergleichen lässt. Das vierseitige Prisma, dessen Basis *APTE* und dessen Gegenfläche *BQUF* ist, kann nämlich mit dem vierseitigen Prisma, welches *DSWH* zur Basis und *CRVG* zur Gegenfläche hat, durch blosse Verschiebung zur Deckung gebracht werden; beide Prismen enthalten daher denselben körperlichen Raum, sie sind inhaltsgleich. Nimmt man von beiden das ihnen gemeinschaftliche Prisma weg, welches *DPTH* zur Basis und *CQUG* zur Gegenfläche hat, so bleiben gleiche Volumina übrig, diese sind aber nichts Anderes als die körperlichen Räume der Parallelepipede *ABCDEFGH* und *PQRSTUVW*; man hat daher Vol. *ABCDEFGH* = Vol. *PQRSTUVW*. Eine völlig analoge Betrachtung giebt zu erkennen, dass das Vol. *A'B'C'D'E'F'G'H'* wiederum = Vol. *PQRSTUVW* ist und es folgt daraus der Satz: **Parallelepipede von congruenten Grundflächen und gleichen Höhen besitzen gleiche Volumina.**

Fig. 44.



Denkt man sich durch die Geraden *AB*, *BC*, *CD*, *DA* Ebenen senkrecht zur Ebene des Parallelogrammes *ABCD* gestellt und schneidet dieselben durch eine Ebene, welche *ABCD* parallel in einer Entfernung gleich der Höhe des Parallelepipedes *ABCDEFGH* gelegt ist, so hat das neu entstandene Parallelepiped wieder dasselbe Volumen wie *ABCDEFGH*, unterscheidet sich aber dadurch, dass die Neigungswinkel seiner Seitenflächen gegen die Basis rechte Winkel sind; nennen wir ein solches Parallelepiped ein **gerades**, so können wir sagen: **Jedes schiefe Parallelepiped lässt sich in ein gerades von congruenter Basis, gleicher Höhe und gleichem Volumen verwandeln.**

Ueber dem Parallelogramme *ABCD* stehe ein gerades Parallelepiped von der Höhe *AH*, *BE* sei // *AF* und senk-

recht zu *CD*, über dem Rechtecke *ABEF* sei ein neues Parallelepiped von derselben Höhe *AH* construirt, so sind die

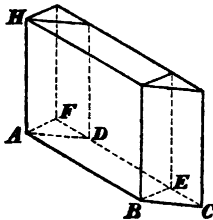


Fig. 45.

über den Dreiecken *BCE* und *ADF* stehenden dreiseitigen Prismen congruent und folglich von gleichem Inhalte; nimmt man von dem Parallelepipede über *ABCD* das erste jener Prismen weg und setzt dafür das zweite zu, so hat sich in dem Volumen nichts geändert, gleichzeitig ist aber aus dem einen Parallelepiped das andere geworden, d. h.: Jedes Parallelepiped kann in ein anderes mit rechteckförmiger Basis, von gleicher Höhe und gleichem Inhalte verwandelt werden.

Die vorige Bemerkung, dass gerade dreiseitige Prismen congruent sind, wenn sie über congruenten Grundflächen stehen und gleiche Höhe besitzen, führt noch einen Schritt weiter; zieht man nämlich durch einen Punkt *D* in der Diagonale *MN* eines Rechtecks *BMFN* Parallelen zu

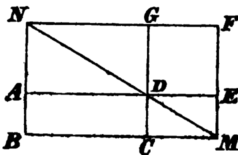


Fig. 46.

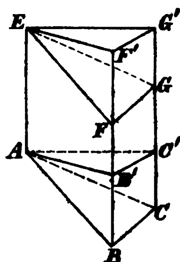
den Seiten des letzteren und construirt über den entstandenen Dreiecken Prismen von gleichen Höhen, so ist das Prisma über *ADN* congruent dem Prisma über *GND*, ebenso das Prisma über *CDM* congruent dem über *EDM*; nimmt man von dem über *BMFN* mit derselben Höhe construirten Parallelepipede einerseits die Prismen über *ADN* und *CDM*, andererseits die Prismen über *GDN* und *EDM* weg, so müssen über den Rechtecken *ABCD* und *DEFG* gleiche Volumina übrig bleiben, d. h.: Gerade Parallelepipede besitzen gleiche Volumina, wenn sie über flächengleichen Rechtecken mit denselben Höhen construirt sind.

Ist das Rechteck *ABCD* gegeben, so kann man bekanntlich die Figur so einrichten, dass *DEFG* zu einem Quadrate wird; diess giebt den Satz: Jedes beliebige Parallelepiped lässt sich schliesslich in ein an-

deres verwandeln, welches eine gleich grosse quadratische Basis und mit dem ersten gleiche Höhe und gleichen Inhalt besitzt.

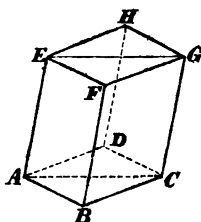
Die obigen Theoreme sind leicht auf dreiseitige Prismen zu übertragen, wenn man eine Vergleichung zwischen dem Inhalte eines Parallelepipedes und eines Prisma's anstellt. Zu diesem Zwecke denken wir uns vorerst durch die Endpunkte einer Kante *AE* des beliebigen schiefen Prisma's *ABCEFG* Normalebenen zu *AE* gelegt, welche die Kanten des Prisma's oder deren Verlängerungen in den Punkten *B'*, *C'*, *F'*, *G'* schneiden, und construiren das neue gerade Prisma *AB'C'EF'G'*. Die Entstehung des letzteren können wir uns auch so vorstellen, als ob von dem ursprünglichen Prisma die vierseitige Pyramide *ABCC'B'* weggenommen und nachher die vierseitige Pyramide *EFGG'F'* zugesetzt worden wäre; beide Pyramiden sind aber aus nahe liegenden Gründen congruent, mithin ist durch die genannten Operationen nichts an dem Volumen geändert worden, d. h. Prisma *ABCEFG* = Prisma *AB'C'EF'G'*.

Fig. 47.



Zerlegt man nun ein beliebiges schiefes Parallelepiped *ABCDEFGH* durch die Diagonalebene *ACGE* in zwei Theile, so sind letztere dreiseitige schiefe Prismen, die sich nicht unmittelbar vergleichen lassen, weil sie nicht zur Deckung gebracht werden können; dagegen ist aber die vorhin beschriebene Umwandlung auf jedes der beiden Prismen anwendbar und man erhält dadurch zwei gerade Prismen (*AB'C'EF'G'* und entsprechend *AD'C'EH'G'*), welche wirklich congruent und folglich von gleichem Volumen sind. Da nun das Letztere auch von den schiefen Prismen *ABCEFG* und *ADCEHG* gelten muss, so hat man den Satz: **Jedes dreiseitige Prisma kann als die Hälfte eines Parallelepipedes angesehen werden.**

Fig. 48.



Zufolge dieses Theorems gelten die für Parallelepipede aufgestellten Sätze auch für dreiseitige Prismen und dürfen noch auf beliebig vielseitige Prismen ausgedehnt werden, weil jedes vielseitige Prisma durch Diagonalebenen in dreiseitige Prismen zerlegt werden kann; das Endresultat dieser leichten Untersuchung besteht in dem allgemeinen Satze: Beliebig vielseitige Prismen von gleichen Höhen und inhaltsgleichen Grundflächen besitzen gleiche Volumina.*)

---

*) Dass sich vermittelst dieses Satzes jedes Prisma in ein inhaltsgleiches Prisma von gleicher Höhe und quadratischer Basis, d. h. in ein Parallelepiped, verwandeln lässt, ist im Raume eine ähnliche Erscheinung, wie die Transformation der Vielecke zu Rechtecken und Quadraten in der Ebene; wollte man diese Analogie weiter führen, so müsste man noch das rechtwinklige Parallelepiped in einen Würfel verwandeln und zuletzt einen Würfel construiren, der zwei gegebenen Würfeln zusammen an Inhalt gleich ist. Diese beiden Aufgaben, von denen die erste der Verwandelung des Rechtecks in ein Quadrat entsprechen und die zweite das stereometrische Seitenstück zum Pythagoräischen Satze sein würde, sind aber durch keine Construction lösbar, welche nur mit geraden Linien und Kreisen operirt; der Grund ergiebt sich aus §. 17. Sind nämlich a, b, c die Kanten des gegebenen rechtwinkligen Parallelepipedes und bezeichnet x die Kante des gesuchten Würfels, so ist für die erste Aufgabe

$$x^3 = abc \text{ oder } x = \sqrt[3]{abc};$$

für die zweite Aufgabe mögen a, b und z die Kanten der zwei gegebenen und des gesuchten Würfels bedeuten, es muss dann sein

$$z^3 = a^3 + b^3 \text{ oder } z = \sqrt[3]{a^3 + b^3};$$

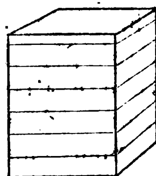
beide Aufgaben haben Das mit einander gemein, dass ihre Lösungen die Construction einer Cubikwurzel erfordern, da aber die auf S. 91 des ersten Theiles verzeichneten Constructionen, d. h. die Fundamente aller mit Geraden und Kreisen ausführbaren Constructionen, nur Quadratwurzeln enthalten, so reichen diese Constructionen zur Lösung der obigen Probleme nicht mehr hin, man würde im Gegentheile andere krumme Linien von minder einfachen Bildungsgesetzen zu Hülfe nehmen müssen. — Für $b = a$ wird die zweite Aufgabe zu dem historisch berühmt gewordenen Delischen Probleme von der Verdoppelung des Würfels.

§. 15.

Inhaltsbestimmung der Parallelepipede und Prismen.

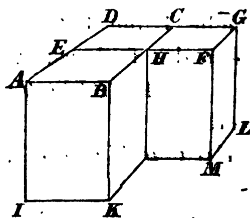
Wenn auf der Höhe eines rechtwinkligen Parallelepipedes mehrere gleiche Strecken nach einander aufgetragen sind und durch den Endpunkt jeder Strecke eine Parallelebene zur Basis gelegt wird, so zerfällt der Körper in eine Partie kleinerer Parallelepipede, unter denen alle diejenigen congruent, mithin auch gleichen Inhalts sind, deren Höhen jener Strecke gleich kommen; bleibt aber nach mehrmaliger Abtragung der erwähnten Strecke auf der Höhe ein Rest kleiner als die Strecke, so ist auch das zugehörige Parallelepiped von geringeren Volumen als die übrigen congruenten Parallelepipede. Hieraus folgt unmittelbar, dass zwei über derselben Basis errichtete rechtwinklige Parallelepipede sich ebenso oft von einander wegnehmen lassen wie ihre Höhen, dass folglich auf ihre Volumina ganz dieselben Operationen angewendet werden können, welche mit den Höhen vorgenommen werden müssen, wenn das Verhältniss der Höhen zu ermitteln ist (Thl. I. §§. 14 und 15). Da nun gleiche Operationen zu gleichen Resultaten führen, so muss das Verhältniss der Volumina beider Parallelepipede einerlei mit dem Verhältnisse ihrer Höhen sein, d. h.: Die Volumina zweier über derselben Grundfläche stehenden rechtwinkligen Parallelepipede verhalten sich wie die Höhen der Körper.

Fig. 49.



Wir betrachten ferner zwei Parallelepipede von gleichen Höhen aber verschiedenen Grundflächen *ABCD* und *DEFG*. Denken wir uns dieselben so aneinander gelegt, dass *DE* in *AD* und *DG* in *CD* fällt, so bilden die Durchschnitte der übrigen Seiten ein Rechteck *CDEH*, über welchem wir uns gleichfalls ein Parellelepiped von derselben Höhe construirt vorstellen. Der Kürze wegen heisse *P* das Vo-

Fig. 50.



lumen des mit der Basis $ABCD$ versehenen Parallelepipedes, Q das Volumen des Parallelepipedes mit der Basis $DEFG$ und R das Volumen des neuen Parallelepipedes. Nun lassen sich P und R als Volumina zweier über derselben Basis $ABKI$ mit den Höhen AD und ED construirten Parallelepipede ansehen und es ist daher nach dem Vorigen

$$P:R=AD:DE;$$

ferner können Q und R als Volumina zweier über der Basis $FGLM$ mit den Höhen DG und DC construirten Parallelepipede betrachtet werden, weshalb

$$Q:R=DG:DC:$$

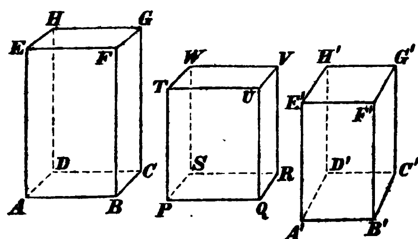
durch Verbindung beider Proportionen ergiebt sich:

$$P:Q=AD\,.\,DC:DE\,.\,DG,$$

d. h.: **Die Volumina zweier rechtwinkligen Parallelepipede von gleichen Höhen verhalten sich wie die Producte aus den die Grundflächen bestimmenden Seiten.**

Sind endlich zwei Parallelepipede $ABCDEFGH$ und $A'B'C'D'E'F'G'H'$ vorhanden, welche weder in den Grund-

Fig. 51.



flächen noch in den Höhen übereinstimmen, so kann man ein drittes Parallelepiped construiren, welches die Grundfläche von $ABCDEFGH$ zur Basis und mit $A'B'C'D'E'F'G'H'$ gleiche Höhe hat, und nun das neue Parallelepiped mit jedem der früheren vergleichen; es ist dann erstlich

$$ABCDEFGH:PQRSTUVW=AE:PT=AE:A'E',$$

zweitens

$$A'B'C'D'E'F'G'H':PQRSTUVW=A'B'\,.\,A'D':PQ\,.\,PS$$
$$=A'B'\,.\,A'D':AB\,.\,AD,$$

folglich durch Verbindung beider Proportionen

$$ABCDEFGH : A'B'C'D'E'F'G'H' = AB \,.\, AD \,.\, AE : A'B' \,.\, A'D' \,.\, A'E',$$

d. h.: Die Volumina zweier rechtwinkligen Parallelepipede verhalten sich wie die Producte den drei sie bestimmenden Kanten.

Unter der Ausmessung irgend eines Volumens versteht man die Ermittelung des Verhältnisses, in welchem dasselbe zu einem für immer bestimmten Volumen steht, und zwar ist letzteres das Volumen des aus der Längeneinheit construirten Würfels; dabei möge das Verhältniss irgend eines Volumens zu dem erwähnten Würfelvolumen (der sogenannten Volumeneinheit) die Inhaltszahl jenes ersten Volumens heissen. Für das rechtwinklige Parallelepiped wird sie durch den vorigen Satz bestimmt, wenn man $A'B' = A'D' = A'E'$ gleich der Längeneinheit nimmt; in der Gleichung

$$\frac{ABCDEFGH}{A'B'C'D'E'F'G'H'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AD}{A'D'} \cdot \frac{AE}{A'E'}$$

bedeutet dann der linker Hand befindliche Quotient das Verhältniss des Volumens $ABCDEFGH$ zur Volumeneinheit d. h. die Inhaltszahl des Parallelepipedes, welche P heissen möge; rechter Hand ist $\frac{AB}{A'B'}$ die Längenzahl der Geraden AB, welche mit a bezeichnet werden soll, ebenso $\frac{AD}{A'D'}$ die Längenzahl b von AD, und $\frac{AE}{A'E'}$ die Längenzahl c von AE; man hat jetzt

$$P = abc$$

d. h.: Die Inhaltszahl eines rechtwinkligen Parallelepipedes ist das Product aus den Längenzahlen seiner drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten.

Schreibt man $ab \,.\, c$ für abc, so bedeutet ab die Flächenzahl der Basis und dann lautet der Satz: Die Inhaltszahl eines rechtwinkligen Parallelepipedes ist das Product aus der Flächenzahl seiner Basis in die Längenzahl seiner Höhe.

Da jedes schiefe Prisma von beliebig vielen Seiten in

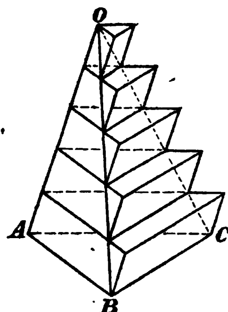
ein gerades dreiseitiges Prisma, und letzteres dadurch in ein rechtwinkliges Parallelepiped verwandelt werden kann, dass man die Basis des Prisma's in ein gleich grosses Rechteck umsetzt, so folgt aus dem vorigen Satze noch der allgemeinere: Die Inhaltszahl eines ganz beliebigen Prisma's ist das Product aus der Flächenzahl seiner Basis in die Längenzahl seiner Höhe.

§. 16.

Inhaltsbestimmung der Pyramiden.

Wir betrachten zunächst eine dreiseitige Pyramide *OABC*, deren Basis die Fläche g und deren Höhe die Länge h besitzen möge; die letztere sei in eine Anzahl, etwa n, gleicher Theile getheilt und durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel zur Basis *ABC* gelegt, so dass der Körper in eine Reihe abgestumpfter Pyramiden und in eine kleine ähnliche Pyramide zerfällt; die Flächen der einzelnen in den Höhen $\frac{h}{n}$, $2\frac{h}{n}$, $3\frac{h}{n}\ldots$ liegenden Schnitte sollen g_1, g_2, $g_3\ldots.$ heissen, wobei g_n ein blosser Punkt also $=0$ ist. Construiren wir nun Prismen, deren Grundflächen der Reihe nach g, g_1, $g_2\ldots.g_{n-1}$, deren gemeinsame Höhe $=\frac{h}{n}$ ist und deren parallele Kanten einer der Pyramidenkanten, etwa *OA* parallel laufen, so entsteht ein Körper mit treppenförmiger Begränzung, der die Pyramide umschliesst und folglich ein grösseres Volumen als letztere enthält; es ist daher, wenn P das Volumen der Pyramide heisst,

Fig. 52 a.



$$P < g\frac{h}{n} + g_1\frac{h}{n} + g_2\frac{h}{n} + \ldots + g_{n-1}\frac{h}{n}$$

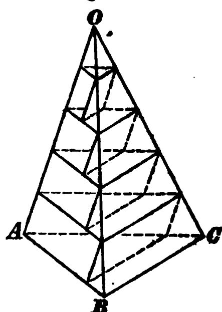
oder

$$P < (g + g_1 + g_2 + \ldots + g_{n-1})\frac{h}{n}.$$

Andererseits lässt sich ein ähnlicher Körper dadurch con-

struiren, dass man der Reihe nach $g_1, g_2 \ldots g_{n-1}, g_n$ als Grundflächen der Prismen nimmt, wobei das letzte dieser Prismen in einer blossen Geraden besteht, also keinen Inhalt besitzt; dieser zweite Körper ist gänzlich in der Pyramide enthalten, mithin von kleinerem Volumen, folglich

Fig. 52b.



$$P > g_1 \frac{h}{n} + g_2 \frac{h}{n} + g_3 \frac{h}{n} + \ldots + g_{n-1} \frac{h}{n}$$

oder

$$P > (g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_{n-1}) \frac{h}{n}.$$

Jeder der Schnitte $g_1, g_2 \ldots g_{n-1}$ ist aber ein der Basis ähnliches Dreieck und es verhalten sich die Flächen beider wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten oder auch wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze; man hat daher, wenn g_x irgend einen jener Schnitte bezeichnet,

$$g_x : g = \left(h - x \frac{h}{n}\right)^2 : h^2$$

woraus

$$g_x = \left(\frac{n - x}{n}\right)^2 g.$$

Die Einführung dieses Werthes (für $x = 1, 2, 3 \ldots n - 1$) verwandelt die obigen Ungleichungen in die folgenden

$$P < \frac{n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2}{n^3} gh$$

$$P > \frac{(n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \ldots + 1^2}{n^3} gh.$$

Die Differenz der rechts befindlichen Ausdrücke d. h. der Inhalte des umschriebenen und eingeschriebenen Körpers, ist $\frac{1}{n} gh$, mithin um so kleiner, je grösser n gewählt wird; lassen wir n unausgesetzt wachsen, so hat diese Differenz die Null zur Gränze, d. h. die Volumina des umschriebenen und des eingeschriebenen Körpers nähern sich einer und derselben Gränze, welche keine andere als das Volumen der Pyramide sein kann, weil dieses immer zwischen jenen enthalten bleibt. Man hat daher

$P =$ dem Gränzwerthe von $\frac{n^2+(n-1)^2+\ldots+2^2+1^2}{n^3}gh$

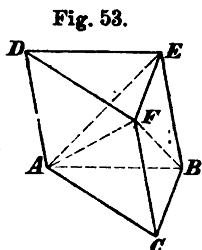
d. i. nach einem bekannten arithmetischen Satze*)

$$P = \tfrac{1}{3}gh,$$

oder in Worten: **Die Inhaltszahl einer dreiseitigen Pyramide ist der dritte Theil von dem Producte der Flächenzahl ihrer Basis in die Längenzahl ihrer Höhe.**

Hieraus folgt unmittelbar, dass alle dreiseitigen Pyramiden von inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen auch gleiche Volumina besitzen, ferner, dass das Volumen einer Pyramide als der dritte Theil von dem Volumen eines Prisma's betrachtet werden kann, welches dieselbe Basis und die nämliche Höhe besitzt. Dies lässt sich auch geometrisch nachweisen. Zieht man nämlich in dem Prisma *ABCDEF* die Diagonalen *AE*, *AF* und *BF*, so haben zunächst die Pyramiden *FABE* und *FADE* gleiche Grundflächen und Höhen; von diesen lässt sich die letztere als Pyramide *ADEF* betrachten und sie besitzt dann

Fig. 53.



---

*) Aus der Gleichung $(p+1)^3 - p^3 = 3p^2 + 3p + 1$ folgt zunächst
$$(p+1)^3 - p^3 > 3p^2;$$
weil ferner $p^3 - (p-1)^3 = 3p^2 - (3p-1)$, so ist für jedes mehr als $\frac{1}{3}$ betragende positive p auch $3p-1$ positiv, folglich
$$p^3 - (p-1)^3 < 3p^2;$$
stellt man beide Ungleichungen in der Form
$$(p+1)^3 - p^3 > 3p^2 > p^3 - (p-1)^3$$
zusammen, setzt der Reihe nach $p = 1, 2, 3 \ldots n$ und addirt alle so entstehenden Beziehungen, so folgt
$$(n+1)^3 - 1 > 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) > n^3$$
und durch Division mit $3n^3$
$$\tfrac{1}{3}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 - \frac{1}{n^3}\right] > \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3} > \tfrac{1}{3}.$$
Für unendlich wachsende n hat $\frac{1}{n}$ die Null zur Gränze, die beiden Grössen, zwischen denen der fragliche Quotient enthalten ist, fallen zusammen und es bleibt daher
$$\text{Gränzwerth von } \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3} = \tfrac{1}{3},$$
wovon oben Gebrauch gemacht wurde.

gleiche Höhe und Grundfläche mit *FABC*. Nennt man diese *ABCF*, so hat sie wieder gleiche Basis und Höhe mit *ABEF* oder *FABE*, d. h. mit der ersten von den genannten Pyramiden. Das Prisma *ABCDEF* zerfällt demnach in die mit gleichen Grundflächen und Höhen folglich auch inhaltsgleichen dreiseitigen Pyramiden *ABCF*, *ABEF* und *ADEF*.*)

Die Inhaltsbestimmung einer mehrseitigen Pyramide ist leicht auf die Inhaltsbestimmung der dreiseitigen Pyramide zurückzuführen, wenn man die vieleckige Basis in Dreiecke zerlegt und jedes Dreieck als Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide ansieht, deren Spitze mit der Spitze der vielseitigen Pyramide zusammenfällt. Nennen wir $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3 \ldots$ die Flächen der einzelnen Dreiecke, h die gemeinsame Höhe aller Pyramiden und P das Volumen der vielseitigen Pyramide, so ist

$$P = \tfrac{1}{3}\triangle_1 h + \tfrac{1}{3}\triangle_2 h + \tfrac{1}{3}\triangle_3 h + \ldots.$$

oder

$$P = \tfrac{1}{3}(\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 + \ldots.)\,h;$$

hier ist $\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 + \ldots$ gleich der Fläche der Basis, also wenn dieselbe g heisst

1) $$P = \tfrac{1}{3}gh.$$

Demnach ist die Inhaltszahl einer mehrseitigen Pyramide wiederum der dritte Theil von dem Producte aus der Flächenzahl ihrer Basis in die Längenzahl ihrer Höhe, und es knüpft sich daran die Folgerung, dass überhaupt Pyramiden von inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen gleiche Volumina besitzen.

Eine abgestumpfte Pyramide lässt sich als Differenz zweier Pyramiden ansehen und hiernach leicht ihr Inhalt

---

*) Wenn man den Satz, dass dreiseitige Pyramiden von inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen dasselbe Volumen besitzen, direct rein geometrisch beweisen könnte, so würde die obige Zerlegung des Prisma's zur Formel $P = \frac{1}{3}gh$ führen und es wäre dann der ganze Gedankengang analog dem bei Ausmessung des Parallelogrammes und Dreieckes eingeschlagenen Wege. Die Ausführung dieser Idee hat aber mit sehr grossen Schwierigkeiten zu kämpfen, da schon die Inhaltsgleichheit zweier symmetrisch gleichen Pyramiden rein geometrisch noch nicht nachgewiesen worden ist.

berechnen; heisst nämlich g die Basis und h die Höhe der grösseren Pyramide, und entsprechend g' die Basis und h' die Höhe der kleineren, so ist das gesuchte Volumen

$$S = \tfrac{1}{3}gh - \tfrac{1}{3}g'h' = \tfrac{1}{3}(gh - g'h').$$

Der Gebrauch dieser Formel setzt voraus, dass die Seitenflächen der abgestumpften Pyramide bis zu ihrem Zusammentreffen in der Spitze erweitert und die Höhen h, h' gemessen sind, was in den meisten Fällen unthunlich ist; hieraus entspringt die Nothwendigkeit, aus der obigen Formel die Grössen h, h' herauszuschaffen und dagegen die Entfernung der beiden parallelen Flächen g und g' einzuführen. Nennen wir k diesen Abstand, so ist einerseits

$$h - h' = k,$$

andererseits, weil sich die ähnlichen Flächen g und g' wie die Quadrate der Höhen h und h' verhalten,

$$h^2 : h'^2 = g : g',$$

oder nach Ausziehung der Wurzeln

$$\frac{h}{h'} = \sqrt{\frac{g}{g'}};$$

aus beiden Gleichungen zusammen ergeben sich die Werthe

$$h = \frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{g} - \sqrt{g'}}, \quad h' = \frac{k\sqrt{g'}}{\sqrt{g} - \sqrt{g'}}$$

und nunmehr findet sich mit Hülfe einer kleinen Reduction

2) $$S = \tfrac{1}{3}(g + \sqrt{gg'} + g')\,k;$$

hierin liegt folgender Satz: **Eine abgestumpfte Pyramide besitzt dasselbe Volumen wie eine volle Pyramide, deren Höhe dieselbe und deren Basis gleich ist der Summe von den Parallelflächen und dem geometrischen Mittel der Parallelflächen jener Pyramide.**

Die obige Formel gewinnt noch eine bessere Gestalt, wenn man den mittleren d. h. den in der Höhe $\tfrac{1}{2}k$ parallel zur Basis gelegten Querschnitt der abgestumpften Pyramide in Rechnung bringt. Wird nämlich wie vorhin die abgestumpfte Pyramide als Differenz zweier vollen Pyramiden aufgefasst, so liegt jener mittlere Querschnitt in der Entfernung $\tfrac{1}{2}(h + h')$ von der Spitze beider Pyramiden und daher gilt für seine Fläche f die Proportion

$$h^2 : \tfrac{1}{4}(h + h')^2 = g : f,$$

woraus folgt
$$f = \frac{g(h+h')^2}{4h^2}.$$
Nach Substitution der vorigen Werthe von h und h' erhält man
$$f = \tfrac{1}{4}(\sqrt{g}+\sqrt{g'})^2 = \tfrac{1}{4}(g+g'+2\sqrt{gg'})$$
und umgekehrt
$$\sqrt{gg'} = 2f - \tfrac{1}{2}(g+g').$$
Setzt man dies in die Formel 2) ein, so wird

3) $$S = \tfrac{1}{3}[2f + \tfrac{1}{2}(g+g')]\,k,$$

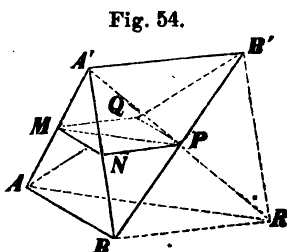
d. h.: Eine abgestumpfte Pyramide besitzt dasselbe Volumen wie zusammen zwei volle Pyramiden, von denen die eine den doppelten mittleren Querschnitt, die andere das arithmetische Mittel der Grundflächen zur Basis hat, und deren gemeinschaftliche Höhe gleich der Höhe der abgestumpften Pyramide ist.

§. 17.

Inhaltsbestimmung des Prismatoides.

Das einfachste aller Prismatoide ist die dreiseitige Pyramide, und zwar lässt sich letztere auf zweierlei Weise als Prismatoid betrachten, indem man entweder für die eine Parallelfläche ein Dreieck und für die andere einen Punkt setzt, oder indem zwei sich kreuzende Gerade AB und $A'B'$ als Parallelflächen nimmt und sie durch die vier Ebenen ABA', ABB', $A'B'A$, $A'B'B$ verbindet. Unter dem letzteren Gesichtspunkte wollen wir noch einmal das Volumen des Tetraeders $ABA'B'$ betrachten.

Fig. 54.



Eine durch die Mitte M der Kante AA' parallel zu den sich kreuzenden Geraden AB und $A'B'$ gelegte Ebene schneidet das Tetraeder in dem Vierecke $MNPQ$, wovon die Seiten MN und PQ parallel zu AB und die übrigen Seiten parallel zu $A'B'$ sind; der mittlere Querschnitt ist also ein Parallelogramm, dessen Fläche f heissen möge. Ergänzt man ferner die Seitenfläche $A'B'B$ zu dem Parallelogramme $A'BRB'$ und zieht die Geraden AR und

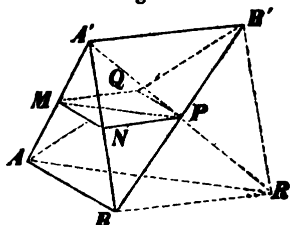


Fig. 54.

$A'R$, welche letztere durch den Mittelpunkt P der Kante BB' geht, so ist die Ebene ABR parallel dem Querschnitte $MNPQ$ und die Ebene ABA' parallel der Geraden $B'R$. Man kann jetzt das Dreieck ABA' als gemeinschaftliche Basis der Tetraeder $ABA'B'$ und $ABA'R$ ansehen; die Spitzen derselben liegen in einer Parallelen zur Basis, mithin ist das Volumen von $ABA'B'$ gleich dem Volumen von $ABA'R$. In dem letzteren Tetraeder lässt sich auch ABR als Basis, A' als Spitze betrachten, und wenn man die Höhe dieser Pyramide mit h bezeichnet, so hat man

$$\text{Tetr. } ABA'B' = \text{Tetr. } ABA'R = \tfrac{1}{3}\triangle ABR \,.\, h.$$

Ferner bildet das Dreieck MNP den mittleren Querschnitt der Pyramide $ABRA'$, daher ist $\triangle ABR = 4 \,.\, \triangle MNP$, d. h. $=$ dem doppelten Parallelogramme $MNPQ$ und nach dem Vorigen

$$\text{Tetr. } ABA'B' = \tfrac{2}{3} f h.$$

Beachtet man endlich, dass h den kürzesten Abstand der Geraden AB und $A'B'$ darstellt, so hat man den Satz: **Jedes Tetraedervolumen ist gleich dem doppelten vom Inhalte einer Pyramide, deren Basis die Halbirungspunkte von vier Kanten zu Ecken hat und deren Höhe durch den kürzesten Abstand der beiden übrigen Kanten gemessen wird.**

Nach dieser Vorbereitung gehen wir an die eigentliche Aufgabe und nennen g den Flächeninhalt der Basis $ABCD\ldots$ eines Prismatoides, g' den Inhalt der Parallelfläche $A'B'C'D'\ldots$, ferner f den Inhalt des mittleren d. h. durch die Mitten von AA', $A'B$, $A'C$ u. s. w. gelegten Querschnittes, endlich h die Höhe des Körpers, nämlich den Abstand der Ebenen $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$ Wählt man innerhalb der Grundfläche $ABCD\ldots$, die als Vieleck mit nur concaven Winkeln vorausgesetzt wird, den Punkt O beliebig, verbindet ihn

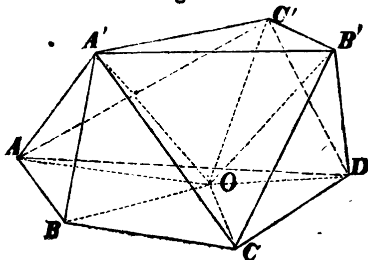


Fig. 55.

mit allen Ecken des Körpers durch Gerade und legt Ebenen durch je zwei in O zusammentreffende Gerade, so zerfällt das Prismatoid in Theile, die sich folgendermaassen gruppiren lassen. Es entsteht zunächst eine mehrseitige Pyramide, deren Basis das Vieleck $A'B'C'$.. und deren Spitze O ist; ihr Volumen stellen wir in der Form

$$\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}g' + 2 \cdot \tfrac{1}{4}g')\,h$$

dar, wobei $\frac{1}{4}g'$ den mittleren Querschnitt dieser Pyramide bedeutet. Ferner bilden die Dreiecke ABO, BCO u. s. w. die Grundflächen von eben so viel dreiseitigen Pyramiden, deren Spitzen in A', B' u. s. w. liegen; diese Pyramiden sind $ABOA'$, $BCOA'$, $CODB'$ u. s. w. und die Summe ihrer Inhalte ist

$$\tfrac{1}{3}(\triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COD + \ldots)\,h = \tfrac{1}{3}gh$$
$$= \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}g + 2 \cdot \tfrac{1}{4}g)\,h,$$

wobei $\frac{1}{4}g$ die Summe der mittleren Querschnitte aller genannten dreiseitigen Pyramiden bedeutet. Endlich ist noch eine Reihe von Tetraedern vorhanden, deren obere Kanten die Seiten $A'B'$, $B'C'$ u. s. w. sind und deren untere Kanten in die Fläche $ABCD\ldots$ fallen, nämlich die Tetraeder $COA'B'$, $DOB'C'$, $AOC'A'$ u. s. w.; bezeichnen wir die Inhalte ihrer mittleren Querschnitte mit f_1, f_2, f_3 u. s. w., so erhalten wir nach dem vorigen Satze als Summe ihrer Volumina

$$\tfrac{2}{3}(f_1 + f_2 + f_3 + \ldots.)\,h.$$

Die genannten drei Gruppen von Körpern liefern zusammen den Inhalt des Prismatoides, welcher P heissen möge:

$$P = \tfrac{1}{3}\left\{\tfrac{1}{2}(g + g') + 2\,(\tfrac{1}{4}g + \tfrac{1}{4}g' + f_1 + f_2 + \ldots)\right\}h.$$

Die mittleren Querschnitte $\frac{1}{4}g$, $\frac{1}{4}g'$, f_1, f_2, ... füllen zusammen den mittleren Querschnitt f des Prismatoides, daher ist einfach

$$P = \tfrac{1}{3}\left\{2f + \tfrac{1}{2}(g + g')\right\}h,$$

d. h.: Das Volumen des Prismatoides kann als die Summe von den Inhalten zweier eben so hohen Pyramiden betrachtet werden; die eine hat das Doppelte des mittleren Querschnittes zur Basis, die Grundfläche der anderen ist das arithmetische Mittel aus den Parallelflächen des Prismatoides.

Wenn das Vieleck $ABCD\ldots$ convexe Winkel enthält, so kann es sich treffen, dass nicht alle Verbindungslinien AO, BO, CO u. s. w. in das Innere des genannten Polygones fallen und dann hört die Anwendbarkeit der vorigen Betrachtung auf. Jedenfalls lässt sich aber ein solches Prismatoid durch passend gelegte Ebenen, welche beide Parallelflächen schneiden, in einzelne Prismatoide zerlegen, deren Grundflächen nur concave Winkel haben; der vorige Satz gilt dann für jedes einzelne derartige Prismatoid, mithin auch für deren Summe, wie eine sehr einfache Ueberlegung zeigt.

Als Beispiel diene der Fall, wo $ABCD$ und $A'B'C'D'$ Rechtecke sind und zwar in solcher Lage, dass die gleichnamigen Seiten $AB = a$ und $A'B' = a'$, sowie $BC = b$ und $B'C' = b'$ einander parallel laufen. Der mittlere Querschnitt dieses Körpers (eines sogenannten Ponton's) ist ein Rechteck aus den Seiten $\frac{1}{2}(a+a')$ und $\frac{1}{2}(b+b')$ mithin $f = \frac{1}{4}(a+a')(b+b')$ und

$$P = \tfrac{1}{3}\left\{\tfrac{1}{2}(a+a')(b+b') + \tfrac{1}{2}(ab+a'b')\right\} h$$
$$= \tfrac{1}{6}\left\{a(2b+b') + a'(b+2b')\right\} h.$$

Aehnliche Beispiele wird man ohne Mühe selbst entwickeln können.

§. 18.

Inhaltsbestimmung der Polyeder.

Zerlegt man ein Polyeder durch Diagonalebenen in dreiseitige Pyramiden, oder, wenn dies möglich ist, in Prismatoide und Pyramiden, so lässt sich nach dem Vorigen der Rauminhalt jedes einzelnen Theiles finden, und die Summe aller dieser Volumina giebt dann das Volumen des ganzen Körpers. Dieses Verfahren ist so einfach, dass es keiner weiteren Erläuterung bedarf. Auch liesse sich zuletzt das Polyeder in einen inhaltsgleichen Würfel verwandeln; ist nämlich P die Inhaltszahl des Polyeders und x die Längenzahl des gesuchten Würfels, so muss $x^3 = P$ sein und hieraus kann x nach der Formel $x = \sqrt[3]{P}$ berechnet werden.

Einer Erwähnung bedürfen noch die symmetrischen und die ähnlichen Polyeder. Da das Volumen einer Py-

ramide nur von ihrer Höhe und dem Flächeninhalte ihrer Basis abhängt, wie auch letztere gestaltet sein möge, so folgt augenblicklich, dass symmetrisch gleiche Pyramiden die nämlichen Volumina besitzen; ebendeshalb sind auch die Theile inhaltsgleich, in welche zwei symmetrische Polyeder zerlegt werden können, d. h.: Symmetrischgleiche Polyeder haben gleiche Volumina.

Für zwei dreiseitige Pyramiden mit den Grundflächen g und g', den Höhen h und h' und den Inhalten P und P' ist

$$P : P' = gh : g'h',$$

und wenn dieselben ähnlich sind, so hat man zugleich

$$g : g' = h^2 : h'^2,$$

folglich durch Substitution dieses Verhältnisses

$$P : P' = h^3 : h'^3.$$

Statt des Verhältnisses der Höhen kann man wegen der Aehnlichkeit beider dreiseitigen Pyramiden das Verhältniss zweier ähnlich liegenden Kanten a und a' substituiren und dann ist auch

$$P : P' = a^3 : a'^3.$$

Der hierin liegende Satz, dass sich die Volumina zweier ähnlichen dreiseitigen Pyramiden wie die Würfel zweier entsprechenden Kanten verhalten, lässt sich sogleich auf ähnliche Polyeder übertragen, wenn man ähnliche Polyeder als solche definirt, deren Grundflächen ähnlich sind und deren ausserhalb der Grundflächen befindliche Ecken durch ähnliche liegende dreiseitige Pyramiden bestimmt werden. Man bemerkt sehr leicht, dass vermöge dieser Definition je zwei gleichnamige Kanten a und a', b und b' u. s. w. immer in demselben Verhältnisse zu einander stehen, dass also auch

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^3 = \left(\frac{b}{b'}\right)^3 = \left(\frac{c}{c'}\right)^3 \cdots$$

sein muss. Nennen wir ferner P_1, P_2, $P_3 \ldots$ die Volumina der dreiseitigen Pyramiden, durch welche die Ecken des ersten Polyeders der Reihe nach bestimmt werden und bezeichnen wir mit P'_1, P'_2, $P'_3 \ldots$ die entsprechenden Theile des zweiten Polyeders, so ist nach dem Vorigen

$$\frac{P_1}{P'_1} = \frac{P_2}{P'_2} = \frac{P_3}{P'_3} \cdots = \left(\frac{a}{a'}\right)^3,$$

es ergeben sich daraus die Beziehungen

$$P_1 = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 P'_1, \quad P_2 = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 P'_2, \quad P_3 = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 P'_3 \ldots,$$

oder durch Addition und Division mit $P'_1 + P'_2 + P'_3 + \ldots$

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots}{P'_1 + P'_2 + P'_3 + \ldots} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2,$$

Die im Zähler stehende Summe ist das Gesammtvolumen des ersten Polyeders, welches P heissen möge, im Nenner kommt das Volumen P' des zweiten Polyeders vor, man hat daher

$$\frac{P}{P'} = \frac{a^3}{a'^3} \text{ oder } P : P' = a^3 : a'^3,$$

d. h.: **Die Volumina zweier ähnlichen Polyeder verhalten sich wie die Würfel zweier entsprechenden Kanten.**

DRITTES BUCH.

Die runden Flächen und Körper.

Cap. V.

Die Gestalten der runden Flächen und Körper.

---

§. 19.

Die Kugelfläche.

Wenn sich eine Gerade von unveränderlicher Länge um ihren als fest gedachten Anfangspunkt so herumdreht, dass sie successiv alle im Raume möglichen Richtungen annimmt, so beschreibt ihr Endpunkt eine Fläche, deren Punkte von jenem festen Punkte gleich weit entfernt sind; die so entstandene Fläche heisst eine Kugelfläche, der feste Punkt ihr Mittelpunkt (Centrum) und die der Länge nach unveränderliche Gerade ihr Halbmesser (Radius); durch letzteren ist die Kugelfläche bestimmt. Die nämliche Fläche entsteht auch, wenn ein Halbkreis so lange um seinen Durchmesser herumgedreht wird, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage kommt; es ist in diesem Falle der Umfang des Halbkreises, welcher die Kugelfläche beschreibt.

Da sich, der obigen Erklärung zufolge, vom Mittelpunkte aus nach allen möglichen Richtungen Radien ziehen lassen, so giebt es zu jedem beliebigen Halbmesser einen

anderen, welcher mit ihm in einer Geraden, aber entgegengesetzt liegt; zwei solcher Halbmesser bilden zusammen einen Durchmesser; alle Durchmesser sind demnach gleich gross, gehen durch den Mittelpunkt und werden von diesem halbirt.

Die letztere Bemerkung zeigt, dass die Kugelfläche eine geschlossene, d. h. eine solche Fläche ist, welche einen bestimmten endlichen Raum umschliesst; man nennt ihn den Kugelraum, oft kurz auch nur die Kugel schlechthin. Aus dieser Eigenschaft folgt weiter, dass die Kugelfläche keine ebene Fläche sein kann, ob aber nicht einzelne Theile von ihr eben sind, bedarf noch der Untersuchung. Wäre nun irgend ein Stück der Kugelfläche eben, so würde man in dieser Ebene eine Gerade ziehen, auf letzterer drei willkührliche Punkte A, B, C wählen und die Gerade ABC mit dem Kugelcentrum O durch eine Ebene verbinden können; man hätte dann in einer Ebene drei auf einer Geraden liegende Punkte, die von einem vierten derselben Ebene angehörigen Punkte O gleichweit (um $AO = BO = CO$) entfernt wären. Hieraus erkennt man die Unmöglichkeit, eine Gerade in der Kugelfläche zu ziehen, woraus weiter folgt, das letztere durchaus gekrümmt ist.

Ein Punkt kann in Beziehung auf eine Kugelfläche drei verschiedene Lagen haben; er liegt nämlich entweder in dem von der Kugelfläche umschlossenen Raume, oder auf der Oberfläche desselben, oder endlich ausserhalb jenes Raumes; von diesen Fällen findet der erste, zweite oder dritte statt, je nachdem die Entfernung des Punktes vom Kugelcentrum kleiner, ebenso gross, oder grösser als der Kugelhalbmesser ist.

Die Kugelfläche und die Gerade. Zieht man durch einen im Innern der Kugel befindlichen Punkt eine Gerade, so muss diese die Kugelfläche mindestens zweimal schneiden, beim Eintritte in und beim Austritte aus jenem geschlossenen Raume; wäre ausser diesen Durchschnitten welche A und B heissen mögen, noch ein dritter der Geraden und der Kugelfläche gemeinsamer Punkt C vorhanden, so müssten die Endpunkte der Radien OA, OB, OC in einer Geraden liegen, was nach dem Vorigen unmöglich

ist; d. h.: **Eine Gerade kann mit einer Kugelfläche höchstens zwei Punkte gemein haben.** Eine derartige, die Kugelfläche in zwei Punkten A und B schneidenden Gerade heisst eine Secante der Kugel, das zwischen A und B liegende Stück derselben eine Kugelsehne. Denkt man sich vom Kugelmittelpunkte O eine Senkrechte ON auf die Sehne AB herabgelassen, so entstehen zwei Dreiecke AON und BON, welche vermöge der Uebereinstimmung in zwei Seiten und einem Winkel ($AO = BO$, $ON = ON$, $\angle ANO = \angle BNO = 90^{\circ}$) congruent sind; man hat daher unter Benutzung des Pythagoräischen Satzes

$$AB = 2 \,.\, AN = 2\sqrt{(\overline{AO}^2 - \overline{ON}^2)}$$

oder für $AB = a$, $OA = r$, $ON = c$

$$a = 2\sqrt{r^2 - c^2}.$$

Die Zunahme von c bedingt hier die Abnahme von a, d. h.: **Der Durchmesser ist die grösste Sehne und die Sehnen werden um so kleiner, je weiter sie vom Mittelpunkte entfernt sind.**

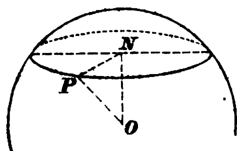
Lässt man c in r übergehen, indem man die Sehne parallel ihrer ursprünglichen Lage verschiebt, so fallen die Punkte A und B zusammen und man erhält dann eine Gerade, welche nur einen Punkt mit der Kugelfläche gemein hat; eine solche Gerade heisst eine Tangente an der Kugelfläche und der Punkt, welchen sie mit letzterer gemein hat, ihr Berührungspunkt. Ist nun ST eine solche Tangente und P ihr Berührungspunkt, so liegt kein Punkt von ST innerhalb der Kugel (weil sonst die Gerade zwei Punkte mit der Kugel gemein haben müsste), P liegt auf der Kugel und jeder andere Punkt Q von ST ausserhalb; es ist daher für jeden von P verschiedenen Punkt Q die Entfernung $OQ > OP$, mithin OP der kleinste Abstand des Mittelpunktes von der Tangente; man schliesst daraus den Satz: **Der nach dem Berührungspunkte einer Tangente gezogene Halbmesser steht senkrecht auf der Tangente.**

Denkt man sich durch einen Punkt T an eine und dieselbe Kugelfläche zwei Tangenten gezogen, deren Berührungspunkte P und P' heissen mögen, so stimmen die

Dreiecke TPO und $TP'O$ in zwei Seiten und einem Winkel überein ($TO = TO$, $OP = OP'$, $\angle OPT = \angle OP'T = 90^0$), daraus folgt ihre Congruenz und $TP = TP'$, d. h.: Alle von einem Punkte an eine Kugelfläche gelegten Tangenten sind gleich gross.

Die Kugelfläche und die Ebene. Legt man durch einen im Innern einer Kugel befindlichen Punkt eine Ebene, so muss diese die Kugelfläche in einer geschlossenen Linie schneiden; ein Punkt dieser Durchschnittslinie sei P, der Mittelpunkt der Kugel heisse O und von ihm aus sei die Senkrechte $ON = c$ auf die schneidende Ebene gefällt; zieht man noch $OP = r$ und NP, so ist in dem bei N rechtwinkligen Dreiecke ONP

Fig. 56.



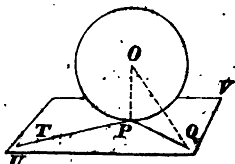
$$NP = \sqrt{r^2 - c^2},$$

also NP von unveränderlicher Länge, wo auch P auf der Durchschnittslinie gewählt sein möge. Hieraus folgt, dass letztere ein aus dem Mittelpunkte N mit dem Halbmesser $\sqrt{r^2 - c^2}$ beschriebener Kreis sein muss; man nennt denselben einen Kugelkreis. Diess giebt den Satz: Jeder ebene Schnitt einer Kugel ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt durch ein vom Kugelcentrum auf die Schnittebene herabgelassenes Perpendikel bestimmt wird. Durch Umkehrung der vorigen Betrachtung gelangt man leicht noch zu den folgenden Sätzen: Die Verbindungslinie eines Kugelkreismittelpunktes und des Kugelcentrums steht senkrecht auf der Schnittebene; eine im Mittelpunkte eines Kugelkreises auf der Ebene desselben errichtete Normale geht, hinreichend verlängert, durch das Kugelcentrum; errichtet man in den Mittelpunkten zweier nicht parallelen Kugelkreise Normalen auf deren Ebenen, so schneiden sich diese Geraden im Kugelmittelpunkte.

Der Halbmesser $\sqrt{r^2 - c^2}$ des in der Entfernung c liegenden Kugelhalbkreises wird am grössten für $c = 0$, d. h. wenn die schneidende Ebene durch das Kugelcentrum

geht; ein solcher Kreis heisst ein grösster Kugelkreis. Lässt man die schneidende Ebene sich mehr und mehr von dem Kugelmittelpunkte entfernen, also c wachsen, so wird der Halbmesser $\sqrt{r^2 - c^2}$ immer kleiner und geht für $c = r$ in Null über. In dieser Lage hat die Ebene nur einen Punkt mit der Kugelfläche gemein, sie heisst dann eine Berührungsebene (Tangentialebene) der Kugelfläche und der gemeinschaftliche Punkt ist ihr Berührungspunkt. Ist nun UV eine solche Ebene und P ihr Berührungspunkt, so liegt kein Punkt der Ebene innerhalb der Kugel (weil sonst Ebene und Kugel sich in einem Kreise schneiden müssten), P liegt auf der Kugel und jeder andere Punkt der Ebene ausserhalb; es ist daher für jeden von P verschiedenen Punkt Q der Ebene UV die Entfernung $OQ > OP$, mithin OP der kleinste Abstand des Mittelpunktes O von der Ebene UV, d. h.: Der nach dem Berührungspunkte einer Tangentialebene gezogene Kugelhalbmesser steht senkrecht auf der Berührungsebene. Durch Umkehrung dieser Betrachtung erhält man noch folgende Sätze: Die Verbindungslinie des Berührungspunktes und Kugelmittelpunktes steht senkrecht auf der Tangentialebene; eine im Berührungspunkte einer Tangentialebene auf letzterer errichtete Normale geht, hinreichend verlängert, durch den Mittelpunkt der Kugel; errichtet man in den Berührungspunkten zweier nicht parallelen Berührungsebenen Normalen auf denselben, so schneiden sich diese Geraden im Kugelmittelpunkte.

Fig. 57.



Man kann sich die Berührungsebene auch auf die Weise entstanden denken, dass man erst eine Tangente PT an die Kugel gelegt und darauf den rechten Winkel OPT um OP herumgedreht hat; in der That kann nämlich jede in der Ebene UV durch P gelegte Gerade PT nur einen Punkt mit der Kugel gemein haben, weil im Gegenfalle die Ebene UV mehr als einen Punkt mit der Kugel gemein haben müsste; diess lässt sich so ausdrücken, dass man

sagt: Die Berührungsebene an einer Kugel ist der Inbegriff aller durch ihren Berührungspunkt möglichen Tangenten an der Fläche.

Wir erwähnen noch einige Benennungen, welche hauptsächlich für den Fall gelten, wo man sich die Kugelfläche durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser entstanden denkt. Der feste Durchmesser heisst dann die Achse der Kugel, ihre Endpunkte werden die Pole genannt; jeder grösste Kreis, dessen Ebene die Achse in sich enthält, führt den Namen Meridian, jeder Kugelkreis, dessen Ebene senkrecht zur Achse ist, heisst Parallelkreis und der grösste aller Parallelkreise der Aequator. Die zwei Theile, in welche die Kugelfläche durch irgend einen Parallelkreis zerlegt wird, werden Kugelkappen (Calotten) genannt; das zwischen einem Parallelkreise und einer der zugehörigen Kappen enthaltene Volumen heisst ein Kugelabschnitt, (Kugelsegment). Zwei Parallelkreise begränzen ein Stück der Kugelfläche, eine sogenannte Kugelzone, das zwischen ihr und den beiden Parallelkreisen enthaltene Volumen heisst eine Kugelschicht. Dreht man statt eines Halbkreises nur einen Kreisausschnitt um einen seiner Radien, so beschreibt der Bogen ein von einem Parallelkreise begränztes Stück der Kugelfläche (eine Kappe), das ganze entstandene Volumen ist ein sogenannter Kugelausschnitt oder Kugelsector.

§. 20.

Zwei Kugelflächen.

Verbindet man die Mittelpunkte zweier Kugelflächen durch eine Gerade und legt durch diese eine beliebige Ebene, so schneidet letztere die beiden Flächen in grössten Kreisen; umgekehrt kann man sich jede zwei Kugelflächen dadurch erzeugt denken, dass zwei in einer Ebene liegende Kreise gleichzeitig um ihre Centrale gedreht worden sind. Vermöge dieser Bemerkung ist es äusserst leicht, die für zwei Kreise geltenden Sätze auf Kugelflächen zu übertragen und man gelangt dabei zu den folgenden Resultaten,

in welchen r und ϱ die Radien der beiden Kugeln und e die Entfernung ihrer Mittelpunkte bezeichnet.

Ist $r - \varrho > e$, so liegt die eine Kugelfläche ganz innerhalb der anderen, so dass beide keinen Punkt mit einander gemein haben; für $r + \varrho < e$ liegen beide Flächen, gleichfalls ohne einen gemeinschaftlichen Punkt, ausser einander.

Ist entweder $r - \varrho = e$ oder $r + \varrho = e$, so berühren sich beide Kugelflächen, im ersten Falle von Innen, im zweiten von Aussen; sie haben dann einen, aber keinen weiteren Punkt mit einander gemein.

Ist endlich entweder $r - \varrho < e$ oder $r + \varrho > e$, so schneiden sich beide Kugelflächen und zwar in einem Kreise; die gemeinschaftliche Sehne beider rotirenden Kreise steht nämlich senkrecht auf der Centrale und beschreibt daher eine zu dieser Geraden normale Ebene; die Endpunkte der Sehne durchlaufen dabei in jener Ebene einen und denselben Kreis, dessen Durchmesser die Sehne ist.

§. 21.

Figuren auf der Kugelfläche.

Analog der Planimetrie, welche die in einer Ebene construirten Gebilde unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet, lässt sich eine Theorie der auf einer Kugelfläche gezeichneten Figuren, der sogenannten **sphärischen Figuren**, aufstellen; dass eine solche **Sphärik** bei nur einiger Ausführlichkeit sehr umfänglich werden muss, begreift sich leicht, und wir beschränken uns daher auf die Grundzüge derselben, wobei wir, wenn es nicht anders bemerkt wird, immer voraussetzen, dass alle auf der Kugelfläche gezogenen Linien **grösste** Kreise sind.

Zwei grösste Kreise schneiden sich in zwei Punkten und zerlegen die Kugelfläche in vier Stücke, von denen jedes ein **Kugelzweieck** heisst. Je zwei einander gegenüberliegende sphärische Zweiecke sind congruent; zwei neben einander liegende füllen zusammen eine Halbkugel aus. Drei grösste Kreise bilden zusammen sechs Durchschnitte und zerfällen die Kugelfläche in acht Stücke, von

denen jedes ein sphärisches Dreieck genannt wird; man bringt dieselben am einfachsten dadurch zur Anschauung, dass man aus der Spitze einer dreiseitigen Ecke, als Mittelpunkt genommen, mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugelfläche beschreibt, welche die Seitenebenen der Ecke in grössten Kreisen schneidet. Dem analog versteht man unter einem sphärischen Vieleck ein von beliebig viel Bögen grösster Kreise begränztes Stück der Kugelfläche; man kann dasselbe dadurch entstehen lassen, dass man aus der Spitze einer mehrseitigen Ecke mit irgend einem Halbmesser eine Kugelfläche beschreibt, welche die Seitenebenen der Ecke in grössten Kreisen schneidet. Die einzelnen, das sphärische Vieleck begränzenden Bögen sind dessen Seiten, die Neigungswinkel der Seitenebenen heissen seine sphärischen Winkel oder nur kurz seine Winkel. Will man sich nicht erst die Seitenebenen (die Ebenen der die Seiten liefernden grössten Kreise) und deren Neigungswinkel construirt denken, so kann man die sphärischen Winkel auch dadurch anschaulich machen, dass man an den Ecken des sphärischen Vielecks Tangenten an die Seiten legt, wobei jedoch diese Tangenten in die Ebenen der Seiten fallen müssen; die Winkel zwischen je zwei solchen Tangenten sind dann die gesuchten Neigungs- oder sphärischen Winkel.

Vermöge des angegebenen genauen Zusammenhanges zwischen den körperlichen Ecken und sphärischen Vielecken können die in den §§. 7 und 8 entwickelten Sätze unmittelbar auf die sphärischen Vielecke übertragen werden; da schon dort die kurze Bezeichnung „Seiten" und „Winkel" statt „Kantenwinkel" und „Flächenwinkel" benutzt wurde, so besteht die Uebertragung einfach darin, dass man die Worte „dreiseitige Ecke" und „mehrseitige Ecke" durch „sphärisches Dreieck" und „sphärisches Vieleck" ersetzt.

Legt man durch die drei Spitzen A, B, C eines sphärischen Dreiecks eine Ebene, so schneidet diese die Kugelfläche in einem durch A, B, C gehenden Kugelkreise, von welchem man sagt, dass er dem sphärischen Dreiecke umschrieben sei. Der in der Ebene ABC liegende Mittelpunkt

dieses Kreises heisse M', so ist (nach §. 19) OM' senkrecht auf der Ebene ABC und da ausserdem $OA = OB = OC$, $AM' = BM' = OM'$, so folgt leicht die Congruenz der Dreiecke AOM', BOM', COM' und daraus die Gleichheit der gleichnamigen Winkel. Die Verlängerung der Geraden OM' schneidet die Kugelfläche in einem Punkte M, welchen wir mit A, B, C durch grösste Kreise verbinden; wegen der gleichen Winkel AOM, BOM, COM sind die Bögen AM, BM, CM gleich und es hat also der Punkt M gleiche sphärische Entfernung von den Ecken A, B, C. Man nennt daher M den sphärischen Mittelpunkt oder Pol und Arc AM = Arc BM = Arc CM den sphärischen Halbmesser des um das sphärische Dreieck ABC beschriebenen Kreises. Halbirt man die sphärischen Seiten AB, BC, CA in den Punkten D, E, F und verbindet diese Punkte mit M durch grösste Kreise, so zerfällt jedes der gleichschenkligen Dreiecke AMB, BMC, CMA in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke und es stehen folglich die Bögen MD, ME, MF senkrecht auf den Seiten AB, BC, CA. Man findet demnach den sphärischen Mittelpunkt des Dreiecks auch dadurch, dass man den Durchschnitt der drei Bögen aufsucht, welche die Dreieckseiten normal halbiren; letztere Construction ist der für das ebene Dreieck giltigen vollkommen analog und gestattet auch eine ähnliche Berechnung, die wir aber in das vierte Buch verweisen müssen.

Fig. 58.

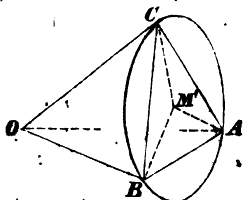
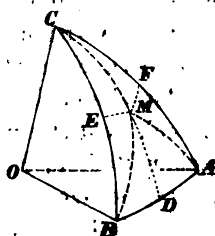


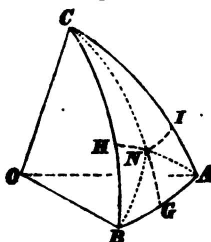
Fig. 59.



Halbirt man den Winkel A des sphärischen Dreieckes ABC, indem man durch OA eine den Flächenwinkel bei A in zwei gleiche Theile zerfällende Ebene legt und diese erweitert, bis sie die Kugelfläche in einem grössten Kreise schneidet, so hat jeder Punkt des letzteren gleichen sphärischen Abstand von den Seiten AB und AC, wovon man sich leicht dadurch überzeugt, dass man von einem beliebigen Punkte des halbirenden Bogens sphärische Perpendi-

kel auf AB und AC herablässt, wodurch jederzeit zwei congruente Dreiecke entstehen. Halbirt man auf gleiche Weise den Winkel B, so bestimmt der Durchschnitt beider halbirenden Bögen einen Punkt N, der von allen drei Seiten des Dreiecks gleich weit absteht, so dass die sphärischen Entfernungen NG, NH, NI gleich sind. Man kann demnach N als sphärischen Mittelpunkt (Pol) eines mit dem sphärischen Halbmesser NG beschriebenen Kreises betrachten, welcher die Dreieckseiten in den Punkten G, H, I berührt, also der dem Dreiecke einbeschriebene Kreis ist. Sucht man dagegen den Durchschnitt der Bögen, welche den Winkel A und die Nebenwinkel von B und C halbiren, so erhält man den Pol desjenigen Kreises, welcher die Verlängerungen von AB, AC und die Seite BC berührt; im Ganzen sind, wie bei dem ebenen Dreiecke, vier die Dreieckseiten berührende Kreise möglich. Das Bisherige giebt zusammen den Satz: **Sowohl um als in jedes sphärische Dreieck kann ein Kugelkreis beschrieben werden.**

Fig. 60.



Ist einem Kugelkreise mit dem Pole M ein sphärisches Viereck $ABCD$ eingeschrieben, so wird es durch die sphärischen Radien, MA, MB, MC, MD in vier gleichschenklige sphärische Dreiecke AMB, BMC, CMD, DMA zerlegt; in diesem sind die Winkel an den Grundlinien gleich, nämlich

$$\angle MAB = \angle MBA, \ \angle MBC = \angle MCB, \ \angle MCD = \angle MDC,$$
$$\angle MDA = \angle MAD,$$

die Addition dieser Gleichung giebt bei etwas anderer Anordnung

$$\angle MAB + \angle MAD + \angle MCB + \angle MCD$$
$$= \angle MBA + \angle MBC + \angle MDC + \angle MDA,$$

oder kürzer

$$A + C = B + D;$$

d. h.: **In jedem sphärischen Kreisvierecke ist die Summe zweier Gegenwinkel gleich der Summe der beiden übrigen Winkel.**

Man kann diesen Satz leicht auf eingeschriebene Vielecke von grösserer Seitenzahl ausdehnen, und zwar sind

die hierzu nöthigen Schlüsse völlig analog den in Thl. I. §. 29 gegebenen Betrachtungen; der allgemeine Satz lautet: **Bei jedem, einem Kugelkreise eingeschriebenen sphärischen Vielecke von gerader Seitenzahl ist die Summe des ersten, dritten, fünften u. s. w. Winkels gleich der Summe des zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Winkels.**

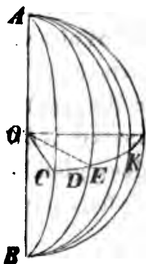
Diesem Theoreme steht ein anderes gegenüber, dessen Ableitung gleichfalls so leicht ist, dass wir sie nicht aus einander zu setzen brauchen, nämlich: **Bei jedem, einem Kugelkreise umschriebenen sphärischen Vielecke von gerader Seitenzahl ist die Summe der ersten, dritten, fünften u. s. w. Seite gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Seite.**

§. 22.

Vergleichung der Flächen sphärischer Figuren.

Die einfachste sphärische Figur, das Zweieck, ist durch den Winkel bestimmt, den seine beiden Seiten mit einander bilden und den wir kurz den Winkel des Zweiecks nennen wollen; er ist leicht dadurch zur Anschauung zu bringen, dass man die Verbindungslinie AB der Spitzen des Zweiecks als Achse der Kugel ansieht und den zugehörigen Aequator construirt, welcher die Seiten des Zweiecks in den Punkten C und D schneiden möge; der Winkel zwischen den Kugelradien OC und OD stellt dann den Winkel des Zweiecks dar. Zwei auf derselben Kugel mit demselben Winkel construirte Zweiecke können durch Drehung um die Achse immer zur Deckung gebracht werden, sie sind daher congruent und besitzen folglich auch gleiche Flächen.

Fig. 61.



Schneidet man auf dem Aequator eines Zweiecks $ACBKA$ mehrere gleiche Bögen, $CD = DE$ u. s. w., ab und legt durch die Punkte $D, E \ldots$ neue grösste Kreise, so zer-

fällt das Zweieck in ebenso viel congruente kleinere Zweiecke, und wenn bei jenen Abtragungen ein Rest gelassen wird, so bleibt auch ein Restzweieck, welches kleiner oder grösser als die übrigen Zweiecke ist, je nachdem der auf dem Aequator übrig gebliebene Bogen kleiner oder grösser als die Bögen $CD = DE$ u. s. w. ist. Man schliesst hieraus sehr leicht, dass sich die Flächen zweier Zweiecke ebenso oft von einander wegnehmen lassen als die Winkel der Zweiecke; diese Operation führt aber zur Kenntniss des Verhältnisses der Winkel, welches dem Flächenverhältnisse gleich sein muss; man sagt daher: Die Flächen zweier mit demselben Halbmesser versehenen Zweiecke verhalten sich wie deren Winkel.

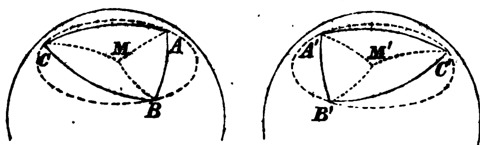
Betrachtet man die ganze Kugelfläche als ein Zweieck, dessen Winkel vier rechten Winkeln gleich ist, so folgt hieraus der Satz: Die Fläche eines Zweiecks verhält sich zur Kugeloberfläche wie sein Winkel zu vier rechten Winkeln, wofür man die Formel

$$Z = \frac{w}{360^0} \Omega$$

schreiben kann, wenn w den in Graden ausgedrückten Winkel des Zweiecks, Z seine Fläche und Ω die zugehörige Kugelfläche bezeichnet.

Betrachten wir ferner das sphärische Dreieck, so erhellt unmittelbar, dass congruente sphärische Dreiecke gleiche Flächen besitzen; dagegen versteht es sich nicht ohne Weiteres von selbst, dass symmetrisch-gleichen sphärischen Dreiecken gleiche Flächen zukommen. Beschreibt man aber um jedes der symmetrisch-gleichen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ einen Kreis, so zerfällt jedes in drei gleichschenklige Dreiecke und unter diesen können die gleichnamigen Dreiecke AMB und $A'M'B'$, BMC und

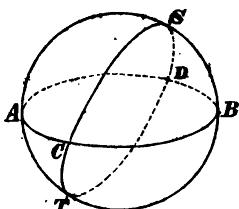
Fig. 62.



$B'M'C'$, CMA und $C'M'A'$ wirklich zur Deckung gebracht werden, woraus unmittelbar folgt, dass in der That auch symmetrisch-gleiche Dreiecke gleiche Flächen besitzen.

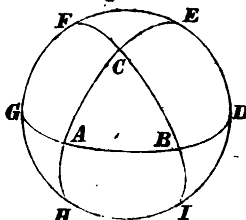
Um nun das Dreieck mit dem Zweieck und folglich auch mit der Kugeloberfläche vergleichen zu können, betrachten wir zunächst zwei grösste Kreise ASB und CSD, welche sich auf der oberen Halbkugel in S, auf der unteren in T schneiden. Da sowohl ASB als SBT ein halber Umfang ist, so bleibt nach beiderseitiger Wegnahme von SB, $AS = BT$; aus denselben Gründen hat man $CS = DT$ und $AC = BD$, mithin zwei mit gleichen Seiten versehene Dreiecke ACS und BDT. Dieselben sind daher entweder congruent oder symmetrisch-gleich (in der That das Letztere), in jedem Falle aber von gleicher Fläche. Durch beiderseitige Addition der Dreiecksfläche BSD folgt jetzt, dass die Flächen ACS und BDS zusammen das Zweieck $BSDT = ASCT$ ausfüllen; man kann diesen Satz so aussprechen: **Schneiden sich zwei grösste Kreise unter irgend einem Winkel in einer Halbkugel, so ist die Summe der auf dieser Halbkugel einander gegenüberliegenden Scheiteldreiecke gleich einem Zweiecke, welches jenen Winkel besitzt.**

Fig. 63.



Sei ferner ABC ein beliebiges sphärisches Dreieck, dessen Seiten bis zum Durchschnitte mit einem beliebigen grössten Kreise $DEFGHI$ verlängert sind und dessen Winkel durch die Zahlen A, B, C in Graden ausgedrückt sein mögen. Nach dem vorigen Satze machen die Flächen ADE und AGH zusammen die Fläche eines mit dem Winkel A construirten Zweiecks aus und es ist daher, wenn wieder Ω die Kugelfläche bezeichnet,

Fig. 64.



$$\triangle ADE + \triangle AGH = \frac{A}{360^0}\,\Omega,$$

ebenso

$$\triangle BFG + \triangle BDI = \frac{B}{360^\circ}\Omega,$$

$$\triangle CHI + \triangle CEF = \frac{C}{360^\circ}\Omega.$$

Die Summe der linker Hand verzeichneten Flächen beträgt eben so viel als die Halbkugelfläche nebst der doppelten Dreiecksfläche ABC und es ist daher

$$\tfrac{1}{2}\Omega + 2\triangle ABC = \frac{A+B+C}{360^\circ}\Omega = \frac{A+B+C}{180^\circ}\cdot\tfrac{1}{2}\Omega,$$

mithin

$$\triangle ABC = \frac{A+B+C-180^\circ}{360^\circ}\cdot\tfrac{1}{2}\Omega,$$

oder auch

$$\frac{\triangle ABC}{\tfrac{1}{2}\Omega} = \frac{A+B+C-180^\circ}{360^\circ}.$$

Nennt man den Ueberschuss der Winkelsumme über zwei rechte Winkel den sphärischen Excess eines Dreiecks, so liegt in der letzten Formel der Satz: Die Fläche eines sphärischen Dreiecks verhält sich zur Halbkugelfläche wie sein sphärischer Excess zu vier rechten Winkeln.

Aus der obigen Formel ergiebt sich ferner die Bedingung, unter welcher zwei sphärische Dreiecke gleiche Flächen besitzen, nämlich: Zwei sphärische Dreiecke von gleicher Winkelsumme haben gleiche Flächen.

§. 23.

Verwandlung sphärischer Vielecke.

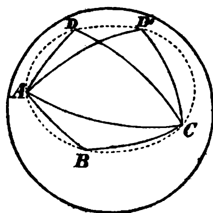
Zieht man in dem einem Kugelkreise eingeschriebenen sphärischen Vierecke $ABCD$ die Diagonale AC, so ist nach dem in §. 20 erwähnten Satze $A + C = B + D$ oder

$$\angle BAC + \angle CAD + \angle BCA + \angle ACD = B + D,$$

woraus folgt

$$\angle BAC + \angle BCA - B = D - \angle CAD - \angle ACD;$$

Fig. 65.



für ein zweites, demselben Kreise eingeschriebenes Viereck $ABCD'$, welches mit dem ersten die Ecken A, B, C gemein hat, gilt die analoge Beziehung

$$\angle BAC + \angle BCA - B$$
$$= D' - \angle CAD' - \angle ACD',$$

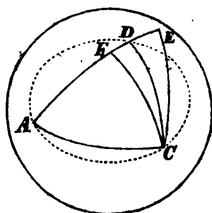
welche, mit der vorigen verglichen, die Gleichung

$$D-(\angle CAD+\angle ACD)=D'-(\angle CAD'+\angle ACD')$$

liefert; in Worten ausgedrückt heisst dies: **Bei allen sphärischen Dreiecken, welche über der nämlichen Grundlinie nach derselben Seite zu in einem Kugelkreis beschrieben werden, ist der Unterschied zwischen dem Winkel an der Spitze und der Summe der an der Basis liegenden Winkel unveränderlich.**

Um zu entscheiden, ob der ausgesprochene Satz ausschliesslich für die Dreiecke gilt, deren Spitzen auf dem Kugelkreise liegen, oder nicht, verbinden wir einen ausserhalb oder innerhalb des Kreises liegenden Punkt E oder F mit A durch einen grössten Kreis, welcher den Kugelkreis in D schneidet, und construiren noch die grössten Kreise CD, CE, CF. Wegen $E<D$, $\angle CAE=\angle CAD$, $\angle ACE>\angle ACD$ ergiebt sich leicht

Fig. 66.



$$E-(\angle CAE+\angle ACE)<D-(\angle CAD+\angle ACD)$$

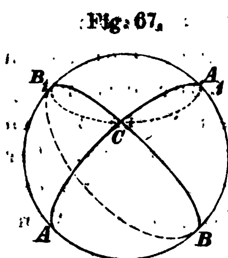
und in ähnlicher Weise wegen $F>D$, $\angle CAF=\angle CAD$, $\angle ACF<\angle ACD$,

$$F-(\angle CAF+\angle ACF)>D-(\angle CAD+\angle ACD);$$

in jedem Falle ist also die Differenz zwischen dem Winkel an der Spitze und der Summe der Basiswinkel eine andere, wenn die Spitze nicht auf dem Kugelkreise liegt. Es gilt daher auch der umgekehrte Satz: **Wenn über einer und derselben Grundlinie nach der nämlichen Seite hin sphärische Dreiecke construirt werden, in denen der Unterschied zwischen dem Winkel an der Spitze und der Summe der Basiswinkel eine unveränderliche Grösse behält, so liegen die Spitzen aller jener Dreiecke in einem durch die Endpunkte der Grundlinie gehenden Kugelkreise.**

Es sei ferner ABC ein über der Basis AB stehendes sphärisches Dreieck, dessen Grundlinie zu einem vollständigen grössten Kreise ergänzt ist; die Bögen ABA_1 und BAB_1 mögen halbe Umfänge, mithin A_1 und B_1 die so-

Fig. 67.



genannten Gegenpunkte der Punkte A und B sein. Die Winkel der Dreiecke ABC und A_1B_1C sollen kurz mit $\angle BAC = A$, $\angle ABC = B$, $\angle ACB = C$, $\angle B_1A_1C = A_1$, $\angle A_1B_1C = B_1$, $\angle A_1CB_1 = C_1$ bezeichnet werden und haben folgende Beziehungen zu einander. Es ist erstens

$$C_1 = C,$$

zweitens

$$A_1 = 180^0 - \angle AA_1B = 180^0 - \angle A_1AB,$$

d. i.

$$A_1 = 180^0 - A,$$

und auf gleiche Weise

$$B_1 = 180^0 - B;$$

durch Subtraction der letzten zwei Gleichungen von der ersten folgt

$$C_1 - (A_1 + B_1) = A + B + C - 360^0;$$

es bleibt daher die Differenz $C_1 - (A_1 + B_1)$ dieselbe, so lange die Summe $A + B + C$ sich nicht ändert. Nun wissen wir aber aus §. 21, dass für alle Dreiecke von gleichem Flächeninhalte die Winkelsumme $A + B + C$ unverändert dieselbe ist; behält also das Dreieck ABC dieselbe Fläche und dieselbe Basis, so ist in dem Dreiecke A_1B_1C der Unterschied zwischen dem Winkel an der Spitze und der Summe der Basiswinkel gleichfalls unveränderlich und die Spitze C desselben kann beliebig auf dem durch A_1, B_1 und C gehenden Kugelkreise liegen. Dies giebt folgenden wichtigen Satz: Die Scheitel aller inhaltsgleichen über derselben Basis construirten sphärischen Dreiecke liegen in einem Kugelkreise, welcher durch die Gegenpunkte der Basisenden geht; ebenso umgekehrt: Bleibt die Grundlinie eines sphärischen Dreiecks unveränderlich und bewegt sich sein Scheitel auf der Peripherie eines durch die Gegenpunkte der Basisenden gehenden Kugelkreises, so ändert sich auch die Fläche des Dreiecks nicht.

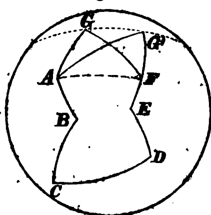
Den durch C, A_1 und B_1 gehenden Kreis wollen wir

zur Abkürzung den Scheitelkreis nennen; er ist auf der Kugel Das, was in der Ebene eine durch C parallel zu AB gelegte Gerade sein würde.

Lässt man C mit B_1 (oder A_1) zusammenfallen, so geht BC in den halben grössten Kreis BB_1 über, welcher den Scheitelkreis in B_1 berührt; das Dreieck ABC degenerirt dann in das Zweieck B_1ABB_1, welches ihm an Fläche gleich kommt.

Wenn nun ein beliebiges sphärisches Vieleck $ABCDEFG$ gegeben ist, so kann man durch eine sphärische Diagonale AF ein Dreieck davon abschneiden, AF als dessen Basis ansehen und den zugehörigen Scheitelkreis construiren; verlängert man ferner eine der an A und F anstossenden Vielecksseiten, etwa EF, bis sie den Scheitelkreis in G' schneidet und verbindet darauf G' mit A durch einen grössten Kreis, so lässt sich das abgeschnittene Dreieck AFG durch das ihm gleiche AFG' ersetzen, es fällt dabei die Ecke E weg und an die Stelle des ursprünglichen Vielecks $ABCDEFG$ tritt das eine Seite weniger zählende Vieleck $ABCDEG'$. Das nämliche Verfahren ist selbstverständlich mehrmals nach einander anwendbar und man hat daher den schönen Satz: **Jedes sphärische Vieleck lässt sich in ein Zweieck verwandeln, welches ihm an Fläche gleich ist.**

Fig. 68.



§. 24.

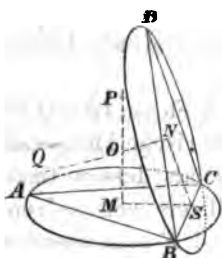
Polyeder in und um die Kugel.

Wenn man der Analogie nachgeht, welche sich bisher zwischen den Eigenschaften der Kugel und den früher entwickelten Eigenschaften des Kreises gezeigt hat, so kommt man von selbst auf die Betrachtung solcher Polyeder, deren Ecken auf einer Kugelfläche liegen, oder deren Seitenflächen eine Kugel berühren; von Polyedern der ersten Art sagt man, dass sie der Kugel **eingeschrieben**, von denen der zweiten Art, dass sie ihr **umschrieben** sind; die

einen entsprechen den Sehnen-, die anderen den Tangentenvielecken.

I. Wir bleiben zunächst bei der dreiseitigen Pyramide stehen, deren Ecken *A*, *B*, *C*, *D* heissen mögen. Durch drei von diesen Punkten, etwa *A*, *B* und *C*, lässt sich ein Kreis legen, und wenn man durch den Mittelpunkt *M* desselben eine Senkrechte auf der Ebene *ABC* errichtet, so ist jeder Punkt *P* dieser Normalen gleich weit von *A*, *B* und *C* entfernt, wie man vermöge der Congruenz der Dreiecke *APB*, *BPC*, *CPA* leicht findet. Ferner kann durch drei andere Pyramidenecken, etwa durch *B*, *C* und *D*, ein Kreis und durch dessen Mittelpunkt *N* eine Normale *NQ* zur Ebene *BCD* gelegt werden; jeder Punkt von *NQ* hat dann wieder gleiche Entfernungen von *B*, *C* und *D*. Schnitten sich nun *MP* und *NQ* in einem Punkte *O*, so würde *O* sowohl von *A*, *B*, *C*, als von *B*, *C*, *D*, d. h. von allen Pyramidenecken gleich weit abstehen und es wäre dann *O* der Mittelpunkt und $OA = OB = OC = OD$ der Halbmesser der umschriebenen Kugel. Dass aber *MP* und *NQ* sich in der That schneiden, zeigt folgende Betrachtung. Die Kreise um *ABC* und *BCD* haben die Sehne *BC* gemein; fällt man auf diese sowohl von *M* als von *N* aus eine Senkrechte, so muss sie in jedem Falle halbirt werden, die Perpendikel von *M* auf *BC* und von *N* auf *BC* schneiden sich daher in einem Punkte *S*. Der Winkel *MSN* ist nun der Neigungswinkel der Ebenen *ABC* und *BCD*, die Ebene *MSN* steht senkrecht auf *BC*, sowie auf den Ebenen *ABC*, *BCD*, und sie muss deshalb die Normalen *MP* und *NQ* in sich enthalten. Der Umstand aber, dass *MP* und *NQ* in einer Ebene liegen, zeigt augenblicklich, dass ein Durchschnitt *O* beider Geraden existirt. Wir haben demnach den Satz: Um jede dreiseitige Pyramide lässt sich eine Kugelfläche beschreiben; oder auch: Beschreibt man um die Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide Kreise und errichtet in deren Mittelpunkten Normalen auf den

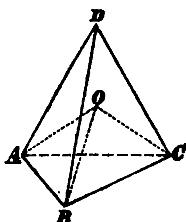
Fig. 69.



Ebenen derselben, so schneiden sich diese vier Geraden in einem Punkte, dem Mittelpunkte der umschriebenen Kugel.

Ist wiederum $ABCD$ eine dreiseitige Pyramide und der Neigungswinkel der Seitenflächen ABC und ABD durch eine Ebene halbirt, so hat jeder Punkt dieser letzteren Ebene gleiche Entfernungen von den Ebenen ABC und ABD, wovon man sich leicht dadurch überzeugen kann, dass man durch irgend einen Punkt der winkelhalbirenden Ebene auf ABC und ABD Senkrechte herablässt und durch diese die Normalebene zu AB legt. In ähnlicher Weise hat jeder Punkt der Ebene, welche den Neigungswinkel an der Kante BC halbirt, gleiche Entfernungen von den Seitenflächen BCA und BCD, endlich ist jeder Punkt der den Winkel an CA halbirenden Ebene gleich weit von den Seitenflächen CAB und CAD entfernt. Die genannten drei winkelhalbirenden Ebenen schneiden sich in einem Punkte O, dessen Abstände von allen vier Seitenflächen der Pyramide gleich sind; nimmt man daher O als Mittelpunkt und einen jener gleichen Abstände als Halbmesser einer Kugel, so berührt diese die Seitenflächen der Pyramide, d. h.: **In jede dreiseitige Pyramide lässt sich eine Kugelfläche beschreiben, oder auch: Die sechs Ebenen, welche die Flächenwinkel einer dreiseitigen Pyramide halbiren, schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte der eingeschriebenen Kugel.** Halbirt man nicht die an der Basis liegenden Flächenwinkel selbst, sondern ihre Nebenwinkel, so gelangt man zu einer Kugel, welche eine Seitenfläche, etwa ABC, und die Erweiterungen der übrigen Seitenflächen berührt; solcher neuer Kugelflächen giebt es vier, im Ganzen also fünf Kugeln, welche vier gegebene Ebenen berühren.

Fig. 70.

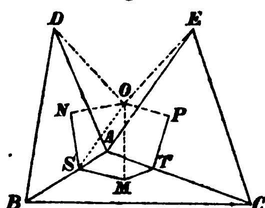


II. Man erkennt aus dem Vorigen, dass sich um oder in ein Polyeder von mehr als vier Ecken im Allgemeinen keine Kugelfläche beschreiben lässt, dass vielmehr besondere Bedingungen hierzu gehören; letztere sind aber bei

den regulären Körpern immer erfüllt, wie wir noch zeigen wollen.

Von den in einer Ecke *A* zusammenstossenden Seitenflächen eines regelmässigen Polyeders betrachten wir drei, *ABC*, *ABD*, *ACE*, dieselben sind congruent und gegeneinander um gleiche Winkel geneigt, also der Flächenwinkel an *AB* gleich dem an *AC*; ferner sei *M* der Mittelpunkt des um *ABC* beschriebenen Kreises, ebenso *N* der Mittelpunkt von *ABD*. Lassen wir von *M* auf *AB* eine Senkrechte herab, so ist ihr Fusspunkt *S* der Halbirungspunkt von *AB*, ebenso würde eine Senkrechte von *N* auf *AB* die letztere Gerade gleichfalls halbiren und daher treffen die Perpendikel von *M* und von *N* auf *AB* in einem Punkte *S* zusammen; $\angle MSN$ ist nun der an der Kante *AB* liegende Neigungswinkel und die Ebene *MSN* normal zu *AB*, sowie zu den Ebenen *ABC* und *ABD*. Errichtet man in *M* und *N* Senkrechte auf den Ebenen *ABC* und *ABD*, so liegen diese Normalen in einer Ebene, nämlich *MSN*, sie schneiden sich daher in einem Punkte *O*, welchem folgende Eigenschaften zukommen.

Fig. 71.



Zieht man *OS*, so entstehen zwei congruente Dreiecke *OMS* und *ONS* (wegen $OS = OS$, $MS = NS$, $\angle M = \angle N = 90°$) und es ist daher $OM = ON$, d. h. *O* gleich weit von den Ebenen *ABC* und *ABD* entfernt. Um nun zu entscheiden, ob *O* auch ebenso weit von der dritten Ebene *ACE* entfernt ist, lassen wir von *O* auf *ACE* die Senkrechte *OP* herab, legen durch *OM* und *OP* die Ebene *MOP*, welche *AC* normal in *T* schneidet, ziehen *MT* und *PT*, wodurch der Neigungswinkel *MTP* gebildet wird, und haben dann zur Vergleichung der Vierecke *OMSN* und *OMTP* die Data: $OM = OM$, $MS = MT$ (weil *MT* senkrecht auf *AC* und *ABC* ein regelmässiges Polygon ist), $\angle OMS = \angle OMT = 90°$, $\angle ONS = \angle OPT = 90°$, $\angle MSN = \angle MTP$ (wegen der Regelmässigkeit des Körpers). Aus der Gleichheit fünf entsprechender Stücke folgt die Congruenz der Vierecke *OMSN* und *OMTP* und daraus $ON = OP$. Demnach ist *O* von der

Ebene *ACE* ebenso weit wie von den Ebenen *ABC* und *ABD* entfernt, und man würde auf ähnliche Weise zeigen, dass *O* der Reihe nach gleiche Abstände von allen Seitenflächen des Polyeders besitzt; es ist daher *O* der Mittelpunkt der in das Polyeder beschriebenen Kugelfläche und $OM = ON = OP\ldots$ ihr Halbmesser. Da ferner aus nahe liegenden Gründen *P* der Mittelpunkt des um *ACE* beschriebenen Kreises sein muss, so hat man folgenden Satz: Errichtet man in den Mittelpunkten der Seitenflächen eines regelmässigen Polyeders Normalen, so schneiden sich diese im Mittelpunkte der eingeschriebenen Kugelfläche.

Denkt man sich ferner *O* mit *A*, *B* und *C* verbunden, so entstehen die in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmenden Dreiecke *OMA*, *OMB*, *OMC*, es ist daher $OA = OB = OC$, d. h. *O* gleichweit von den Ecken der Seitenfläche *ABC* entfernt. Auf gleiche Weise ergiebt sich $OA = OB = OD$, mithin $OC = OD$, so dass *O* von den vier Punkten *A*, *B*, *C*, *D* gleich weit entfernt ist. Ferner ist, wenn *OE* gezogen wird, $ON = OP$ (nach dem Vorigen), $\angle OND = \angle OPE = 90^\circ$ und $ND = PE$ (weil *P* als Mittelpunkt des Polygons *ACE* betrachtet werden darf); die Dreiecke *OND* und *OPE* sind also wiederum congruent, es folgt daraus $OD = OE$ und es ist daher *O* von den fünf Punkten *A*, *B*, *C*, *D*, *E* gleichweit entfernt. Diese Schlussweise führt leicht weiter zu dem allgemeinen Resultate: Nicht nur in, sondern auch um ein reguläres Polyeder kann eine Kugelfläche beschrieben werden, und zwar sind beide Kugelflächen concentrisch.

§. 25.

Die Cylinderfläche.

Bewegt sich eine, in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung gedachte Gerade so, dass sie immer durch die Peripherie eines festen Kreises geht und gleichzeitig einer bestimmten Geraden parallel bleibt, so beschreibt die bewegliche Gerade eine Fläche, welche Kreiscylinderfläche heisst; den festen Kreis nennt man die Leitlinie

(Directrix) derselben und die durch den Mittelpunkt parallel der unveränderlichen Richtung gelegte Gerade ihre Achse. In dem speciellen Falle, wo die bewegliche Gerade senkrecht zur Ebene der Directrix bleibt, führt die Cylinderfläche den Namen der geraden Kreiscylinderfläche; da sie die einzige unter den Cylinderflächen ist, deren Eigenschaften sich mit einiger Vollständigkeit auf elementarem Wege ermitteln lassen, so werden wir uns im Folgenden auf die Untersuchung dieser besonderen Fläche beschränken und sie die Cylinderfläche schlechthin nennen.

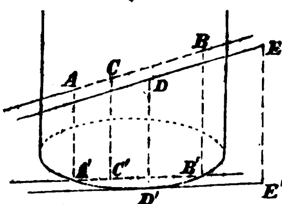
Aus der oben angedeuteten Entstehung der Cylinderfläche geht hervor, dass jeder Punkt der beweglichen Geraden, also auch jeder Punkt der Cylinderfläche, in immer gleicher Entfernung von der Achse bleibt, oder dass er bei dem Fortrücken der Geraden einen Kreis durchläuft, dessen Ebene der Ebene der Directrix parallel, dessen Radius dem Halbmesser der Leitlinie gleich und dessen Mittelpunkt in der Achse liegt; demzufolge entsteht die Cylinderfläche auch, wenn man von zwei parallelen Geraden die eine fest hält und die andere, sammt der Ebene beider Parallelen, um die feste Gerade herumdreht, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt. Begränzt man die beiden Parallelen dadurch, dass man sie als Gegenseiten eines Rechtecks nimmt, so wird nur ein Theil der Cylinderfläche, ein sogenannter Cylindermantel erzeugt; die beiden übrigen Seiten des rotirenden Rechtecks beschreiben parallele und congruente Kreise, deren Ebenen mit dem Cylindermantel zusammen einen geschlossenen Raum begränzen; letzterer heisst das Cylindervolumen, der eine jener Parallelkreise die Basis (Grundfläche) des Cylinders und die Entfernung beider Parallelkreise seine Höhe.

Die Cylinderfläche und die Gerade. Dem Vorigen zufolge lassen sich auf der Cylinderfläche nach einer bestimmten Richtung Gerade ziehen, weil jede durch einen Punkt der Directrix parallel zur Achse gelegte Gerade als die in irgend einer ihrer Lagen befindliche rotirende Gerade betrachtet werden kann und mithin alle ihre Punkte zugleich Punkte der Fläche sein müssen. Zieht man dagegen durch einen im Innern oder ausserhalb der Directrix

liegenden Punkt eine Parallele zur Achse, so hat jede derartige Gerade überall gleichen Abstand von der Achse und zwar ist derselbe kleiner oder grösser als der Halbmesser der Directrix, woraus augenblicklich folgt, dass kein Punkt dieser Parallelen auf der Cylinderfläche liegen kann; man hat daher den Satz: **Parallelen zur Cylinderachse haben entweder alle Punkte oder keinen Punkt mit der Cylinderfläche gemein, und zwar findet der erste oder zweite Fall statt, je nachdem die Entfernung der Parallelen von der Cylinderachse gleich dem Halbmesser der Directrix ist oder nicht.**

Um ferner die Lage einer der Achse nicht parallelen Geraden beurtheilen zu können, projiciren wir dieselbe auf die Ebene der Directrix; verbinden wir z. B. zwei Punkte A und B der Cylinderfläche durch eine Gerade und nennen A' und B' die Projectionen von A und B, so ist $A'B'$ die Projection von AB, zugleich liegen die Geraden AA' und BB' auf der Fläche. Von einem dritten Punkte C der Geraden AB fällt die Projection C' auf $A'B'$;

Fig. 72.



läge nun C auf der Cylinderfläche, so müsste dies mit der Geraden CC' ebenso der Fall sein, mithin wäre C' ein Punkt der Directrix; dies ist aber unmöglich, weil drei Punkte nicht gleichzeitig auf einer Geraden und auf einem Kreise liegen können. Man erkennt hieraus, dass eine der Achse nicht parallele Gerade höchstens zwei Punkte mit der Cylinderfläche gemein haben kann; demzufolge lassen sich nicht nach allen Richtungen hin Gerade auf der Cylinderfläche ziehen, und daher ist letztere eine krumme Fläche.

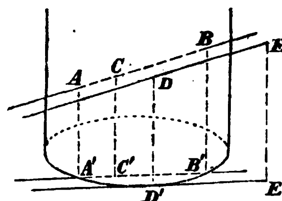
Wenn die Gerade $A'B'$ zur Tangente an der Directrix wird, wenn also die Punkte A' und B' zu einem Punkte D' zusammenfallen, so vereinigen sich auch A und B zu einem Punkte D; jeder von D' verschiedene Punkt E' der Tangente $D'E'$ liegt nun ausserhalb der Directrix, die zu $D'E'$ senkrechte Gerade $E'E$ mithin ausserhalb der Cylinder-

fläche, folglich auch der Punkt E, von welchem E' die Projection ist, ausserhalb der Fläche. Die Gerade DE hat jetzt nur noch einen Punkt D mit der Cylinderfläche gemein und heisst dann **Tangente** an letzterer; der gemeinsame Punkt ist der **Berührungspunkt**.

Rückt die Gerade $A'B'$ noch weiter weg, so dass sie keinen Punkt mit der Directrix gemein hat, so liegt nach derselben Schlussweise auch jeder Punkt von AB ausserhalb der Cylinderoberfläche. Demgemäss haben wir folgenden Satz: **Eine der Achse nicht parallele Gerade muss die Cylinderfläche entweder in zwei Punkten schneiden, oder in einem Punkte sie berühren, oder ganz ausser ihr liegen; von diesen Fällen findet der erste, zweite oder dritte statt, je nachdem die Projection der Geraden auf die Directrixebene die Leitlinie schneidet, berührt, oder völlig ausschliesst.**

Die Cylinderfläche und die Ebene. Denkt man sich durch die beiden Parallelen AA' und BB' eine Ebene gelegt, so hat diese mit der Cylinderfläche die beiden Geraden AA' und BB' gemein, sobald AB die Fläche schneidet; dass aber ausserdem kein Punkt der Ebene auf der Fläche liegen kann, erkennt man augenblicklich, wenn man den willkührlichen Punkt C als zur Ebene $AA'B'B$ gehörend betrachtet. Wird ferner $A'B'$ zur Tangente $D'E'$, so hat die Ebene $DD'E'E$ nichts als die Gerade DD' mit der Cylinderfläche gemein und man sagt dann, die Ebene **berühre** die Fläche **längs** einer Geraden (DD'); wenn endlich die Gerade $A'B'$ ausserhalb der Directrix liegt, so haben die Ebene und die Fläche keinen Punkt gemein. Zusammen giebt dies den Satz: **Eine zur Cylinderachse parallele Ebene muss die Fläche entweder in zwei zur Achse parallelen Geraden schneiden, oder längs einer Parallelen zur Achse berühren, oder ganz ausser ihr liegen; von diesen Fällen tritt der erste, zweite oder dritte ein,**

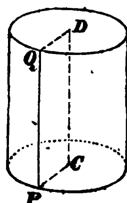
Fig. 72.



je nachdem die Ebene die Directrix schneidet, berührt oder gänzlich ausschliesst.

Eine zur Achse nicht parallele Ebene schneidet nothwendig die Achse, mithin auch die Cylinderfläche. Dabei sind aber die beiden Fälle zur unterscheiden, ob die Ebene auf der Achse senkrecht steht oder nicht. Im ersten Falle sei C der Mittelpunkt der Directrix, D der Punkt, in welchem die der Directrix parallele Ebene die Achse schneidet und $CPQD$ eine durch die Achse gelegte Ebene, welche die Fläche in der Geraden PQ schneidet. Nach dem Früheren ist $PQ \parallel CD$, wegen des Parallelismus beider Ebenen $CP \parallel DQ$, mithin $CPQD$ ein Parallelogramm (specieller ein Rechteck) und folglich $DQ = CP$, d. h.: Jeder zur Achse der Cylinderfläche senkrechte Schnitt ist ein Kreis.

Fig. 73.



Bei jeder anderen Lage der schneidenden Ebene entsteht eine geschlossene krumme Linie, die sich wesentlich vom Kreise unterscheidet; wir werden sie im nächsten Capitel weiter untersuchen.

§. 26.

Cylinder- und Kugelfläche.

Sehr mannichfaltig sind die verschiedenen Lagen, welche eine Cylinder- und eine Kugelfläche gegeneinander haben können; man bringt dieselben am bequemsten dadurch zur Anschauung, dass man durch die Achse des Cylinders und durch den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene legt, welche die Kugel in einem grössten Kreise und die Cylinderfläche in zwei parallelen Geraden schneidet. Die Frage nach den möglichen Lagen der Kugel gegen den Cylinder reducirt sich dann auf die einfachere Frage nach den verschiedenen Lagen eines Kreises gegen zwei parallele Gerade. Hiernach gelangt man leicht zur Unterscheidung der folgenden Fälle.

1) Die Kugel liegt ganz innerhalb des Cylinders und zwar so, dass beide Flächen keinen Punkt gemein haben.

2) Die Kugel liegt ganz innerhalb der Cylinderfläche und berührt dieselbe in einem Punkte.

3) Die Kugel liegt so innerhalb der Cylinderfläche, dass sie letztere in einem Kreise berührt. Dieser Fall tritt ein, wenn die Halbmesser beider Flächen gleich sind und der Mittelpunkt der Kugel auf der Cylinderachse liegt.

4) Die Kugel ist, ohne die Cylinderfläche irgendwie zu berühren, zum Theil innerhalb des Cylinders enthalten und liegt zum andern Theile ausser ihr; beide Flächen schneiden sich dann in einer geschlossenen nicht ebenen krummen Linie.

5) Die Kugel berührt die Cylinderfläche an der Innenseite und schneidet sie im Uebrigen.

6) Die Kugelfläche schneidet die Cylinderfläche zweimal, so dass zwei getrennte Durchschnittslinien entstehen, von denen jede für sich geschlossen ist.

7) Die Kugelfläche berührt die Cylinderfläche von Aussen in einem Punkte und hat sonst keinen Punkt weiter mit ihr gemein.

8) Die Kugelfläche liegt ausserhalb der Cylinderfläche, ohne auch nur einen Punkt mit ihr gemein zu haben.

Die Untersuchung der in den Fällen 4, 5 und 6 entstehenden krummen Durchschnittslinien übersteigt die Kräfte der Elementargeometrie, doch werden wir im letzten Abschnitte dieses Werkes zeigen, wie die Projectionen der betreffenden Linien construirt werden können.

Endlich würden noch die möglichen gegenseitigen Lagen zweier Cylinderflächen zu erörtern sein. Diese Untersuchung hat in dem Falle keine Schwierigkeit, wo die Achsen beider Flächen in einer Ebene liegen, sie reducirt sich dann auf die Frage nach den möglichen gegenseitigen Lagen zweier Paare von Parallelen; sind dagegen die beiden Achsen nicht in einer Ebene enthalten, so wird die Sache zu umständlich, als dass wir sie hier erledigen könnten; doch wird auch hier der letzte Abschnitt in jedem gegebenen speciellen Falle die Entscheidung liefern.

§. 27.

Die Kegelfläche.

Wenn eine in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung gedachte Gerade sich in der Weise bewegt, dass sie die Peripherie eines Kreises durchläuft und gleichzeitig durch einen festen, ausserhalb des Kreises liegenden Punkt geht, so beschreibt sie eine sogenannte Kreis-Kegelfläche; der gegebene Kreis heisst die Leitlinie (Directrix), der feste Punkt der Mittelpunkt der Fläche (letztere Benennung hat darin ihren Grund, dass die Fläche aus zwei congruenten einander entgegengesetzt liegenden Theilen besteht, die nichts weiter als jenen Punkt mit einander gemein haben), die Gerade endlich, welche das Centrum der Leitlinie mit dem Mittelpunkte der Fläche verbindet, wird die Achse der Fläche genannt.

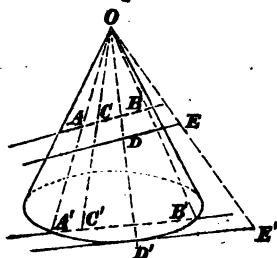
Im Folgenden setzen wir immer voraus, dass die Achse normal zur Ebene der Directrix sei; die Fläche heisst dann eine gerade Kreiskegelfläche oder Kegelfläche schlechthin. Dieselbe entsteht auch, wenn ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete und Hypotenuse unendlich verlängert sind, um die verlängerte Kathete gedreht wird, bis es wieder in seine ursprüngliche Lage kommt; die festgehaltene Kathete ist dann die Achse, der Endpunkt der nicht verlängerten Kathete beschreibt die Directrix und die Hypotenuse erzeugt die Kegelfläche. Die Ebene und die Cylinderfläche können übrigens als die extremsten Fälle der Kegelfläche betrachtet werden; fällt nämlich der Mittelpunkt der Kegelfläche mit dem Centrum der Directrix zusammen, so geht die Kegelfläche in eine Ebene (die der Directrix) über, rückt dagegen der Mittelpunkt der Fläche unendlich weit von der Directrix weg, so wird die Kegelfläche zur Cylinderfläche.

Die Ebene der Directrix und der von der Directrix bis zum Mittelpunkte sich erstreckende Theil der Kegelfläche begränzen zusammen einen allseitig geschlossenen Raum, welcher ein Kegelvolumen oder kurz ein Kegel heisst; die Fläche der Directrix wird die Grundfläche (Basis) desselben genannt, der Mittelpunkt erhält den Namen der Spitze des Kegels, die Entfernung der Spitze

von der Basis heisst die Höhe und die Entfernung der Spitze von irgend einem Punkte des Umfanges der Basis die Seite des Kegels. Die krumme Oberfläche des Kegels pflegt man seinen Mantel zu nennen.

Die Kegelfläche und die Gerade. Der angegebenen Entstehung der Kegelfläche zufolge liegt jede Gerade vom Mittelpunkte nach irgend einem Punkte der Directrix ganz in der Fläche, ebenso ist umgekehrt klar, dass eine Gerade, vom Mittelpunkte nach irgend einem Punkte der Fläche gezogen, ganz in der Fläche liegen und die Directrix schneiden muss; im Gegenfalle nämlich würde die bewegliche, die Kegelfläche beschreibende Gerade in derjenigen Lage, bei welcher sie durch den fraglichen Punkt geht, mit jener Verbindungslinie zwei Punkte gemein haben, ohne mit ihr zusammenzufallen, was unmöglich ist. Verbindet man dagegen einen nicht auf der Peripherie der Leitlinie gewählten Punkt mit dem Mittelpunkte, so kann eine derartige Gerade ausser dem Mittelpunkte keinen weiteren Punkt mit der Fläche gemein haben, denn hätte die Gerade zwei Punkte mit der Fläche gemein, so läge sie in ihr und müsste dann die Directrix schneiden, was gegen die Voraussetzung ist. Beide Fälle liefern zusammen den Satz: Eine durch den Mittelpunkt der Kegelfläche gehende Gerade hat entweder alle Punkte oder nur einen Punkt mit der Fläche gemein, und zwar findet der erste oder zweite Fall statt, je nachdem der Winkel, den die Gerade mit der Achse bildet, gleich oder nicht gleich dem Winkel zwischen der Achse und der Seite des Kegels ist.

Fig. 74.



Um ferner die Lage irgend einer anderen durch zwei Punkte A und B gehenden Geraden AB beurtheilen zu können, denken wir uns durch AB und den Mittelpunkt O eine Ebene gelegt und diese erweitert, bis sie die Ebene der Directrix in einer Geraden $A'B'$ schneidet, wobei A' mit A

und O, ebenso B' mit B und O in gerader Linie liegen möge; die Punkte A' und B' nennen wir die Centralprojectionen der Punkte A und B, ebenso die Gerade $A'B'$ die Centralprojection von AB. Sind nun A und B Punkte der Kegelfläche, so liegen OA und OB in der Fläche, mithin A' und B' auf der Directrix; von einem dritten Punkte C der Geraden AB fällt die Centralprojection C' auf $A'B'$, läge nun C auf der Kegelfläche, so müsste C' in die Directrix fallen, was unmöglich ist, weil drei Punkte A', B', C' nicht gleichzeitig einer Geraden und einem Kreise angehören können. Man erkennt hieraus, dass eine nicht durch den Mittelpunkt der Kegelfläche gehende Gerade höchstens zwei Punkte mit der Fläche gemein hat. Demnach lassen sich nicht nach allen Richtungen hin Gerade auf der Kegelfläche ziehen, und es ist demnach letztere eine krumme Fläche.

Wenn die Gerade $A'B'$ zur Tangente an der Directrix wird, mithin A' und B' zu einem Punkte D' zusammenfallen, so vereinigen sich auch A und B zu einem einzigen Punkte D; für jeden anderen Punkt E der nunmehrigen Geraden DE fällt die Centralprojection E' ausserhalb der Directrix, weil E' von D' verschieden sein muss, und daraus folgt, dass E nicht auf der Kegelfläche liegen kann, weil sonst E' ein Punkt der Directrix sein müsste. Die Gerade DE hat jetzt nur einen Punkt D mit der Kegelfläche gemein und heisst eine Tangente an derselben; D ist ihr Berührungspunkt.

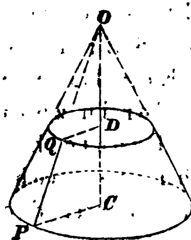
Liegt endlich die Gerade $A'B'$ so ausserhalb der Directrix, dass sie mit dieser keinen Punkt gemein hat, so giebt eine ähnliche Schlussweise wie vorhin zu erkennen, dass die Gerade AB selbst keinen Punkt mit der Kegelfläche gemein hat, also ganz ausserhalb der Fläche vorüberzieht. Das Bisherige zusammen liefert den Satz: Eine nicht durch den Mittelpunkt der Kegelfläche gehende Gerade muss letztere entweder in zwei Punkten schneiden, oder in einem Punkte berühren, oder ganz ausser ihr liegen, je nachdem die Centralprojection der Geraden auf die

Directrixebene die Leitebene schneidet, berührt oder völlig ausschliesst.

Die Kegelfläche und die Ebene. Die durch O und AB gelegte Ebene, welche zugleich $A'B'$ enthält, hat mit der Kegelfläche die Geraden $OA'A$ und OBB' gemein, sobald AB die Fläche schneidet; dass ausserdem kein Punkt der Ebene auf der Fläche liegen kann, ersieht man augenblicklich, wenn man den willkührlichen Punkt C als zur Ebene $OAA'B'B$ gehörend betrachtet. Wird ferner $A'B'$ zur Tangente $D'E'$, so hat die Ebene $ODD'E'E$ mit der Fläche nur die Gerade ODD' gemein und man sagt dann, die Ebene berühre die Fläche längs der Geraden ODD'; wenn endlich die Geraden $A'B'$ ganz ausserhalb der Directrix liegt, so haben die Ebene und die Fläche nur den Punkt O gemein. Zusammen giebt diess den Satz: Eine durch den Mittelpunkt der Kegelfläche gehende Ebene muss die Fläche entweder in zwei nach dem Mittelpunkte zusammenlaufenden Geraden schneiden, oder längs einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden berühren, oder nur den Mittelpunkt mit ihr gemein haben; von diesen Fällen tritt der erste, zweite oder dritte ein, je nachdem die Ebene die Directrix schneidet, berührt oder gänzlich ausschliesst.

Indem wir ferner solche Ebenen betrachten, welche nicht durch den Mittelpunkt der Kugelfläche gehen, unterscheiden wir, ob die Ebene senkrecht zur Achse steht oder nicht. Im ersten Falle sei C der Mittelpunkt der Directrix, D der Punkt, in welchem die zur Directrix parallele Ebene die Achse schneidet und CDP eine beliebige, durch die Achse gelegte Ebene, welche die Fläche in der Geraden OQP schneidet; ziehen wir CP und DQ, so entstehen die ähnlichen Dreiecke OCP und ODQ, in denen

Fig. 75.



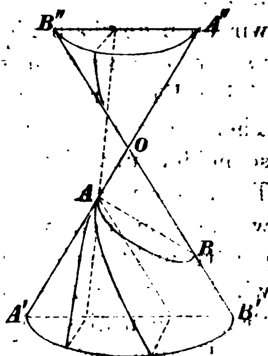
$$DQ = \frac{OD}{OC} CP$$

ist; die Unveränderlichkeit von OD, OC, CP zieht hier die Unveränderlichkeit von DQ nach sich, d. h.: Jeder zur Achse

der Kegelfläche senkrechte Schnitt ist ein Kreis.

Bei jeder anderen Lage der schneidenden Ebene denken wir uns durch die Achse der Fläche eine Ebene senkrecht zur Schnittebene gelegt; diese Hülfsebene schneidet die Kegelfläche in zwei Geraden OA' und OB', die Schnittebene in der Geraden AB, und enthält die Achse in der Weise, dass der Winkel, welchen letztere mit AB bildet, der Neigungswinkel der Schnittebene gegen die Achse ist. Den so entstandenen Durchschnitt $A'OB'$ des Kegels wollen wir seinen Hauptschnitt nennen, weil durch ihn die Lage der schneidenden Ebene gegen die Achse zur Anschauung gebracht wird. Es sind nun die Fälle zu unterscheiden, ob der Winkel OAB, welcher sich von 0° bis 180° ändern kann, weniger, ebensoviel oder mehr als der Winkel $A''OB$ beträgt; im ersten Falle schneidet die Ebene nur die eine Hälfte der Fläche, und zwar in einer geschlossenen krummen Linie*), im zweiten Falle schneidet die Ebene gleichfalls nur den einen Theil der Fläche, aber in einer krummen Linie von unendlicher Ausdehnung, im dritten Falle trifft der Schnitt beide Theile der Fläche und bildet daher eine Linie, welche aus zwei zusammengehörigen, ins Unendliche gehenden Zweigen besteht. Eine genauere Untersuchung dieser krummen Linien giebt das nächste Capitel.

Fig. 76.



§. 28.

Kegel- und Kugelfläche.

Um die verschiedenen möglichen Lagen einer Kugel gegen eine Kegelfläche beurtheilen zu können, legen wir

---

*) Um die Figur nicht mit krummen Linien zu überladen, ist nur die Vorderseite des Kegels, also von jedem Schnitte desselben nur die Hälfte, gezeichnet worden.

durch die Achse des Kegels und durch den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene, welche den Kegel in zwei Geraden und die Kugel in einem grössten Kreise schneidet; die verschiedenen möglichen Lagen dieses Kreises gegen jene zwei sich schneidenden Geraden bestimmen jetzt die verschiedenen Fälle, welche eintreten können. Betrachtet man zunächst nur einen Theil der Kegelfläche, so gelten fast wörtlich dieselben Unterscheidungen wie in §. 26, die wir eben desshalb nicht wiederholen wollen; durch Hinzunahme der zweiten Hälfte wird aber die Discussion um einige Fälle reicher; es kann nämlich die Kugel beide Theile der Kegelfläche schneiden, oder den einen Theil schneiden und den anderen berühren, oder endlich beide Theile berühren. Die Untersuchung der krummen Linien, welche bei den verschiedenen Durchschnitten entstehen, gehört nicht mehr zur Elementargeometrie, doch werden wir im letzten Abschnitte dieses Werkes zeigen, wie die Projectionen dieser Linien construirt werden können.

Endlich würden noch die gegenseitigen Lagen einer Kegel- und einer Cylinderfläche, sowie zweier Kegelflächen zu betrachten sein. Die Discussion der hierbei möglichen Fälle hat keine Schwierigkeit, wenn die Achsen beider Flächen in einer Ebene liegen, sie wird dagegen verwickelter, sobald dieser günstige Umstand nicht stattfindet. Doch wird auch hier der letzte Abschnitt dazu dienen, um jeden gegebenen speciellen Fall zur Entscheidung zu bringen.

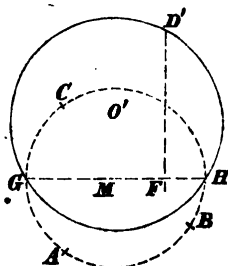
Constructionen zu Cap. V.

---

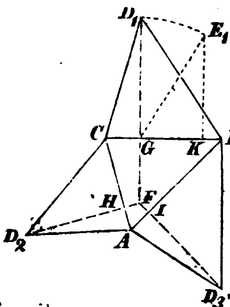
1) Um eine gegebene dreiseitige Pyramide eine Kugel zu beschreiben. Die Basis der Pyramide sei ABC, ihre Spitze D, der Mittelpunkt des um die Grundfläche beschriebenen Kreises heisse M und F der Fuss-

punkt des von D auf ABC herabgelassenen Perpendikels; nach dem Früheren ist der Mittelpunkt O der umschriebenen Kugel in einer Geraden zu suchen, welche durch M normal zur Basis, also parallel zu FD gezogen ist; durch jene Normale und diese Höhe FD bestimmt sich eine Ebene DFM, welche die Kugelfläche in einem grössten Kreise und die Basis in der Geraden MF schneidet. Letztere Gerade ist nichts Anderes als die gemeinschaftliche Sehne des grössten Kreises und des um ABC gelegten Kreises; verlängert man also FM bis zu den Durchschnitten G und H mit dem um ABC beschriebenen Kreise, so muss der grösste Kreis durch G und H gehen. Ausserdem soll derselbe durch den Punkt D gehen, welcher gleichfalls in der Ebene DFM enthalten ist; man kennt also die Ebene des grössten Kreises und in ihr drei Punkte von ihm, mithin Data genug zu dessen Construction. Um letztere in einer Ebene auszuführen, denken wir uns das Netz der dreiseitigen Pyramide in die Ebene ihrer Basis auseinandergelegt und bestimmen, wie bei den Constructionen zu Cap. III., den Fusspunkt F der Senkrechten DF, sowie die Höhe der Pyramide, wenn diese nicht unmittelbar bekannt sein sollte; wir verbinden ferner F mit dem Mittelpunkte M des um ABC beschriebenen Kreises und legen die Ebene FMD durch Drehung um FM in die Ebene ABC um, so dass FD' senkrecht auf MF und gleich der Höhe der Pyramide ist. Verlängern wir jetzt FM bis zu den Durchschnitten G und H mit dem Kreise um ABC, so ist der durch D', G und H gehende Kreis ein grösster Kreis der umschriebenen Kugel, $O'D'$ ihr Halbmesser und $O'M$ die Höhe ihres Mittelpunktes über der Ebene ABC.

Fig. 77.

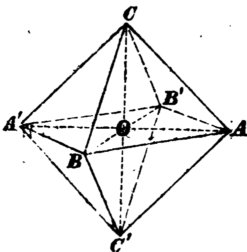


2) In eine gegebene dreiseitige Pyramide eine Kugel zu beschreiben. Wenn durch die Höhe DF der dreiseitigen Pyramide $DABC$ eine Ebene normal zur Kante BC gelegt wird (was nach dem früheren immer möglich ist) und G der Durchschnitt heisst, so ist $\angle DGF$



der an der Kante BC liegende Neigungswinkel A; vermöge der Bemerkung, dass er in einem rechtwinkligen Dreiecke DFG zwischen der Kathete FG und der Hypotenuse DG liegt, kann er in der Netzebene leicht construirt werden, indem man $GK = GF$ als Kathete und $GE_1 = GD_1$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks nimmt, worin jetzt $\angle E_1GK = A$ ist. Auf gleiche Weise können die übrigen an der Basis der Pyramide liegenden Neigungswinkel B, C gefunden werden. Halbirt man dieselben und construirt über der Basis ABC eine neue dreiseitige Pyramide mit den Neigungswinkeln $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$, so ist ihre Spitze der Mittelpunkt und ihre Höhe der Radius der eingeschriebenen Kugel; nach No. 3, S. 53 lässt sich das Netz der neuen Pyramide, mithin auch ihre Höhe construiren, und somit die Aufgabe durch Zeichnung in einer Ebene lösen.

3) In und um ein reguläres Polyeder eine Kugel zu beschreiben. Wir bemerken zunächst, dass es nach der in §. 12 angegebenen Entstehungsweise der regulären Körper nicht die mindeste Schwierigkeit hat, den Neigungswinkel zweier Seitenflächen eines regelmässigen Körpers zu construiren. Ist nämlich jede Ecke von drei Seitenebenen gebildet, wie bei dem Tetraeder, Würfel und Dodekaeder, so bedarf es nur der Anwendung des auf S. 52, No. 1 angegebenen Verfahrens; beim Oktaeder construirt man eine dreiseitige Ecke aus den Seiten $ABC = 60°$,



$A'BC = 60°$, $ABA' = 90°$, so ist der an der Kante BC liegende Neigungswinkel der gesuchte Winkel; bei dem Ikosaeder construirt man die dreiseitige Ecke an B' aus den Seiten $A'B'F' = 60°$, $C'B'F' = 60°$, $A'B'C' = 108°$, so ist der an $B'F'$ liegende Neigungswinkel der gesuchte Winkel. Man kann ferner

um das regelmässige Vieleck, welches die eine Seitenfläche des Polyeders bilden soll, einen Kreis beschreibed und nach Vornahme beider Constructionen kennt man für zwei an einer Kante AB zusammenstossende Seitenflächen die Kreismittelpunkte M, N, ihre Entfernungen von AB und den Winkel MSN. Das Viereck $MSNO$ kann jetzt in irgend einer beliebigen Ebene construirt werden und giebt $MO = NO$ als Halbmesser der eingeschriebenen Kugel; bildet man ferner ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete MO und dessen andere Kathete die bekannte Gerade MB ist, so erhält man als Hypotenuse OB den Halbmesser der umschriebenen Kugel.

Fig. 80.

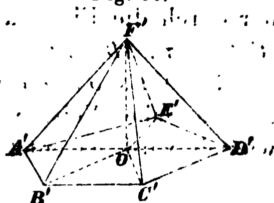
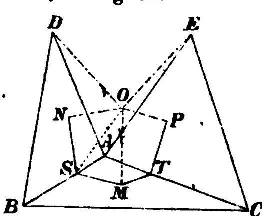
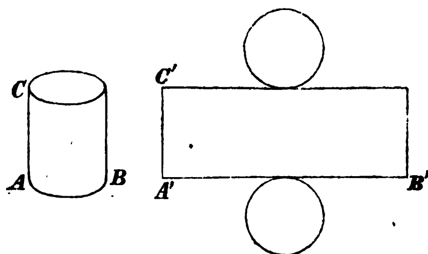


Fig. 81.



4) Das Netz des Cylinders. Vermöge des Umstandes, dass eine Ebene die Cylinderfläche längs einer Geraden berührt, lässt sich der Mantel eines Cylinders in eine Ebene ausbreiten; rollt nämlich der Cylinder auf einer Ebene fort, so bleibt diese immer Berührungsebene, und die Gerade, längs welcher die Berührung erfolgt, wird der Reihe nach mit allen Geraden identisch, welche auf der Fläche gezogen werden können. Diese sogenannte Abwickelung des Cylindermantels liefert ein Rechteck, dessen Basis der Peripherie der Cylinderbasis und dessen Höhe der Cylinderhöhe gleichkommt. Die Basis des Cylinders und die gegenüberliegende Fläche sind Kreise von bekanntem Radius und können leicht in die Ebene des abgewickelten Mantels umgelegt werden. Das vollständige Netz

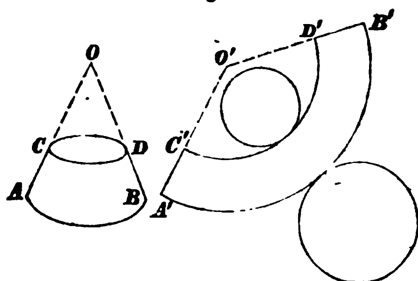
Fig. 82.



besteht daher aus einem Rechtecke und zwei Kreisen in der durch die Figur angegebenen Form, und es ist dabei $A'B' = \pi . AB$, $A'C' = AC$.

5) Das Netz des Kegels. Wenn der Kegelmantel auf ähnliche Weise wie vorhin der Cylindermantel abgewickelt wird, so entsteht ein Kreisausschnitt, dessen Halb-

Fig. 83.



messer gleich der Seite des Kegels und dessen Bogen gleich der Peripherie der Kegelbasis ist; man hat daher, wenn AB den Durchmesser der Basis und OA die Seite bedeutet, $O'A' = OA$, Arc $A'B' = \pi . AB$ oder in Theilen des Halbmessers

$$\angle A'O'B' = \frac{\pi . AB}{AO}.$$

Auf gleiche Weise kann der Mantel des abgestumpften Kegels abgewickelt werden. Um das Netz vollständig zu haben ist noch die Basis und die beim abgestumpften Kegel ausserdem vorhandene Parallelfläche in dieselbe Ebene umzulegen.

Cap. VI.

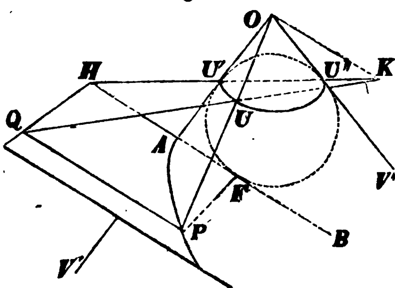
Die Kegelschnitte.

§. 29.

Allgemeine Eigenschaften der Kegelschnitte.

Die Ebene des Neigungswinkels der Kegelachse gegen die schneidende Ebene bildet mit dem Kegel einen aus zwei Geraden bestehenden Schnitt $V'OV''$, den Hauptschnitt; dieser Hauptschnitt und die schneidende Ebene haben die Gerade AB gemein, welche man die Hauptachse des Kegelschnittes AP zu nennen pflegt, weil sie, wie leicht zu sehen ist, den Kegelschnitt in zwei congruente Hälften theilt. Denkt man sich ferner einen Kreis construirt, welcher OV' in U', OV'' in U'' und die Hauptachse AB in F berührt, so liegt der Mittelpunkt dieses Kreises auf der Kegelachse, und während die Umdrehung von $\angle V'OV''$ um die Kegelachse die Kegelfläche erzeugt, beschreibt die Peripherie des Kreises $U'FU''$ bei derselben Umdrehung eine Kugelfläche; letztere berührt den Kegel in einem Kreise $U'UU''$, dessen Ebene senkrecht zur Kegelachse ist. Gleichzeitig berührt die Kugelfläche auch die Schnittebene im Punkte F, welcher der Brennpunkt (Focus) des Kegelschnittes heisst. Ferner schneidet die Ebene des Kreises $U'UU''$, hinreichend erweitert, die Kegelschnittsebene in einer Geraden HQ, die senkrecht auf der Hauptachse AB steht und die Directrix des Kegelschnittes genannt wird. Endlich ist zu bemerken, dass die verschiedenen Formen der Kegelschnitte, die wir in §. 27 durch die Fälle

Fig. 84.



$$\angle OAB < 180^0 - \angle AOV'', \quad \angle OAB = 180^0 - \angle AOV'',$$
$$\angle OAB > 180^0 - \angle AOV''$$

unterschieden haben, auch durch ein anderes Kennzeichen

bestimmt werden können. Zieht man nämlich durch O parallel zu AB eine Gerade, welche die nöthigenfalls verlängerte $U'U''$ in K schneidet, so kommt im ersten der genannten Fälle K auf die Verlängerung von $U'U''$ zu liegen, im zweiten Falle ist K identisch mit U'' und im letzten Falle liegt K zwischen U'' und U'. Statt dessen kann man auch sagen, im ersten Falle ist

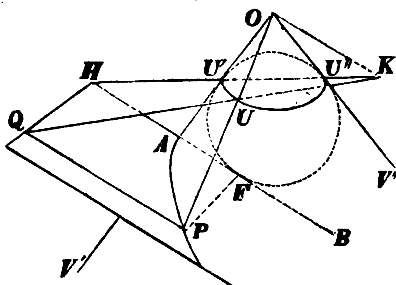


Fig. 84.

$$OU'' < OK \text{ oder } \frac{OU''}{OK} < 1,$$

im zweiten Falle

$$OU'' = OK \text{ oder } \frac{OU''}{OK} = 1,$$

und im letzten Falle

$$OU'' > OK \text{ oder } \frac{OU''}{OK} > 1;$$

das Verhältniss $\frac{OU''}{OK}$ bestimmt also die Form des Kegelschnittes und mag deshalb die **Charakteristik** des Kegelschnittes heissen.

Verbindet man irgend einen Punkt P des Kegelschnittes geradlinig mit der Kegelspitze O, so ist OP eine der erzeugenden Geraden des Kegels; sie schneidet den Kreis $U'UU''$ im Punkte U und berührt in demselben Punkte die vorhin construirte Kugel $U'FU''U$. Ferner lässt sich durch die drei Punkte O, K und U eine Ebene legen, welche bei hinreichender Erweiterung die Ebene ABP in der Geraden PQ schneidet; zufolge des Umstandes, dass die Ebene OKU die Gerade OK enthält, welche parallel AB also auch parallel zur Ebene ABP liegt, ist der Durchschnitt $PQ \parallel OK \parallel AB$ mithin senkrecht zu HQ, d. h. PQ ist der Abstand des Punktes P von der Directrix. Aus den ähnlichen Dreiecken PUQ und OUK hat man

$$\frac{PU}{PQ} = \frac{OU}{OK}.$$

Linker Hand lässt sich die Kugeltangente PU durch die ihr gleiche Kugeltangente PF ersetzen; letztere ist die Entfernung des Punktes P vom Brennpunkte F und heisst der **Radiusvector** oder **Brennstrahl** des Punktes P. Rech-

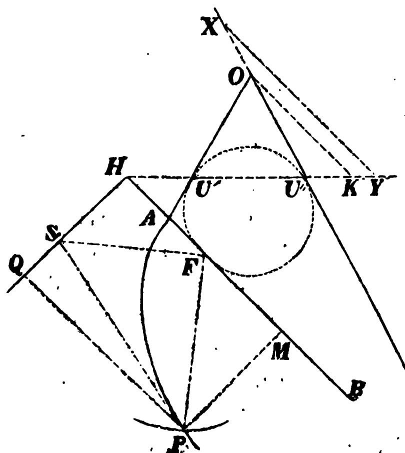
ter Hand kann statt der Kugeltangente OU die gleiche Kugeltangente OU'' genommen werden, und nach diesen Substitutionen geht die vorige Gleichung über in

$$\frac{PF}{PQ}=\frac{OU''}{OK}$$

d. h.: Für jeden Punkt irgend eines Kegelschnittes ist das Verhältniss seines Brennstrahles zu seiner Entfernung von der Directrix constant und zwar gleich der Charakteristik des Kegelschnittes.

Mittelst dieses Satzes kann man leicht einen Kegelschnitt construiren, wenn der Hauptschnitt des Kegels und die Lage der schneidenden Ebene gegeben sind; wir denken uns hierbei die Schnittebene ABP soweit um die Hauptachse AB gedreht, dass sie mit der Ebene AOV'' zusammenfällt. In dieser Ebene hat man zunächst einen Kreis zur construiren, welcher den Hauptschnitt des Kegels in den Punkten U' und U'', sowie AB im Brennpunkte F berührt; die verlängerte $U'U''$ schneidet ferner AB in einem Punkte H, und eine in H senkrecht zu AB errichtete Gerade ist die Directrix des Kegelschnitts. Zieht man parallel zu AB irgend eine Gerade, welche $U''O$ in X, $U'U''$ in Y schneidet, so stehen XU'' und XY in demselben Verhältnisse wie OU'' und OK, mithin lässt sich XU'' als Brennstrahl eines Kegelschnittpunktes und XY als dessen Entfernung von der Directrix ansehen. Man beschreibt daher aus F mit dem Halbmesser XU'' einen Kreis, nimmt $HM=XY$ und errichtet in M eine auf AB senkrechte Gerade; letztere schneidet jenen Kreis in einem Punkte P, welcher ein Punkt des Kegelschnittes ist. Das-

Fig. 85.



selbe gilt von dem zweiten Durchschnittspunkte jenes Kreises und der Geraden; er liegt dem Punkte P gegenüber auf der anderen Seite der Hauptachse und zwar so, dass sein Abstand von AB entgegengesetzt $= MP$ ist. Hiernach kann man beliebig viele Punkte des Kegelschnittes construiren und dieselben in so kurzen Entfernungen auf einander folgen lassen, als es die Genauigkeit der Zeichnung erfordert.

Wie bei dem Kreise so untersuchen wir auch hier die verschiedenen Lagen, welche eine Gerade gegen den Kegelschnitt haben kann, und denken uns zu diesem Zwecke in der Schnittebene ABP eine Gerade g gegeben. Durch diese und die Kegelspitze ist eine Ebene bestimmt, welche den Kegel entweder in zwei Geraden schneidet, oder längs einer Geraden berührt, oder keinen Punkt ausser O mit dem Kegel gemein hat. Welcher von diesen Fällen stattfindet, ist leicht zu entscheiden, wenn man den Kreis $U'UU''$ als Directrix des Kegels ansieht und auf die Gerade g' achtet, in welcher die genannte Hilfsebene durch g und O die Kreisebene $U'UU''$ schneidet. Wenn nämlich g' Secante des Kreises $U'UU''$ ist, so findet der erste Fall statt und dann schneidet g den Kegelschnitt zweimal; ist dagegen g' Tangente an dem Kreise $U'UU''$, so hat g mit dem Kegelschnitte nur einen Punkt gemein und heisst dann analog eine Tangente des Kegelschnittes; wenn endlich g' ganz ausserhalb des Kreises $U'UU''$ liegt, so giebt es auch keinen Punkt, welcher der Geraden g und dem Kegelschnitte gemein wäre. D. h.: Eine Gerade kann einen Kegelschnitt höchstens in zwei Punkten schneiden, sie kann ihn aber auch in einem Punkte berühren oder gar keinen Punkt mit ihm gemein haben.

Die Bedingungen, unter denen der zweite Fall eintritt, wollen wir etwas näher untersuchen. Wie früher sei P ein beliebiger Kegelschnittspunkt und U der Punkt, in welchem die Gerade OP den Kreis $U'UU''$ schneidet und die Kugel $U'FU''U$ berührt. Legt man durch U an den genannten Kreis die Tangente UT, so bestimmen UT und UO die Berührungsebene des Kegels, und diese Ebene

schneidet die Ebene ABP in der Kegelschnittstangente PS. Zufolge des Umstandes, dass die Geraden TU und PS in einer und derselben Berührungsebene nach verschiedenen Richtungen liegen, muss es einen Durchschnitt von TU und PS geben; dieser kann aber, weil TU und PS den verschiedenen Ebenen $U'UU''$ und ABP angehören, nur in der Geraden liegen, welche den beiden genannten Ebenen gemeinschaftlich ist, d. h. der Durchschnitt S fällt in die Directrix des Kegelschnittes. Verbindet man noch S mit F, so erhält man zwei Dreiecke PSF und PSU, welche die Seite PS gemein haben, worin ausserdem die Kugeltangente PF gleich der Kugeltangente PU, und ebenso die Kugeltangente SF gleich der Kugeltangente SU ist; hieraus folgt die Congruenz der Dreiecke PSF und PSU. Berücksichtigt man ferner, dass der Kreisradius LU senkrecht auf der Tangente US steht, so findet man leicht $\angle OUS = \angle SUP = 90^0$; das Dreieck PSU enthält also einen rechten Winkel, mithin ist auch das Dreieck PSF rechtwinklig bei F. Dieses Ergebniss lässt sich in dem Satze aussprechen: **Die Tangente an irgend einem Kegelschnittspunkte geht durch denselben Punkt der Directrix wie eine im Brennpunkte auf dem zugehörigen Brennstrahle errichtete Senkrechte.**

Fig. 86.

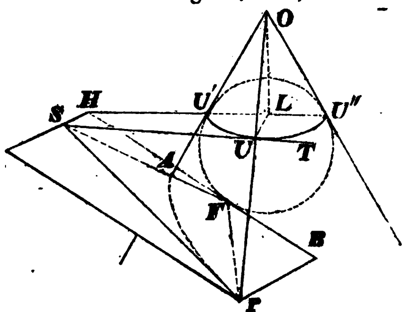
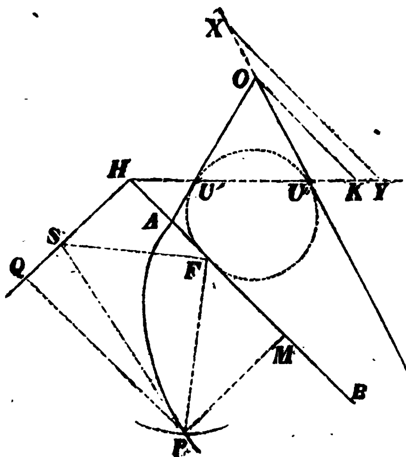


Fig. 85.



Man findet daher die

zum Kegelschnittspunkte P gehörende Tangente, wenn man in F auf PF eine Senkrechte errichtet, welche die Directrix in S schneidet und schliesslich PS zieht.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen gehen wir zu einer specielleren Untersuchung der einzelnen Kegelschnittsformen über und unterscheiden dabei die anfangs erwähnten drei Fälle, für welche besondere Namen üblich geworden sind; je nachdem die Charakteristik < 1, $= 1$ oder > 1 ist, heisst nämlich der Kegelschnitt eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel.

§. 30.

Die Parabel.

Zufolge der gegebenen Definition ist der Radiusvector jedes Parabelpunktes gleich der Entfernung dieses Punktes von der Directrix, also $FP = PQ$; daher gilt auch für den Anfangspunkt der Hauptachse die Gleichung $FA = AH$.

Fig. 87.

Ersetzt man in der vorhergehenden Gleichung den Abstand PQ durch die gleiche Gerade $HM = AM + AH = AM + AF$, so hat man die neue Relation

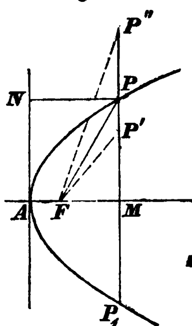
$FP = AM + AF$ oder $FP - AM = AF$,

welche sich leicht in Worte übertragen lässt, wenn zur Abkürzung A der Scheitel der Parabel, AM die Abscisse und MP die Ordinate des Punktes P genannt wird. Man erhält den Satz: Für jeden Parabelpunkt ist der Unterschied zwischen Brennstrahl und Abscisse constant nämlich gleich der Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel.

Hieraus ergiebt sich ein einfaches Mittel zur Construction der Parabel, wenn deren Scheitel und Brennpunkt entweder unmittelbar gegeben oder aus dem Hauptschnitte des Kegels und der Lage der schneidenden Ebene abgeleitet sind. Man trägt nämlich auf die rückwärts verlängerte Hauptachse die Strecke $AH = AF$, errichtet in einem

beliebigen Punkte M eine unbestimmt lange Senkrechte auf der Achse und beschreibt aus dem Brennpunkte mit der Strecke MH einen Kreisbogen, der jene Senkrechte in zwei Punkten P und P_1 schneidet; letztere sind diejenigen zwei Punkte der Parabel, welche zur Abscisse AM gehören. Indem man diese Construction für verschiedene beliebig gewählte M wiederholt, erhält man so viel Punkte der Parabel als man will.

Fig. 88.



Ist FP von $AM + AF$ verschieden, so kann der Punkt P nicht auf der Parabel liegen und ist dann entweder innerhalb oder ausserhalb des von der Parabel umfassten unendlichen ebenen Raumes zu suchen; der erste Fall tritt ein, wenn seine Ordinate MP' kleiner als die zu derselben Abscisse gehörende Parabelordinate MP ist, der zweite Fall, wenn MP'' mehr als MP beträgt. Für den ersten Punkt hat man $FP' < FP$, d. i. $FP' < AM + AF$ und auch umgekehrt, wenn $FP' < AM + AF$, ist $FP' < FP$; ebenso leicht findet man, dass für $FP'' > AM + AF$ die Beziehung $FP'' > FP$ folgt; man hat daher den Satz: Ein Punkt liegt innerhalb der Parabelfläche, auf der Peripherie, oder ausserhalb derselben, je nachdem sein Brennstrahl weniger, ebenso viel oder mehr beträgt, als seine Abscisse und die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel zusammengenommen.

§. 31.

Die Parabel und die Gerade.

I. Wir betrachten zuerst die Tangenten der Parabel etwas genauer. Nach §. 29 geht die zum Parabelpunkte P gehörende Tangente durch denselben Punkt S der Directrix wie eine in F auf den Radiusvector FP errichtete Senkrechte, und daher sind die Dreiecke PFS und PQS gleichzeitig rechtwinklig. Da sie ausserdem die gemeinschaftliche Hypotenuse OS und die gleichen Katheten PF und PQ

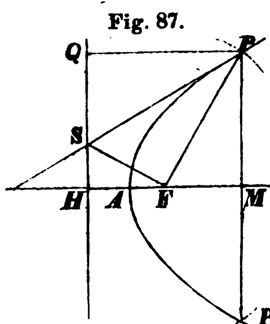


Fig. 87.

besitzen, so sind die genannten Dreiecke congruent; daraus folgt $\angle FPS = \angle QPS$, d. h: Die Tangente an einem Parabelpunkte bildet mit dem Brennstrahl dieses Punktes denselben Winkel wie mit der Parabelachse.

Um hiernach durch einen gegebenen Parabelpunkt P eine Tangente PT zu legen, zieht man PF, ferner $PR' \parallel FA$ und halbirt den Winkel FPR'. Da das Dreieck FPR zwei gleiche Winkel besitzt, so ist es auch gleichschenklig, und zwar $FR = FP$, woraus sich eine zweite Tangentenconstruction ergiebt. Man hat noch $AR = FR - AF = FP - AF = AM$; die Tangente wird daher auch dadurch erhalten, dass man $AR = AM$ nimmt und RP zieht.

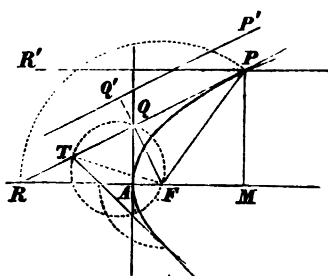


Fig. 89.

Eine im Scheitel auf der Achse errichtete Senkrechte bildet mit dem Leitstrahl FA denselben Winkel ($= 90^0$) wie mit der Achse und berührt daher die Parabel im Scheitel; wir wollen diese besondere Tangente die Scheiteltangente nennen. Ihr Durchschnitt mit der beliebigen Tangente PR heisse Q, so hat man die ähnlichen Dreiecke RAQ und RMP, mithin, weil $RA = \frac{1}{2} RM$, entsprechend $RQ = \frac{1}{2} RP$ oder $QR = QP$; ausserdem ist in den Dreiecken FQR und FQP, $FR = FP$ und $FQ = FQ$, folglich $\triangle FQR \cong \triangle FQP$ und $\angle FQR = \angle FQP = 90^0$; ebenso muss umgekehrt eine von F auf PR gefällte Senkrechte durch die Mitte von PR gehen und ihren Fusspunkt in der Scheiteltangente haben, d. h.: Lässt man vom Brennpunkte der Parabel eine Senkrechte auf irgend eine Tangente an der Parabel herab, so liegt der Fusspunkt dieses Perpendikels auf der Scheiteltangente.

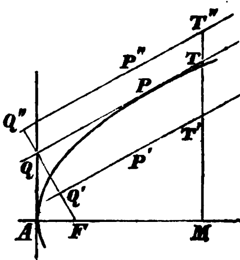
Dieser Satz bietet das Mittel zur Lösung zweier Be-

rührungsaufgaben. Soll nämlich an eine gegebene Parabel eine Tangente gelegt werden, welche einer gegebenen Geraden $P'Q'$ parallel ist, so fälle man von F auf $P'Q'$ ein Perpendikel, welches die Scheiteltangente in einem Punkte Q schneidet, und ziehe durch diesen Punkt $RQ \parallel P'Q'$; diese Gerade ist die gesuchte Tangente und ihr Berührungspunkt findet sich dadurch, dass man RQ mittelst eines aus dem Mittelpunkte F mit dem Radius FR beschriebenen Kreises schneidet. Die Aufgabe ist immer möglich, wenn $P'Q'$ nicht parallel zur Achse liegt.

Soll zweitens durch einen gegebenen Punkt T eine Tangente an die Parabel gelegt werden, so kommt es nur darauf an, einen rechten Winkel TQF zu construiren, von welchem der eine Schenkel durch T, der andere durch F geht, und dessen Spitze in der Scheiteltangente liegt. Man erreicht dies dadurch, dass man über der Geraden TF als Durchmesser einen Kreis beschreibt, welcher die Scheiteltangente in Q schneidet, TQR zieht und den Berührungspunkt P wie vorhin bestimmt. Da ein Kreis eine Gerade im Allgemeinen zweimal schneidet, so giebt es in der Regel auch zwei Lösungen der Aufgabe; dagegen existirt nur eine Lösung, wenn T entweder auf der Parabel oder auf der Scheiteltangente liegt, endlich wird die Aufgabe unmöglich, wenn der Kreis die Gerade weder schneidet noch berührt, was der Fall ist, wenn T im Innern der Parabel liegt.

II. Lassen wir auf eine nicht berührende Gerade $P'Q'$ oder $P''Q''$ von F aus eine Senkrechte herab, so kann deren Fusspunkt Q' oder Q'' nicht auf die Scheiteltangente fallen, er kommt demnach entweder zwischen F und die Scheiteltangente oder jenseits der letzteren zu liegen; im ersten Falle ist, wenn PQ eine zur gegebenen Geraden parallele Tangente bedeutet, $FQ' < FQ$, im zweiten $FQ'' > FQ$. Betrachten wir die letztere Annahme zunächst und lassen von einem beliebigen Punkte T'' der Geraden $P''Q''$ auf die Parabel-

Fig. 90.



achse die Senkrechte $T''M$ herab, welche die Tangente PQ in T schneidet, so bemerken wir leicht, dass wegen $FQ'' > FQ$ auch $MT'' > MT$ sein muss; T aber liegt keinenfalls innerhalb der Parabelfläche, folglich T'' ganz sicher ausserhalb derselben; d. h. wenn $FQ'' > FQ$, so hat die Gerade $P''Q''$ keinen einzigen Punkt mit der Parabel gemein.

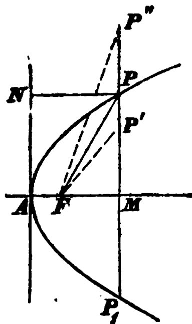
Ist zweitens $FQ' < FQ$, so kann $P'Q'$ weder Tangente noch eine ausserhalb liegende Gerade sein, es bleibt daher nur der eine noch mögliche Fall übrig, dass $P'Q'$ die Parabel in zwei Punkten schneidet. — Das Gesammtresultat dieser Untersuchung besteht in folgendem Satze: **Eine Gerade hat mit einer Parabel zwei Punkte, einen Punkt oder keinen Punkt gemein, je nachdem der Fusspunkt des vom Brennpunkte auf die Gerade herabgelassenen Perpendikels zwischen Brennpunkt und Scheiteltangente, auf die Scheiteltangente oder jenseits derselben zu liegen kommt.**

§. 32.
Die Quadratur der Parabel.

Um die zwischen Brennstrahl und Abscisse eines Parabelpunktes bestehende Gleichung in eine andere, zwischen der Abscisse $AM = NP$ und der Ordinate $MP = AN$ stattfindende umzuwandeln, setzen wir in der Gleichung

$$\overline{MP}^2 = \overline{FP}^2 - \overline{FM}^2 = (FP - FM)(FP + FM)$$

Fig. 88.



$AM + AF$ für FP und $AM - AF$ für FM; es ergiebt sich

$$\overline{MP}^2 = 2AF \,.\, 2AM = 4AF \,.\, AM$$

oder umgekehrt, wenn $AM = NP$ durch $MP = AN$ ausgedrückt wird,

$$NP = \frac{\overline{AN}^2}{4AF}.$$

Von dieser Gleichung machen wir Gebrauch zur Bestimmung des Inhaltes derjenigen parabolischen Fläche, welche von

einer Strecke AV der Scheiteltangente, einer in V errichteten, die Parabel in W schneidenden Senkrechten und dem Parabelbogen AW begränzt wird.

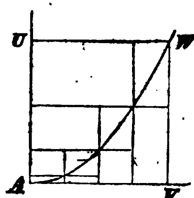


Fig. 91.

Die Gerade AV theilen wir in n gleiche Theile und ziehen durch jeden Theilpunkt eine Senkrechte zu AV; die gesuchte Fläche zerfällt dadurch in eine Reihe von Streifen, von denen jeder über der Basis $\frac{AV}{n}$ steht. Zur Abkürzung sei $AV = x$ und $AF = c$, die einzelnen in den Entfernungen $\frac{x}{n}, 2\frac{x}{n}, 3\frac{x}{n} \dots n\frac{x}{n}$ errichteten Senkrechten sind sodann der Reihe nach

$$\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{4c}, \frac{\left(\frac{2x}{n}\right)^2}{4c}, \frac{\left(\frac{3x}{n}\right)^2}{4c}, \dots \frac{\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2}{4c}, \frac{\left(\frac{nx}{n}\right)^2}{4c}.$$

Beschreiben wir sowohl in als um jeden Streifen ein Rechteck, so ist jedes eingeschriebene Rechteck kleiner und jedes umschriebene grösser als der entsprechende Streifen, mithin auch die Summe aller eingeschriebenen Rechtecke kleiner und die aller umschriebenen grösser als die gesuchte parabolische Fläche, die wir S nennen wollen. Dieser Bemerkung zufolge gelten die beiden Ungleichungen

$$S > \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{4c}\frac{x}{n} + \frac{\left(\frac{2x}{n}\right)^2}{4c}\frac{x}{n} + \frac{\left(\frac{3x}{n}\right)^2}{4c}\frac{x}{n} + \dots + \frac{\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2}{4c}\frac{x}{n}$$

und

$$S < \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{4c}\frac{x}{n} + \frac{\left(\frac{2x}{n}\right)^2}{4c}\frac{x}{n} + \frac{\left(\frac{3x}{n}\right)^2}{4c}\frac{x}{n} + \dots + \frac{\left(\frac{nx}{n}\right)^2}{4c}\frac{x}{n}$$

oder bei gehöriger Reduction

$$S > \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3}\frac{x^3}{4c}$$

$$S < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}\frac{x^3}{4c}.$$

Die Differenz der beiden Rechteckssummen, zwischen denen S liegt, ist $\frac{1}{n}\frac{x^3}{4c}$, ein Ausdruck, welcher bei unendlich wachsenden n unter jede gegebene noch so kleine Zahl herabsinken kann; hieraus folgt, dass die Grössen, zwischen denen S enthalten ist, sich für unendlich wachsende n einer gemeinschaftlichen Gränze nähern, welche nur S selber sein kann. Demnach hat man

$$S = \text{Gränzwerth von } \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}\frac{x^3}{4c},$$

oder nach dem schon in §. 16 benutzten arithmetischen Satze

$$S = \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{4c}.$$

Giebt man diesem Ausdrucke die Form

$$S = \tfrac{1}{3}x\frac{x^2}{4c},$$

so bedeutet $\frac{x^2}{4c}$ die Gerade $VW = AU$ und es ist daher

$$\text{Fläche } AVW = \tfrac{1}{3}.AV.VW = \tfrac{1}{3}AV.AU;$$

man zieht hieraus die weitere Folgerung

$$\text{Fläche } AUW = \tfrac{2}{3}AU.AV,$$

es ist also die parabolische Fläche AUW gleich zwei Drittheilen des umschriebenen Rechtecks $AUWV$.

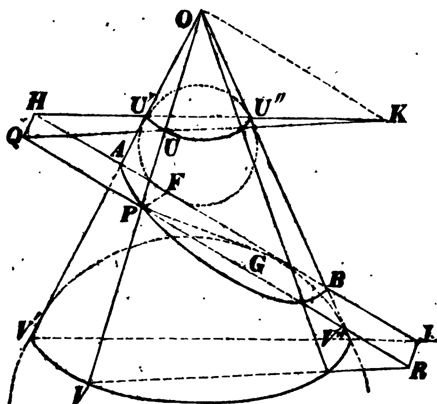
Die Rectification der Parabel übersteigt die Kräfte der Elementargeometrie.

§. 33.
Die Ellipse.

Wie in §. 29 sei $V'OV''$ der Hauptschnitt des gegebenen Kegels, HI die Gerade, welche der Ebene $V'OV''$ und der Schnittebene HIP gemeinschaftlich angehört, und AB das zwischen die Schenkel des Winkels $V'OV''$ fallende Stück der Geraden HI; die Strecke AB heisst dann die grosse Achse der Ellipse, ihre Endpunkte A und B nennt man die Hauptscheitel des Schnittes. Ausser

der schon früher erwähnten Berührungskugel, welche den Brennpunkt F und die Directrix HQ bestimmt, lässt sich hier noch eine zweite, auf der entgegengesetzten Seite der Schnittebene liegende Berührungskugel construiren; diese berührt die Schnittebene in einem Punkte G und den Kegel in einem Kreise $V'VV''$, dessen Ebene mit der Schnittebene den Durchschnitt IR bildet. Den Punkt G nennen wir den zweiten Brennpunkt, die Gerade IR die zweite Directrix der Ellipse.

Fig. 92.



Die Lagen von G und IR bestimmen sich auf folgende Weise. Wegen der Gleichheit aller von einem Punkte an eine Kugel gelegten Tangenten ist

$$AF = AU', \quad AG = AV',$$

mithin

$$AF + AG = U'V' \text{ oder } 2AF + FG = U'V'.$$

Mittelst derselben Schlussweise erhält man, von B ausgehend

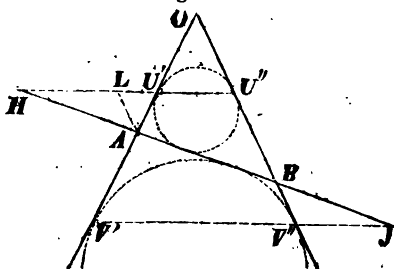
$$2BG + GF = U''V'',$$

und da $U''V'' = U'V'$ ist, so giebt die Vergleichung beider Resultate

$$2AF + FG = 2BG + GF \text{ d. h. } AF = BG;$$

die Brennpunkte liegen also symmetrisch gegen die Hauptscheitel der Ellipse. Zieht man ferner durch A parallel zu OU'' eine Gerade, welche HU' in L schneidet, so entstehen die

Fig. 93.



ähnlichen Dreiecke ALU' und $OU'U''$; das letztere ist gleichschenklig, mithin $AL = AU' = AF = BG = BV''$. Die Dreiecke AHL und BIV'' stimmen ausser in den Seiten AL und BV'' noch in den Winkeln überein und sind daher congruent; dies giebt $AH = BI$, d. h. die zweite Directrix ist eben so weit vom zweiten Hauptscheitel entfernt, wie die erste vom ersten.

Den Betrachtungen, welche in §. 29 an die ähnlichen Dreiecke PUQ und OUK geknüpft wurden, können wir jetzt eine Ergänzung hinzufügen. Die Ebene jener Dreiecke schneidet nämlich die Ebene des zweiten Berührungskreises in einer Geraden $VR \parallel UQ$, und dadurch entsteht ein neues Dreieck PVR, welches den beiden vorigen Dreiecken ähnlich ist; man hat daher

$$\frac{PV}{PR} = \frac{OU}{OK}$$

oder wenn links PV durch PG, rechts OU durch OU'' ersetzt wird

$$\frac{PG}{PR} = \frac{OU''}{OK}.$$

D. h.: Das Verhältniss zwischen dem Brennstrahl eines Ellipsenpunktes und dessen Entfernung von der Directrix bleibt unverändert, wenn der erste Brennpunkt gegen den zweiten und zugleich die erste Directrix gegen die zweite vertauscht wird.

Zur Abkürzung bezeichnen wir die Charakteristik $OU'' : OK$ mit ε; es ist dann

$$PF = \varepsilon \,.\, PQ, \quad PG = \varepsilon \,.\, PR$$

mithin durch Addition

$$PF + PG = \varepsilon \,.\, QR = \varepsilon \,.\, HI;$$

die Brennstrahlen geben also eine constante Summe. Den Betrag der letzteren findet man leicht, indem man denselben Satz auf den Scheitel A anwendet; es ist dann $AF + AG = \varepsilon \,.\, HI$ mithin

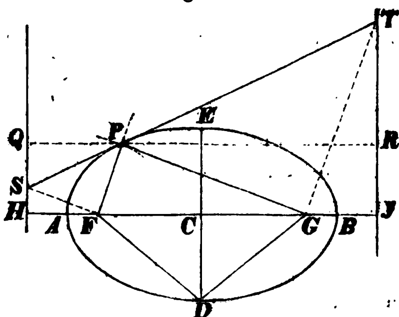
$$PF + PG = AF + AG = BG + AG = AB$$

d.h.: Für jeden Ellipsenpunkt ist die Summe der

Brennstrahlen unveränderlich gleich der grossen Achse der Ellipse.*)

Hieraus ergiebt sich ein einfaches Mittel zur Construction der Ellipse, wenn deren grosse Achse und ihre Brennpunkte entweder unmittelbar gegeben oder durch die Lage der schneidenden Ebene gegen den Hauptschnitt des Kegels bestimmt sind. Man beschreibt nämlich aus F mit einem beliebig aber kleiner als AB gewählten Halbmesser einen Kreisbogen und aus G einen zweiten Bogen, dessen Radius gleich dem Unterschiede zwischen AB und dem ersten Halbmesser ist; beide Bögen schneiden sich in zwei der Ellipse angehörigen Punkten. Da der erste Halbmesser willkührlich bleibt, so kann man mittelst dieses Verfahrens beliebig viele Punkte der Ellipse aufsuchen.

Fig. 95.



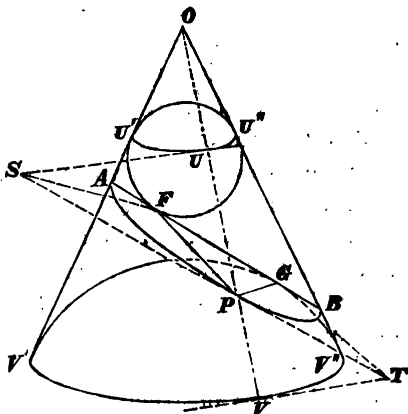
Hierbei ist der specielle Fall bemerkenswerth, wo der erste Halbmesser $= \frac{1}{2} AB = AC$ genommen wird; der zweite Radius hat dann dieselbe Grösse, und man gelangt zu

---

*) Diese Haupteigenschaft der Ellipse kann auch ohne Zuziehung einer Directrix folgendermaassen abgeleitet werden. Es ist $PF = PU$, $PG = PV$ mithin

$$PF + PG$$
$$= UV = U'V'$$
$$= AU' + AV'$$
$$= AF + AG$$
$$= AF + BF$$
$$= AB.$$

Fig. 94.



zwei Ellipsenpunkten D und E, welche von F und G gleichweit nämlich um $DF = DG = EF = EG = \frac{1}{2}AB$ entfernt sind. Die Verbindungslinie DE geht durch C und heisst die kleine Achse der Ellipse; ihre Endpunkte nennt man die Nebenscheitel und den Punkt C den Mittelpunkt der Ellipse, denn aus der vorigen Construction folgt leicht, dass der Punkt C jede durch ihn gelegte Ellipsensehne halbirt. Die Strecke $CF = CG$ führt den Namen der linearen Excentricität. Setzt man $AC = a$, $CD = b$, $CF = c$, so hat man, weil $DF = a$ ist

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Bezeichnet man ferner die Strecke CH mit k und wendet die allgemeine Eigenschaft aller Kegelschnitte auf die Punkte A und D an, so gelangt man zu den beiden Gleichungen

$$\frac{a-c}{k-a} = \varepsilon, \quad \frac{a}{k} = \varepsilon,$$

aus denen folgt

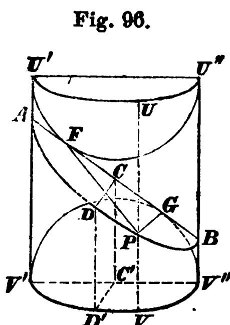
$$k = \frac{a^2}{c}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Die erste dieser Formeln liefert eine einfache Construction der Directrix, wenn die Punkte A, C und F bekannt sind; die zweite Formel enthält den Satz: Die Charakteristik der Ellipse ist gleich dem Verhältnisse der linearen Excentricität zur grossen Halbachse.

Wir betrachten noch den speciellen Fall, wo die Kegelspitze O ins Unendliche hinausrückt also der Kegel in einen Cylinder übergeht. Die berührenden Kugeln werden dann von gleicher Grösse und an die Stelle der früheren Geraden $OUPV$ tritt die der Cylinderachse parallele Gerade UPV; im Uebrigen bleiben die vorigen Betrachtungen wörtlich dieselben. Bemerkenswerth ist aber, dass jetzt auch die kleine Halbachse der Ellipse eine geometrische Bedeutung erhält, sie stellt nämlich den Radius der Directrix des Cylinders dar, wie man aus der Gleichheit von CD und $C'D'$ leicht ersieht. Ist nun eine Ellipse ursprünglich als Schnitt einer Kegelfläche bestimmt, so kennt man nach dem Früheren die grosse Achse und, vermöge der angegebenen Construction, die Brennpunkte; daraus ergiebt

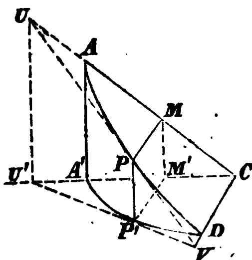
sich die kleine Achse, letztere liefert den Cylinder, und wenn man in den Hauptschnitt $U'V'V''U''$ desselben die Gerade AB einträgt, so bestimmt diese einen Cylinderschnitt, der mit jenem Kegelschnitte die grosse und kleine Achse gemein hat und ihm congruent sein muss, weil aus zwei gegebenen Achsen nur eine Ellipse construirt werden kann. Man pflegt diesen wichtigen Satz kurz folgendermaassen auszudrücken: Jeder elliptische Kegelschnitt lässt sich auf einen bestimmten Cylinder übertragen.

Fig. 96.



Hieraus ergiebt sich ein neues und sehr bequemes Mittel zur Construction der Ellipse aus ihren Achsen. Sei nämlich $CA'D$ der Quadrant des durch den Ellipsenmittelpunkt C gelegten Kreisschnittes des Cylinders, also CD die kleine und CA die grosse Halbachse der Ellipse, P ein Ellipsenpunkt und durch P eine Ebene senkrecht zu $A'CD$ und parallel zu CD, so schneidet diese Ebene die Cylinderfläche in der zur Achse parallelen Geraden PP', die Ebene $AA'C$ in der Geraden $MM' \,/\!/\, PP'$ und es ist ausserdem $PM \,/\!/\, P'M'$ senkrecht auf der Ebene $AA'C$. Die Strecke CM heisse die Abscisse und MP die Ordinate des Ellipsenpunktes P, entsprechend CM' die Abscisse und $M'P'$ die Ordinate von P', so hat man $MP = M'P'$, dagegen $CM : CM' = CA : CA' = CA : CD$; in Worten giebt dies den Satz: Wenn zwei Punkte, von denen der eine auf der Ellipse und der andere auf dem über ihrer kleinen Achse beschriebenen Kreise liegt, gleiche Ordinaten besitzen, so verhalten sich ihre Abscissen wie die grosse Achse zur kleinen. Durch Umdrehung der Ebene ACD bis zum Zusammenfallen mit der Ebene $A'CD$ entsteht eine neue Figur, in welcher wie vorhin $MP = M'P'$, $CM : CM' = CA : CA'$, und hier ist die Construction folgende: Man

Fig. 97.



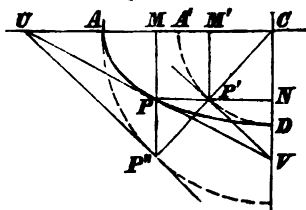


Fig. 98.

beschreibe aus dem Mittelpunkte C zwei Kreise, deren Radien die Halbachsen der Ellipse sind, ziehe einen beliebigen Durchmesser, welcher den kleineren Kreis in P', den grösseren in P'' schneidet und legè durch P' eine Parallele zu CA, sowie durch P'' eine Parallele zu CD; beide Parallelen schneiden sich in einem Punkte P, welcher der Ellipse angehören muss, weil für ihn $MP = M'P'$ und $CM : CM' = CP'' : CP' = CA : CD$ ist. Statt den Durchmesser $CP'P''$ willkührlich zu ziehen, kann man auch M beliebig wählen und daraus P'' und CP'' ableiten; die Construction dient dann, um zu einer gegebenen Abscisse die Ordinate zu finden.

Wir betrachten nun noch solche Punkte, für welche die Summe der Leitstrahlen nicht gleich der grossen Achse ist, die folglich auch keine Punkte der Ellipse sein können. Ist P ein Ellipsenpunkt mit der Ordinate MP, P' ein zwischen M und P, und P'' ein auf der Verlängerung von MP liegender Punkt, so ist für den ersten $FP' + GP' < FP + GP$, d. h. $FP' + GP' < AB$, und entsprechend für den zweiten $FP'' + GP'' > AB$. Man erkennt hieraus umgekehrt, dass ein Punkt, dessen Leitstrahlen zusammen mehr als AB ausmachen, weder innerhalb noch auf der Ellipse, also ausserhalb derselben liegen muss, und dass ebenso ein Punkt, für welchen jene Summe $< AB$ ist, nur innerhalb der Ellipse vorhanden sein kann; dies giebt den Satz: **Ein Punkt liegt innerhalb, auf, oder ausserhalb der Ellipse, je nachdem die Summe seiner Leitstrahlen weniger, ebensoviel, oder mehr als die grosse Achse der Ellipse ausmacht.**

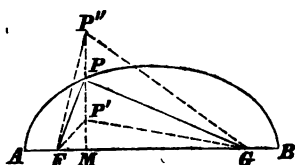


Fig. 99.

§. 34.

Die Ellipse und die Gerade.

I. Wir gehen von dem speciellen Falle aus, wo die Gerade Tangente an der Ellipse ist und folglich durch denselben Punkt S der Directrix geht wie eine in F auf dem Brennstrahle des Berührungspunktes P errichtete Senkrechte. Construirt man noch den anderen Brennpunkt G und die zugehörige Directrix JT, so sind die in §. 29. angestellten Betrachtungen fast wörtlich zum zweiten Male anwendbar, wenn man F durch G und S durch T ersetzt, mithin ist auch $\angle PGT = 90^0$. Man hat nun einerseits

Fig. 95.

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{PG}{PR} \text{ oder } \frac{PF}{PG} = \frac{PQ}{PR},$$

ferner in den ähnlichen Dreiecken PQS und PRT

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{PS}{PT}$$

mithin zusammen

$$\frac{PF}{PG} = \frac{PS}{PT} \text{ oder } \frac{PF}{PS} = \frac{PG}{PT}.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke FPS und GPT stimmen also in dem Verhältniss einer Kathete zur Hypotenuse überein, sie sind daher ähnlich, und es folgt hieraus

$$\angle FPS = \angle GPT$$

d. h.: Die Tangente an einer Ellipse bildet gleiche Winkel mit den Vectoren des Berührungspunktes.*)

Um hiernach die zu einem gegebenen Ellipsenpunkte gehörige Tangente zu finden, braucht man nur einen der

*) Auch dieser Satz lässt sich ohne Zuziehung einer Directrix folgendermaassen ableiten. Nach §. 29 sind die Dreiecke PSF

Nebenwinkel von $\angle FPG$ zu halbiren; die Halbirungslinie ist die gesuchte Tangente.

Zu einer anderen Tangentenconstruction führt die Auffassung der Ellipse als Cylinderschnitt. Die Ebene, welche den Cylinder längs der Geraden PP' berührt und von den Erweiterungen der Ebenen ACD und $A'CD$ in den Geraden UP und $U'P'$ geschnitten wird, begegnet der verlängerten Geraden CD in einem Punkte V, der sowohl zur Ellipsentangente VPU, als zur Kreistangente $VP'U'$ gehört; denkt man sich jetzt die Ebene ACD um CD gedreht, bis sie mit der Ebene $A'CD$ zusammenfällt, so bleibt der Punkt V unbeweglich auf CD und bildet den Durchschnitt einer Ellipsentangente an P und einer Kreistangente an P', wobei aber $MP = M'P'$ ist. Mann kann diesen Satz so aussprechen: Besitzen zwei Punkte P und P', von denen der eine auf der Ellipse und der andere auf dem eingeschriebenen Kreise liegt, gleiche Ordinaten, so gehen die Tangenten an P und P' durch einen und denselben Punkt der verlängerten kleinen Achse der Ellipse. Demgemäss hat man

Fig. 97.

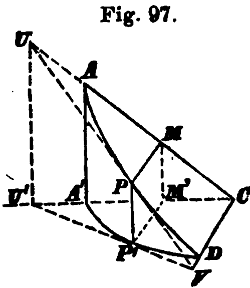
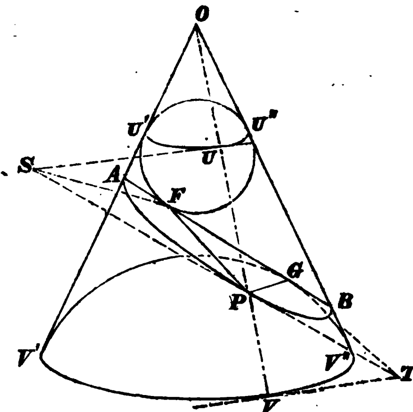


Fig. 94.



und PSU congruent; daraus folgt

$$\angle FPS = \angle UPS.$$

Bei der zweiten Berührungskugel findet sich auf analoge Weise, dass $\triangle PTG \cong \triangle PTV$ mithin

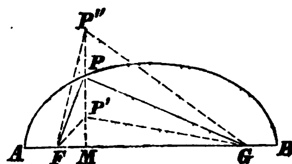
$$\angle GPT = \angle VPT$$

ist. Die rechter Hand stehenden Winkel UPS und VPT sind als Scheitelwinkel gleich, daher ist auch

$$\angle FPS = \angle GPT.$$

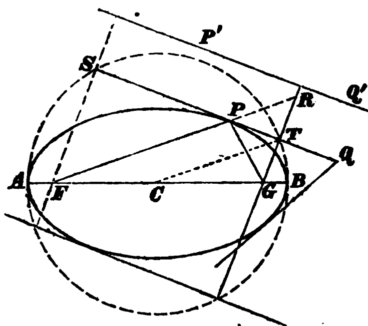
folgende Tangentenconstruction: durch den gegebenen Punkt P zieht man eine Gerade $\parallel AC$ bis zum Durchschnitte P' mit dem eingeschriebenen Kreise, legt an P' eine Tangente, welche die verlängerte CD in V schneidet, und verbindet V mit P, wo nun VP die gesuchte Tangente ist. — Verlängert man VP bis zum Durchschnitte U mit der verlängerten CA und beachtet, dass für $MP = M'P'$ die Proportion $CM : CM' = CP'' : CP' = CA : CD$ statt findet, so kann man sich leicht überzeugen, dass U zugleich der Punkt ist, in welchem eine durch P'' an den umschriebenen Kreis gelegte Tangente der Verlängerung von CA begegnet; dies giebt eine analoge Construction, bei welcher aus P der Reihe nach die Punkte P'', U und die Tangente UP bestimmt werden.

Fig. 99.



Nach dieser speciellen Betrachtung kehren wir zu der ursprünglichen Tangentenconstruction zurück, um weitere Folgerungen daran zu knüpfen. Nehmen wir die Strecke $PR = PG$, so ist in dem gleichschenkligen Dreiecke GPR der gleichnamige Winkel halbirt und mithin geht die Tangente an P senkrecht durch die Mitte der Basis GR; nennen wir T diesen Mittelpunkt, so kann derselbe auch als Fusspunkt des von G auf die Tangente herabgelassenen Perpendikels angesehen werden. Durch die Gerade CT entsteht ein Dreieck CGT, welches mit dem Dreiecke FGR in dem Winkel bei G und in dem Seitenverhältnisse

Fig. 100.



$$GC : GF = GT : GR = 1 : 2$$

übereinstimmt; hieraus folgt $\triangle CGT \sim \triangle FGR$, $CT \parallel FR$ und

$$CT : FR = GC : GF = 1 : 2;$$

es ist daher CT die Hälfte von $FR = FP + PR = FP + PG = AB$. Auf ganz analoge Weise kann nachgewiesen werden, dass der Fusspunkt S einer von F auf die Tangente an P herabgelassenen Senkrechten gleichfalls um $\frac{1}{2}AB$ von C entfernt ist. Da dies für jeden beliebigen Punkt P gilt, so hat man folgenden Satz: Die Fusspunkte aller von den Brennpunkten auf die Tangenten der Ellipse herabgelassenen Senkrechten liegen auf der Peripherie des der Ellipse umschriebenen Kreises.

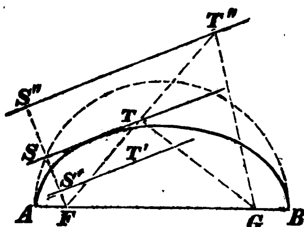
Hierin sind die Mittel zur Lösung zweier Berührungsaufgaben enthalten. Soll nämlich an eine gegebene Ellipse eine Tangente parallel einer gegebenen Geraden $P'Q'$ gelegt werden, so fälle man auf letztere von den Brennpunkten aus Senkrechte und nenne S und T die Punkte, in welchen die erwähnten Perpendikel den umschriebenen Kreis schneiden. Die Gerade ST ist dann die gesuchte Tangente und man findet ihren Berührungspunkt dadurch, dass man $FR \parallel CT$ bis zum Durchschnitte mit ST zieht. Da jede Gerade durch einen im Innern eines Kreises liegenden Punkt den Kreis nothwendig zweimal schneidet, so hat die Aufgabe jederzeit zwei Lösungen.

Soll ferner durch einen gegebenen Punkt Q eine Tangente an eine Ellipse gelegt werden, so kommt es nur darauf an, in der Peripherie des der Ellipse umschriebenen Kreises die Punkte S und T so zu bestimmen, dass $\angle FSP = \angle GTQ = 90^\circ$ wird; man erreicht diess leicht, indem man Q mit F und G verbindet und sowohl über FQ als über GQ als Durchmesser einen Kreis beschreibt; diese Hilfskreise schneiden den umschriebenen Kreis in den gesuchten Punkten S und T; der Berührungspunkt der Tangente STQ findet sich auf dieselbe Weise wie vorhin. Da jeder von den Hilfskreisen den umschriebenen Kreis im Allgemeinen zweimal schneidet, so existiren zwei Auflösungen; sie reduciren sich zu einer, wenn Q auf der Ellipse selber liegt; unmöglich wird die Aufgabe, wenn Q sich innerhalb der Ellipse befindet.

II. Lassen wir von dem einen Brennpunkte F auf eine nicht berührende Gerade $S'T'$ oder $S''T''$ eine Senk-

rechte herab, so kann deren Fusspunkt S' oder S'' nicht auf die Peripherie des der Ellipse umschriebenen Kreises fallen, er muss also entweder innerhalb oder auserhalb dieses Kreises liegen. Betrachten wir zuerst den letzten Fall und verbinden einen beliebigen Punkt T'' von $S''T''$ mit F durch die Gerade FT'' welche die zu

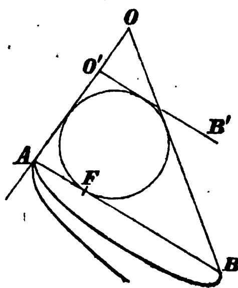
Fig. 110.



$S''T''$ parallele Tangente in T schneidet, so ist $FS'' > FS$, $FT'' > FT$, ferner $FT'' - T''T = FT$ und $GT'' + T''T > GT$. Durch Addition der letzteren Beziehungen folgt $FT'' + GT'' > FT + GT$, und da T keinen Falls innerhalb der Ellipse liegt, so ist $FT + GT \geqq AB$, mithin ganz sicher $FT'' + GT'' > AB$, woraus folgt, dass kein Punkt T'' der Geraden $S''T''$ innerhalb oder auf der Ellipse liegen kann. Fällt dagegen S' zwischen F und S, so dass $FS' < FS$, so kann die Gerade $S'T'$ ebensowenig einen als keinen Punkt mit der Ellipse gemein haben und es bleibt dann der nur noch mögliche Fall übrig, dass $S'T'$ die Ellipse in zwei Punkten schneidet. Alles zusammen giebt den Satz: **Eine Gerade hat mit einer Ellipse zwei Punkte, einen Punkt oder keinen Punkt gemein, je nachdem der Fusspunkt des von einem Brennpunkte auf die Gerade herabgelassenen Perpendikels innerhalb, auf oder ausserhalb der Peripherie des der Ellipse umschriebenen Kreises liegt.**

Man wird bemerken, dass die für die Ellipse entwickelten Sätze viel Aehnlichkeit mit den für die Parabel geltenden besitzen; der Grund liegt in der nahen Verwandtschaft beider Linien, vermöge deren die Parabel als eine Ellispe betrachtet werden kann, deren grosse Achse unendlich gross geworden ist, während Scheitel und Brennpunkt unverändert geblieben sind. Diess lässt sich leicht an dem Hauptschnitte der

Fig. 102.



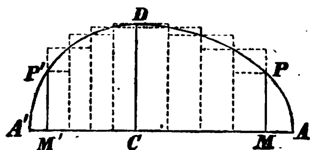
Kegelfläche nachweisen. Ist nämlich AB ein elliptischer Schnitt des Kegels AOB und F der Brennpunkt, so rücke man den Kegelmittelpunkt O auf der Geraden OA so herab, dass die Kegelseite OB immer denselben Kreis berührt, welcher zur Bestimmung des Brennpunktes diente; je mehr sich die bewegliche Kegelseite der zu AB parallelen Lage nähert, desto länger wird die grosse Achse der Ellipse, während A und F ungeändert bleiben; ist endlich die bewegliche Kegelseite parallel zu AB geworden, so hat sich die Ellipse in eine Parabel verwandelt. Der umschriebene Kreis wird dann zur Scheiteltangente und damit gehen die für die Ellipse entwickelten Sätze in die entsprechenden Eigenschaften der Parabel über.

§. 35.

Die Quadratur der Ellipse.

Vermöge der Entstehung der Ellipse aus dem Cylinder lässt sich der Kreis als Projection einer Ellipse ansehen und darauf eine Vergleichung zwischen der Kreisfläche und Ellipsenfläche gründen. Wir denken uns zu diesem Zwecke die Ebene der Ellipse wieder um ihre kleine Achse gedreht, bis sie mit dem durch dieselbe Achse gelegten Kreisschnitt zusammenfällt, und in beiden krummen Linien zwei gleiche Ordinaten MP und $M'P'$ construirt, denen die Abscissen CM und CM', welche sich wie $CA:CA'$ verhalten, entsprechen mögen. Ferner theilen wir CM' in eine Reihe gleicher Theile,

Fig. 103.



von denen einer δ' heissen möge, ziehen durch alle Theilpunkte Ordinaten und construiren aus jeder Ordinate und dem Stücke δ' ein Rechteck; wir erhalten auf diese Weise zwei Reihen von Rechtecken, zwischen denen die Fläche $CDP'M'$, welche S' heissen möge, enthalten ist, insofern nämlich letztere mehr als die Summe der eingeschriebenen und weniger als die Summe der umschriebenen Rechteckflächen beträgt. Nennen wir n die Anzahl der Theile und $CD = y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots y_n \doteq M'P'$ die aufeinander folgenden Ordinaten, so ist

$$S' > \delta' (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n)$$
$$S' < \delta' (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}),$$

und da die Differenz dieser beiden Rechtecksummen kleiner als jede beliebigen Zahl gemacht werden kann, wenn man $\delta' = \frac{CM'}{n}$ hinreichend klein nimmt, so folgt, dass

$$S' = \text{Gränzwerth von } \delta' (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n)$$

sein muss. Eine ganz ähnliche Operation ist auf die Fläche $CDPM = S$ anwendbar. Construirt man nämlich zu denselben Ordinaten $y_1, y_2 \dots y_n$ die entsprechenden Abscissen, so zerfällt die Strecke CM ebenfalls in n Theile, und zwar sind diese von gleicher Grösse; wie man mittelst des Satzes findet, dass sich zwei Abscissen, die in der Ellipse und im Kreise zu gleichen Ordinaten gehören, wie die grosse Halbachse zur kleinen verhalten. Nennen wir δ einen solchen Theil $\frac{CM}{n}$, so findet sich durch ähnliche Betrachtungen wie vorhin

$$S > \delta (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n)$$
$$S < \delta (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}),$$

mithin

$$S = \text{Gränzwerth von } \delta (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n).$$

Nun ist aber $\delta : \delta' = CA : CA'$; für $CA = a$, $CA' = CD = b$ hat man daher $\delta = \frac{a}{b} \delta'$,

$$S = \text{Gränzwerth von } \frac{a}{b} \delta' (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n)$$

und vermöge des vorhin angegebenen Werthes von S'

$$S = \frac{a}{b} S',$$

d. h.: Die über irgend einer Abscisse stehende Ellipsenfläche verhält sich zu der über derselben Abscisse stehenden Fläche des eingeschriebenen Kreises wie die grosse Halbachse zur kleinen.

Lässt man M mit A, folglich M' mit A' zusammenfallen, so wird $S' = \frac{1}{4}\pi b^2$, mithin $S = \frac{1}{4}\pi ab$; demnach ist die Fläche der ganzen Ellipse $= \pi ab$, d. h. gleich der

Fläche eines Kreises, dessen Halbmesser das geometrische Mittel zwischen den Halbachsen der Ellipse ausmacht.

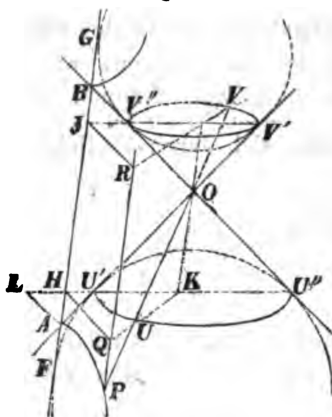
Die Rectification der Ellipse übersteigt die Kräfte der Elementargeometrie.

§. 36.

Die Hyperbel.

Wie bei dem elliptischen so sind auch bei dem hyperbolischen Schnitte des Kegels zwei Berührungskugeln möglich, nur liegen dieselben, von dem Kegelmittelpunkte O aus gerechnet, nicht nach derselben Seite hin sondern einander entgegengesetzt. Der Berührungspunkt G der zweiten Kugel liefert den zweiten Brennpunkt und der Durchschnitt der Ebene des Berührungskreises $V'VV''$ mit der Hyperbelebene führt zu einer zweiten Directrix JR. Die Punkte A und B heissen die Scheitel der Hyperbel, die begrenzte Strecke AB nennen wir, dem Früheren analog, die Hauptachse des Schnittes. Im Gegensatze zur Ellipse liegen hier beide Brennpunkte auf den Verlängerungen der Hauptachse, während jede Directrix die Hauptachse zwischen den Scheiteln schneidet. Es ist nun

Fig. 104.



$$AF = AU', \quad AG = AV',$$

mithin wenn die erste Gleichung von der zweiten abgezogen und für AG die Differenz $FG - AF$ gesetzt wird

$$FG - 2\,AF = U'V'.$$

Auf ähnliche Weise erhält man von B ausgehend

$$FG - 2\,BG = U''V'',$$

folglich weil $U'V' = U''V''$ ist

$$AF = BG;$$

die Brennpunkte liegen also symmetrisch gegen

die Scheitel. Zieht man ferner durch A parallel zu OU'' eine Gerade, welche HU' in L schneidet, so entstehen die ähnlichen Dreiecke ALU' und $OU'U''$; das letztere ist gleichschenklig, mithin auch $AL = AU' = AF = BG = BV''$. Die Dreiecke AHL und BJV'' stimmen ausser in den Seiten AL und BV'' noch in den Winkeln überein und sind daher congruent; dies giebt $AH = BJ$ d. h.: Die zweite Directrix ist vom zweiten Scheitel eben so weit entfernt wie die erste vom ersten.

Die Ebene der in §. 29 betrachteten ähnlichen Dreiecke PUQ und OUK schneidet die Ebene des zweiten Berührungskreises in einer Geraden $VR // UQ$ und erzeugt ein dem vorigen ähnliches Dreieck PVR; es ist daher

$$\frac{PV}{PR} = \frac{OU}{OK}$$

oder wenn links PV durch die gleiche Kugeltangente PG, rechts OU durch OU'' ersetzt wird,

$$\frac{PG}{PR} = \frac{OU''}{OK},$$

d. h.: Das Verhältniss zwischen dem Brennstrahl eines Hyperbelpunktes und dessen Entfernung von der Directrix bleibt unverändert, wenn der erste Brennpunkt gegen den zweiten und zugleich die erste Directrix gegen die zweite vertauscht wird.

Bezeichnet ε die Charakteristik $OU'' : OK$, so ist

$$PF = \varepsilon . PQ, \quad PG = \varepsilon . PR,$$
$$PG - PF = \varepsilon . QR = \varepsilon . HI;$$

die Brennstrahlen geben also eine constante Differenz. Für den Scheitel A hat man nach demselben Satze $AG - AF = \varepsilon . HI$ folglich

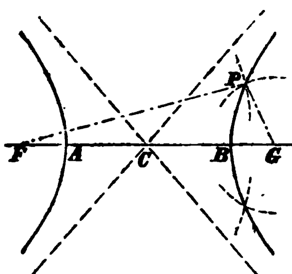
$$PG - PF = AG - AF = BF - AF = AB$$

d. h.: Die Differenz der Brennstrahlen jedes Hyperbelpunktes ist unveränderlich gleich der Hauptachse der Hyperbel.*)

*) Auch ohne Zuziehung einer Directrix findet man diesen Satz auf folgendem Wege. Es ist $PF = PU$, $PG = PV$ mithin
$PG - PF = UV = U'V' = AV' - AU' = AG - AF = BF - AF = AB.$

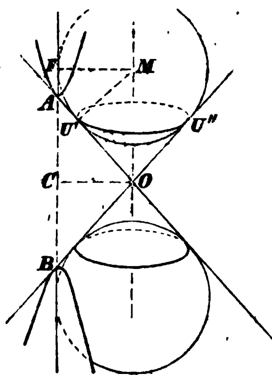
Dieser Satz liefert ein einfaches Mittel zur Construction der Hyperbel, wenn die Lage der schneidenden Ebene gegeben ist. Man bestimmt zunächst mittelst zweier berührenden Kreise die Brennpunkte F und G der krummen Linie, beschreibt ferner aus dem einen Brennpunkte F mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreisbogen und aus G einen zweiten Bogen, dessen Halbmesser gleich der Summe von AB und dem ersten Halbmesser ist; beide Bögen schneiden sich in zwei Punkten, welche der Hyperbel angehören. Diese Construction giebt zu erkennen, dass die beiden Zweige der Hyperbel congruent sind und zur Deckung gebracht werden können, wenn man den einen um diejenige Gerade herumdreht, welche die Hauptachse normal in C halbirt. Der Punkt C heisst desswegen der Mittelpunkt der Hyperbel; die Endpunkte A und B der Hauptachse werden die Scheitel der Hyperbel genannt.

Fig. 105.



Besondere Aufmerksamkeit verdient der Fall, wenn die Schnittebene parallel zur Kegelachse liegt; es werden dann die beiden Berührungskugeln congruent, wie dies in analoger Weise bei dem elliptischen Schnitte des Cylinders geschah. Bezeichnen wir mit M der Mittelpunkt der zum Brennpunkte F gehörenden Kugelfläche und mit C den Mittelpunkt der Hauptachse AB, so sind die Geraden MF und OC gleich und senkrecht zur Kegelachse; ferner hat man $MU' = MF = OC$, $\angle OMU' = \angle AOC$ und $\angle OU'M = \angle ACO = 90^0$, mithin zwei congruente Dreiecke $OU'M$ und ACO, es ist daher $OU' = AC$ und durch beiderseitige Addition von $AU' = AF$, auch $AO = CF$. Sind nun von irgend einer Hyperbel die Hauptachse AB und

Fig. 106.



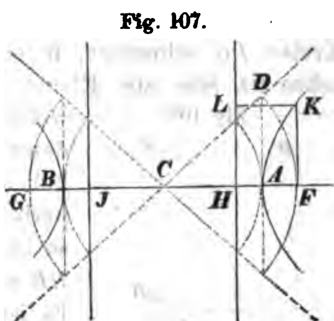
die Brennpunkte F, G gegeben, so kann aus der Kathete AC und der Hypotenuse $AO = CF$ das rechtwinklige Dreieck AOC und überhaupt diejenige Kegelfläche bestimmt werden, bei welcher der zur Kegelachse parallele Schnitt die nämliche Hauptachse und dieselben Brennpunkte wie die gegebene Hyperbel besitzt. Nach der oben gezeigten Construction ist aber die Hyperbel durch Hauptachse und Brennpunkte bestimmt und es muss daher der vorhin erwähnte Schnitt mit der gegebenen Hyperbel identisch sein, d. h.: **Jeder beliebige hyperbolische Schnitt irgend einer Kegelfläche lässt sich auf einen bestimmten neuen Kegel so übertragen, dass die Schnittebene der Achse parallel liegt.**

Der Analogie wegen nennt man CO die **Nebenhalbachse** und $CF = CG$ die **lineare Excentricität** der **Hyperbel**; für $AC = a$, $CO = b$, $CF = c$ ist

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Um ferner die Entfernung der Directrix vom Mittelpunkte und die Charakteristik der Hyperbel zu bestimmen, errichten wir im Brennpunkte F die bis zur Hyperbel reichende Senkrechte FK und denken uns GK gezogen; in dem rechtwinkligen Dreiecke FGK ist dann

Fig. 107.



$$\overline{GK}^2 - \overline{FK}^2 = \overline{FG}^2$$

ferner, zufolge der vorhin bewiesenen Eigenschaft der Hyperbel,

$$GK - FK = AB$$

mithin durch Division

$$GK + FK = \frac{\overline{FG}^2}{AB}.$$

Die halbe Differenz beider Gleichungen ist

$$FK = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\overline{FG}^2}{AB} - AB\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{4c^2}{2a} - 2a\right) = \frac{c^2}{a} - a.$$

In Beziehung auf die Directrix gelten die beiden Relationen

$$FK = \varepsilon \, . \, KL, \quad AF = \varepsilon \, . \, AH,$$

und wenn man zur Abkürzung $CH = k$ setzt, so lauten dieselben

$$\frac{c^2}{a} - a = \varepsilon (c - k), \quad c - a = \varepsilon (a - k)$$

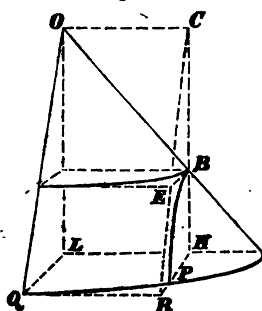
und liefern die Werthe

$$k = \frac{a^2}{c}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Von diesen Formeln führt die erste zu einer einfachen Construction der Directrix, wie sie die Figur, worin $AD = b$ ist, zu erkennen giebt; die zweite Formel enthält den Satz: Die Charakteristik der Hyperbel ist gleich dem Verhältnisse ihrer linearen Excentricität zur Haupthalbachse.

Als Parallelschnitt zur Kegelachse aufgefasst, bietet die Hyperbel noch eine interessante Eigenschaft dar. Legen wir nämlich durch irgend einen Hyperbelpunkt P eine zur Kegelachse normale Ebene, welche die Fläche in dem Kreise PQ schneidet, legen wir ferner durch die Kegelachse OL eine zur Ebene der Hyperbel parallele Ebene, welche die Kegelfläche in der Geraden OQ schneidet, und projiciren endlich das Dreieck OLQ auf die Hyperbelebene, so dass $\triangle CHR \cong \triangle OLQ$, so lassen sich die Geraden HP und HR auf folgende Weise vergleichen. Es ist

Fig. 108.



$$\overline{HR}^2 - \overline{HP}^2 = \overline{LQ}^2 - \overline{HP}^2$$
$$= \overline{LP}^2 - \overline{HP}^2 = \overline{LH}^2,$$

und durch Zerlegung der linken Seite in $(HR + HP)(HR - HP) = (HR + HP) PR$

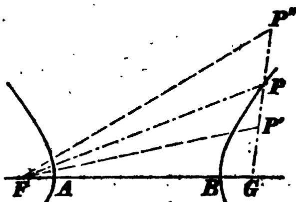
$$PR = \frac{\overline{LH}^2}{HR + HP} = \frac{\overline{LH}^2}{LQ + HP}.$$

Der Zähler des rechter Hand befindlichen Quotienten bleibt unveränderlich, wo auch der Punkt P gewählt werden mag, dagegen wird der Nenner um so grösser, je weiter P vom Scheitel B wegrückt, oder je grösser die Gerade $CH = OL$ wird, ja man kann sogar durch hinreichend

gross gewählte CH den Nenner des obigen Quotienten über jede Zahl hinaus wachsen folglich den Quotienten selbst nämlich PR kleiner als jede noch so kleine Zahl werden lassen, ohne dass PR den genauen Werth Null jemals erreicht. Die Hälfte des einen Hyperbelzweiges schmiegt sich also mehr und mehr an die Gerade CR an, deren Lage durch die Kegelfläche selbst ein für allemal bestimmt ist; diese Gerade heisst eine Asymptote der Hyperbel; die vollständige Hyperbel besitzt zwei Asymptoten, welche sich im Mittelpunkte der Hyperbel schneiden und mit der Hauptachse gleiche Winkel bilden; letztere sind identisch mit dem Winkel zwischen der Seite und Achse des Kegels. Will man aber diesen Winkel direct aus den Achsen der Hyperbel herleiten, so braucht man nur den Punkt P mit dem Scheitel B zusammenfallen zu lassen; der durch B gelegte Kreisschnitt hat einen der Geraden CO gleichen Halbmesser, CO ist die Nebenhalbachse und $= BE$, mithin $\angle ECB$ Gegenwinkel von BE in einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Katheten die Halbachsen $CB = a$ und $BE = b$ sind.

Wir betrachten ferner solche Punkte, die entweder ausserhalb oder innerhalb der Hyperbel liegen, bei denen also die Differenz der Leitstrahlen nicht gleich der grossen Achse sein kann. Ist erstens P'' ein ausserhalb der Hyperbel befindlicher Punkt, so muss die Gerade, welche ihn mit dem innerhalb liegenden Brennpunkte G verbindet, die Hyperbel nothwendig in einem Punkte P schneiden und es ist dann $FP'' < FP + PP''$, $GP'' = GP + PP''$; durch Subtraction der zweiten

Fig. 109.



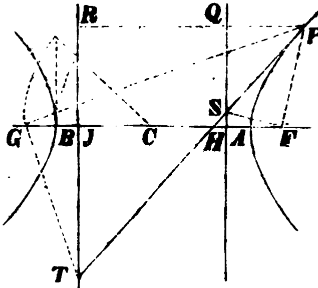
von der ersten Beziehung bleibt $FP'' - GP'' < FP - GP$, d. h. $FP'' - GP'' < AB$. Für einen innenliegenden Punkt P' findet sich auf gleiche Weise $FP' - GP' > AB$; umgekehrt folgt hieraus der Satz: Ein Punkt liegt innerhalb, auf oder ausserhalb der Hyperbel, je nachdem die Differenz seiner Brennstrahlen mehr, ebensoviel, oder weniger als die Hauptachse der Hyperbel beträgt.

§. 37.

Die Hyperbel und die Gerade.

I. Wir betrachten zuerst den speciellen Fall, wo die Gerade Tangente an der Ellipse ist und folglich durch denselben Punkt S der Directrix geht wie eine in F auf dem Brennstrahle des Berührungspunktes P errichtete Senkrechte. Construirt man noch den anderen Brennpunkt G und die zugehörige Directrix IT, so kann man die in §. 29 angestellten Betrachtungen zum zweiten Male anwenden, indem man F durch G und S durch T ersetzt; es ergiebt sich hierbei $\angle PGT = 90°$. Man hat nun

Fig. 110.



$$\frac{PF}{PQ} = \frac{PG}{PR} \text{ oder } \frac{PF}{PG} = \frac{PQ}{PR},$$

ferner in den ähnlichen Dreiecken PQS und PRT

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{PS}{PT}$$

mithin zusammen

$$\frac{PF}{PG} = \frac{PS}{PT} \text{ oder } \frac{PF}{PS} = \frac{PG}{PT}.$$

Hieraus folgt die Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke FPS und GPT, daher ist

$$\angle FPS = \angle GPT$$

d. h.: Die Tangente an einer Hyperbel bildet gleiche Winkel mit den Vectoren des Berührungspunktes.*)

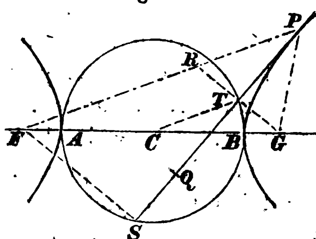
Hierauf gründet sich eine sehr einfache Construction der Tangente an einem Punkte P der Hyperbel; die Halbirungslinie PS des von den Leitstrahlen FP und GP gebildeten Winkels FPG ist nämlich die gesuchte Tangente.

---

*) Auch dieser Satz kann unabhängig von der Directrix entwickelt werden, sobald man genau denselben Weg geht wie bei dem analogen, für die Ellipse geltenden Satze in §. 34.

Schneiden wir auf PF die Strecke $PR = PG$ ab, so ist in dem gleichschenkligen Dreiecke GPR der Winkel an der Spitze halbirt und mithin geht die Tangente an P senkrecht durch die Mitte der Basis GR; dieser Mittelpunkt, welcher T heissen möge, kann auch als Fusspunkt des von G auf die Tangente herabgelassenen Perpendikels betrachtet werden. Durch die Gerade CT entsteht ein Dreieck CGT, welches mit dem Dreiecke FGR in dem Winkel bei G und in dem Seitenverhältnisse

Fig. 111.



$$GC : GF = GT : GR = 1 : 2$$

übereinstimmt; hieraus folgt $\triangle CGT \sim \triangle FGR$, $CT // FR$ und

$$CT : FR = GC : GF = 1 : 2;$$

es ist daher CT die Hälfte von $FR = FP - GP = AB$. Auf ganz analoge Weise kann nachgewiesen werden, dass der Fusspunkt S einer von F auf die Tangente an P herabgelassenen Senkrechten gleichfalls um $\frac{1}{2} AB$ von C entfernt ist. Nennt man einen über der Hauptachse der Hyperbel als Durchmesser beschriebenen Kreis den Hauptkreis der Hyperbel, so hat man folgenden Satz: Die Fusspunkte aller von den Brennpunkten auf die Tangenten der Hyperbel herabgelassenen Senkrechten liegen auf der Peripherie des Hauptkreises der Hyperbel.

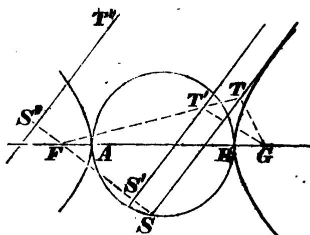
Hierin sind die Mittel zur Lösung zweier Berührungsaufgaben enthalten. Soll nämlich an eine gegebene Hyperbel eine Tangente parallel einer gegebenen Geraden $P'Q'$ gelegt werden, so fälle man auf letztere von den Brennpunkten aus Senkrechte und nenne S und T die Punkte, in welchen die erwähnten Perpendikel den Hauptkreis schneiden. Die Gerade ST ist dann die gesuchte Tangente und man findet ihren Berührungspunkt dadurch, dass man von $FR // CT$ bis zum Durchschnitte mit ST zieht. Da die Brennpunkte ausserhalb des Hauptkreises liegen, so kann jede der von F und G auf $P'Q'$ herabgelassenen Senkrechten den Hauptkreis entweder in zwei Punkten

schneiden, oder in einem Punkte berühren, oder keinen Punkt mit ihm gemein haben. Von diesen Fällen tritt der erste ein, wenn $P'Q'$ mit der Hauptachse einen grösseren Winkel als die Asymptote einschliesst; die Aufgabe hat dann zwei Auflösungen. Ist $P'Q'$ der Asymptote parallel, so kommt der zweite Fall zum Vorschein; die Gerade ST wird mit der Asymptote identisch, der Berührungspunkt P rückt ins Unendliche und es existirt nur eine Auflösung. Wenn endlich $P'Q'$ mit der Hauptachse einen kleineren Winkel als die Asymptote bildet, wird die Aufgabe unmöglich.

Um zweitens durch einen gegebenen Punkt Q eine Tangente an eine Hyperbel zu legen, bedarf es der Aufsuchung zweier auf dem Hauptkreise befindlicher Punkte S und T von der Beschaffenheit, dass $\angle FSQ = \angle GTQ = 90^\circ$ ist; man findet diese Punkte, indem man sowohl über FQ als über GQ als Durchmesser einen Kreis beschreibt, welche Kreise den Hauptkreis in den gesuchten Punkten S und T schneiden; der Berührungspunkt P der Tangente ST ergiebt sich auf dieselbe Weise wie vorhin. Da jeder von den Hilfskreisen den Hauptkreis im Allgemeinen zweimal schneidet, so existiren zwei Auflösungen; sie reduciren sich zu einer einzigen, wenn Q auf der Hyperbel liegt, unmöglich wird die Aufgabe, wenn sich Q innerhalb der Hyperbel befindet.

II. Lassen wir von dem einen Brennpunkte F auf eine nicht berührende Gerade $S'T'$ oder $S''T''$ eine Senkrechte herab, so kann deren Fusspunkt S' oder S'' nicht auf die Peripherie des Hauptkreises fallen, er muss also entweder innerhalb oder ausserhalb dieses Kreises liegen. Setzen wir das Erste voraus und construiren die zu $S'T'$ parallele Tangente ST, so ist $FS' < FS$, und wenn wir nach einem beliebigen Punkte T' von $S'T'$ die Gerade FT' ziehen, welche ST in T schneidet, so ist gleichzeitig $FT' < FT$, ferner $FT' + T'T = FT$ und $GT' + T'T > GT$;

Fig. 112.



durch Subtraction der zweiten von der ersten Beziehung bleibt $FT' - GT' < FT - GT$, und da T keinenfalls innerhalb der Hyperbel liegt, so ist $FT - GT \leqq AB$, mithin ganz sicher $FT' - GT' < AB$, woraus folgt, dass die Gerade $S'T'$ keinen Punkt mit der Hyperbel gemein hat. Wenn dagegen der Fusspunkt S'' des von F auf die Gerade $S''T''$ herabgelassenen Perpendikels ausserhalb des Hauptkreises zu liegen kommt, so kann die Gerade $S''T''$ weder einen noch keinen Punkt mit der Hyperbel gemein haben und es bleibt dann der allein mögliche Fall übrig, dass $S''T''$ die Hyperbel in zwei Punkten schneidet. Alles zusammen giebt den Satz: Eine Gerade hat mit einer Hyperbel zwei Punkte, einen Punkt oder keinen Punkt gemein, je nachdem der Fusspunkt des von einem Brennpunkte auf die Gerade herabgelassenen Perpendikels ausserhalb, auf, oder innerhalb der Peripherie des Hauptkreises liegt.

Man wird bemerken, dass die für die Hyperbel entwickelten Sätze die Seitenstücke zu den für die Ellipse geltenden sind; auch lassen sich wiederum die Eigenschaften der Parabel aus denen der Hyperbel herleiten, wenn man Scheitel und Brennpunkt fest hält und die Hauptachse unendlich werden lässt. Die Parabel bildet dabei den Uebergang von der Ellipse zur Hyperbel, wie auch unmittelbar aus der Entstehung der Kegelschnitte erhellt.

§. 38.

Die Asymptoten der Hyperbel.

Stellt man sich die Aufgabe, durch den Mittelpunkt der Hyperbel Tangenten an letztere zu legen, so findet man sehr leicht, dass die gesuchten Tangenten mit den Asymptoten zusammenfallen und dass deren Berührungspunkte unendlich entfernt sind. Man kann daher die Asymptoten als die letzten Tangenten der Hyperbel ansehen, und es liegt desswegen nahe, sie mit beliebigen anderen Hyperbeltangenten zu vergleichen. Der Einfachheit wegen denken wir uns hierbei die Hyperbel durch einen,

parallel zur Kegelachse geführten Schnitt entstanden, was nach §. 36 jederzeit erlaubt ist.

Fig. 113.

In Fig. 113 sei KOL' der Hauptschnitt des Kegels, diesem parallel die Ebene der Hyperbel AP und durch einen beliebigen Hyperbelpunkt P ein zur Kegelachse senkrechter Querschnitt gelegt; letzterer ist ein Kreis, an welchen in P die Tangente PQ gezogen sein möge. Die Tangente PQ und die erzeugende Gerade OP bestimmen diejenige Ebene, welche den Kegel längs der Geraden OP berührt und gleichzeitig die parallelen Ebenen ALP und $OL'K$ in den parallelen Geraden RP und OQ schneidet. Die Gerade PR ist die zum Punkte P gehörige Hyperbeltangente und durch die vorige Construction völlig bestimmt. Um aber diese Construction in einer Ebene ausführen zu können, denken wir uns erstens die Punkte A, L, P, R auf die Ebene $L'OK$ projicirt und bezeichnen ihre Projectionen mit A', L', P', R'; ferner stellen wir uns die Ebene des Kreisschnittes $L'KP$ soweit gedreht vor, bis sie mit der Ebene $L'KO$ zusammenfällt. In der entstehenden Fig. 114

Fig. 114.

ist P' ein beliebiger Hyperbelpunkt, OA' die Haupthalbachse und OK eine Asymptote der Hyperbel; eine durch P' senkrecht zu OA' gelegte Gerade schneidet die Asymptoten in H und K, die Hauptachse in L'. Auf dem aus L' mit dem Radius $L'H = L'K$ beschriebe-

nen Kreise liegt der Punkt P, und zwar ist $P'P = LL'$ von **unveränderlicher** Grösse nämlich gleich dem Abstande der Hyperbelebene von der Kegelachse, d. h. gleich der Nebenhalbachse $A'D'$. Nimmt man demgemäss $P'P = A'D'$, errichtet auf $L'P$ in P eine Senkrechte, welche $L'K$ in Q schneidet und zieht durch P' parallel zu OQ eine Gerade, so berührt letztere die Hyperbel in P'.

Diese Tangentenconstruction führt zu einigen bemerkenswerthen Proportionen und Gleichungen, wenn man auf die planimetrischen Verhältnisse im Kreise HKP achtet. Zieht man nämlich $KI \parallel HP$, so entstehen zunächst die ähnlichen Dreiecke HPQ und KIQ, ausserdem ist (nach Theil I S. 110) $\angle KPI = \angle PHK = \angle P'PK$ und $\angle PKI = \angle KPH = 90^0$ mithin $\triangle PKI \sim \triangle PP'K \sim \triangle HPK$; hieraus folgt

Fig. 115.

$$\frac{HQ}{KQ} = \frac{HP}{KI} = \frac{HP:KP}{KI:KP} = \frac{HP':PP'}{KP':PP'} = \frac{HP'}{KP'}$$

oder

$$\frac{HP'}{HQ} = \frac{KP'}{KQ}.$$

Kehren wir nun zu der Hyperbel (Fig. 114) zurück, so haben wir in den ähnlichen Dreiecken $HP'S$ und HQO sowie $KP'T$ und KQO

$$\frac{HP'}{HQ} = \frac{P'S}{QO} \text{ und } \frac{KP'}{KQ} = \frac{P'T}{QO}.$$

Nach dem Vorhergehenden sind die linken Seiten gleich, mithin müssen es auch die rechten Seiten sein; wegen der Gleichheit der Nenner giebt dies

$$P'S = P'T$$

d. h.: **Auf jeder Hyperbeltangente sind die Strecken zwischen dem Berührungspunkte und den Asymptoten gleich lang.**

Fällt man von S und T aus auf HK die Senkrechten SU und TV, so entstehen zwei congruente Dreiecke $P'SU$ und $P'TV$ mithin ist auch $P'U = P'V$. Legt man ferner durch S parallel zu HK eine Gerade, welche OK in W schneidet, so erhält man die ähnlichen Dreiecke $TP'K$ und

TSW; in diesen ist $TP' = \frac{1}{2} TS$ mithin $P'K = \frac{1}{2} SW = L'U$. Man kann daher die Tangente ST auch dadurch finden, dass man $L'U = P'K$ nimmt, $US \parallel L'O$ und nachher SP' zieht. Die Verbindung der Gleichungen

$$P'U = P'V \text{ und } L'U = KP'$$

liefert $L'P' = KV$ und

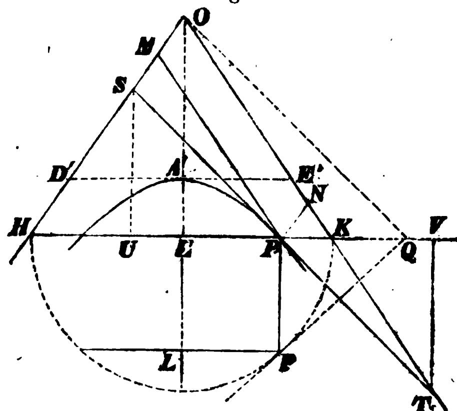
$$L'V = L'K + KV = HL' + L'P' = HP',$$

woraus ähnliche Tangentenconstructionen folgen. Bemerkenswerth ist die Relation

$$L'U \,.\, L'V = KP' \,.\, HP' = \overline{PP'}^2 = \overline{A'D'}^2,$$

deren wörtliche Fassung keine Schwierigkeit bietet.

Fig. 114.



Aus den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken, deren Hypotenusen OD' und OS sind, ergiebt sich leicht

$$OS = \frac{OD'}{A'D'} \,.\, L'U$$

ebenso aus den beiden ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken mit den Hypotenusen OE' und OT

$$OT = \frac{OE'}{A'E'} \,.\, L'V;$$

multiplicirt man diese Gleichungen und beachtet, dass $A'D' = A'E' = b$, $OD' = OE' = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $L'U \,.\, L'V = b^2$ ist, so erhält man

$$OS \,.\, OT = a^2 + b^2.$$

Legt man durch P' die Geraden $P'M \parallel OK$ und $P'N \parallel OH$, so ist $OM = \frac{1}{2} OS$, $ON = \frac{1}{2} OT$ mithin

$$OM \,.\, ON = \tfrac{1}{4} OS \,.\, OT = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

d. h.: Das Product aus den, parallel zu den Asymptoten genommenen Abständen eines Hyperbelpunktes von den Asymptoten hat einen unveränderlichen Werth. Gewöhnlich nennt man letzteren die Potenz der Hyperbel.

Den vorigen Gleichungen lässt sich noch eine andere Bedeutung unterlegen wenn man die Flächen des Dreiecks OST und des Parallelogramms $OMP'N$ in Betracht zieht. Aendert nämlich der Punkt P' seine Lage auf der Hyperbel und ist S_1T_1 die entsprechende Tangente, so haben die Dreiecke OST und OS_1T_1 verschiedene Seiten, aber bei O denselben Winkel, mithin verhalten sich ihre Flächen wie die Producte $OS.OT$ und $OS_1.OT_1$; letztere sind gleich, folglich sind es auch jene Dreiecksflächen. Dasselbe gilt für den Fall, dass P' nach A' rückt, wobei das Dreieck OST in $OD'E'$ übergeht, dessen Fläche $= ab$ ist; man hat daher den Satz: Das Dreieck, welches irgend eine Hyperbeltangente mit den Asymptoten bildet, hat den constanten Flächeninhalt ab. Die Hälfte hiervon giebt die Fläche des Parallelogrammes $OMP'N$, die also gleichfalls constant ist, d. h.: Das Parallelogramm aus den, parallel zu den Asymptoten genommenen Abständen eines Hyperbelpunktes von den Asymptoten besitzt den constanten Flächeninhalt $\frac{1}{2}ab$. Werden demnach die in einer Ecke zusammenstossenden Seiten eines Parallelogrammes ohne Störung des eingeschlossenen Winkels so verändert, dass die Fläche des Parallelogrammes constant bleibt, so beschreibt der gegenüberliegende Eckpunkt eine Hyperbel.

§. 39.

Die Quadratur der Hyperbel.

Durch zwei beliebige Hyperbelpunkte P und P' legen wir parallel zu einer Asymptote die Geraden PM und $P'M'$ und setzen zur Abkürzung

$$OM = x, \quad MP = y; \qquad OM' = x', \quad M'P' = y';$$

es ist dann nach dem Vorigen

$$xy = x'y' = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

mithin

$$y = \frac{\frac{1}{4}(a^2 + b^2)}{x}, \quad y' = \frac{\frac{1}{4}(a^2 + b^2)}{x'}.$$

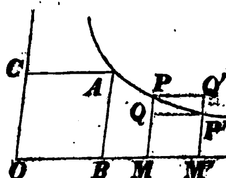


Fig. 116.

Aus den Seiten MM' und MP construiren wir das Parallelogramm $PMM'Q'$, welches der Hyperbelfläche $PMM'P'$ umschrieben ist, und vergleichen seine Fläche mit der Fläche des gleichwinkligen Rhombus $OBAC$; dies giebt

$$\frac{MM'Q'P}{OBAC} = \frac{MM' \cdot MP}{OB \cdot OC} = \frac{(x'-x)y}{\overline{OB}^2}.$$

Linker Hand ist die Fläche von $OBAC = \frac{1}{2}ab$, rechter Hand setzen wir statt y seinen vorhin angegebenen Werth und bemerken noch, dass $\overline{OB}^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}b^2) = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$ ist; es wird dann sehr einfach

$$MM'Q'P = \tfrac{1}{2}ab\frac{x'-x}{x}.$$

Auf ganz gleiche Weise lässt sich die Fläche des eingeschriebenen Parallelogrammes $MM'P'Q$ berechnen, welches sich von dem vorigen nur dadurch unterscheidet, dass y' statt y zu nehmen ist; man hat daher

$$MM'P'Q = \tfrac{1}{2}ab\frac{x'-x}{x'}.$$

Die von dem Hyperbelbogen begrenzte Fläche $MM'P'P$ ist kleiner als das umschriebene Parallelogramm $MM'Q'P$ und zugleich grösser als das einbeschriebene Parallelogramm $MM'P'Q$, mithin

$$\tfrac{1}{2}ab\frac{x'-x}{x} > \text{Fläche } MM'P'P > \tfrac{1}{2}ab\frac{x'-x}{x'}.$$

Nach dieser Vorbereitung gehen wir zur Bestimmung der Fläche P_0M_0UV über, welche von einer gegebenen Strecke M_0U der einen Asymptote, den Parallelen M_0P_0 und UV zur anderen Asymptote und von dem Hyperbelbogen P_0V begrenzt wird; dabei sei

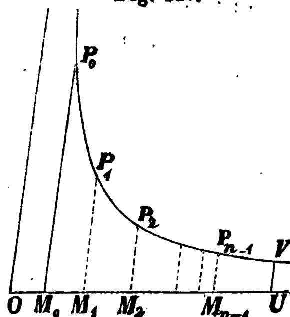


Fig. 117.

$$OM_0 = x_0, \quad OU = X > x_0,$$
$$\text{Fläche } M_0UVP_0 = S.$$

Denken wir uns zwischen M_0 und U beliebige Punkte M_1, M_2, M_3 ... M_{n-1} in den Entfernungen

$$OM_1 = x_1, \quad OM_2 = x_2, \quad \ldots OM_{n-1} = x_{n-1}$$

eingeschaltet und durch jeden eine Parallele zu M_0P_0 gelegt, so zerfällt die gesuchte Fläche in n Streifen, von denen jeder kleiner als das umschriebene und grösser als das einbeschriebene Parallelogramm ist. Man kann daher die vorhin bewiesene Ungleichung auf jeden Streifen anwenden und alle so gewonnenen Ungleichungen addiren; dies giebt

$$\tfrac{1}{2}ab\left\{\frac{x_1-x_0}{x_0}+\frac{x_2-x_1}{x_1}+\frac{x_3-x_2}{x_2}+\ldots+\frac{X-x_{n-1}}{x_{n-1}}\right\}$$
$$> S >$$
$$\tfrac{1}{2}ab\left\{\frac{x_1-x_0}{x_1}+\frac{x_2-x_1}{x_2}+\frac{x_3-x_2}{x_3}+\ldots+\frac{X-x_{n-1}}{X}\right\}$$

oder einfacher

$$\tfrac{1}{2}ab\left\{\frac{x_1}{x_0}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\ldots+\frac{X}{x_{n-1}}-n\right\}$$
$$> S >$$
$$\tfrac{1}{2}ab\left\{n-\frac{x_0}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_3}-\ldots-\frac{x_{n-1}}{X}\right\}.$$

Die bisher willkührlichen Strecken $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ wählen wir jetzt so, dass die Verhältnisse

$$\frac{x_1}{x_0}, \quad \frac{x_2}{x_1}, \quad \frac{x_3}{x_2}, \quad \ldots \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}, \quad \frac{X}{x_{n-1}}$$

gleich werden, dass also $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, X$ eine geometrische Progression bilden; in der That bedarf es hierzu nur der Berechnung des bekannten Werthes

$$\sqrt[n]{\frac{X}{x_0}} = \varrho$$

und dann der Annahmen

$$x_1 = x_0\varrho, \quad x_2 = x_0\varrho^2, \quad x_3 = x_0\varrho^3, \quad \ldots x_{n-1} = x_0\varrho^{n-1}.$$

Die obigen Ungleichungen für S gehen jetzt in die folgenden über

$$\tfrac{1}{2}ab\,(n\varrho - n) > S > \tfrac{1}{2}ab\left(n - \frac{n}{\varrho}\right)$$

oder

$$\tfrac{1}{2}ab\,.\,n\,(\varrho - 1) > S > \tfrac{1}{2}ab\,.\,\frac{n(\varrho-1)}{\varrho};$$

substituirt man den Werth von ϱ, wobei zur Abkürzung

$$\frac{X}{x_0} = \xi \text{ mithin } \varrho = \sqrt[n]{\xi}$$

sein möge, so erhält man

$$1) \qquad \tfrac{1}{2}ab \,.\, n\,(\sqrt[n]{\xi}-1) > S > \tfrac{1}{2}ab \,.\, \frac{n\,(\sqrt[n]{\xi}-1)}{\sqrt[n]{\xi}}.$$

Linker Hand steht die Gesammtfläche der umschriebenen, rechts die der eingeschriebenen Parallelogramme; das Verhältniss der ersten Summe zur zweiten ist $\sqrt[n]{\xi}$ und kann der Einheit beliebig nahe gebracht werden wofern man n gross genug wählt*). Bei unendlich wachsenden n nähern sich also beide Summen einer und derselben Gränze, welcher auch das zwischenliegende S gleichkommen muss. Hiernach ist

$$S = \text{dem Gränzwerthe von } \tfrac{1}{2}ab \,.\, n\,(\sqrt[n]{\xi}-1),$$

oder, wenn der Gränzwerth von $n(\sqrt[n]{\xi}-1)$ mit η bezeichnet wird,

$$2) \qquad S = \tfrac{1}{2}ab \,.\, \eta;$$

dabei versteht sich von selbst, dass η eine bestimmte endliche Grösse sein muss, weil die Fläche S jedenfalls einen endlichen bestimmten Inhalt besitzt.

Um den unbekannten Werth von η zu ermitteln, denken wir uns vorerst n als beliebige endliche Zahl und substituiren in Nr. 1) für S das gleichgeltende $\tfrac{1}{2}ab \,.\, \eta$; dies giebt

$$n\,(\sqrt[n]{\xi}-1) > \eta > \frac{n\,(\sqrt[n]{\xi}-1)}{\sqrt[n]{\xi}},$$

oder, wenn die beiden hierin liegenden Ungleichungen auf ξ zurückgeführt werden,

$$3) \qquad \left(1+\frac{\eta}{n}\right)^n < \xi < \frac{1}{\left(1-\frac{\eta}{n}\right)^n}.$$

---

*) Es ist nämlich $log\,(\sqrt[n]{\xi}) = \frac{log\,\xi}{n}$, und daher $log\,(\sqrt[n]{\xi})$ bei hinreichend grossen n kleiner als jeder noch so kleine beliebige Bruch gemacht werden. Je weniger aber $log\,(\sqrt[n]{\xi})$ von der Null differirt, desto näher kommt $\sqrt[n]{\xi}$ der Einheit.

Obschon man den Betrag von η nicht kennt, so ist doch gewiss, dass der Quotient $\frac{n}{\eta}$ entweder eine ganze Zahl oder zwischen zwei benachbarten ganzen Zahlen k und $k+1$ enthalten sein muss; wir können demnach

$$4) \qquad k < \frac{n}{\eta} < k+1$$

setzen. Hieraus folgt einerseits

$$\frac{1}{k+1} < \frac{\eta}{n} \quad \text{und} \quad \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^n < \left(1+\frac{\eta}{n}\right)^n,$$

sowie andererseits

$$\frac{\eta}{n} < \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\left(1-\frac{\eta}{n}\right)^n} < \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^n.$$

Die Ungleichung 3) wird nun stärker wenn man

$$\text{statt } \left(1+\frac{\eta}{n}\right)^n \text{ das kleinere } \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^n$$

$$\text{und ,, } \frac{1}{\left(1-\frac{\eta}{n}\right)^n} \text{ ,, grössere } \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^n$$

substituirt, und daher ist

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^n < \xi < \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^n$$

Da ferner nach Nr. 4) n mehr als $k\eta$ und weniger als $(k+1)\eta$ beträgt, so lässt sich die vorstehende Gleichung noch weiter verstärken, indem man linker Hand für n das kleinere $k\eta$, rechter Hand für n das grössere $(k+1)\eta$ setzt; dies giebt

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k\eta} < \xi < \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{(k+1)\eta}$$

oder

$$\left[\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\right]^\eta \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{-\eta} < \xi,$$

$$\xi < \left[\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\right]^\eta \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{2-\eta}.$$

Nach einem bekannten Satze*) nähert sich bei unendlich

---

*) Wie in Theil I S. 244 gezeigt wurde, gilt unter der Voraussetzung $a > b > 0$ die Ungleichung

wachsenden ganzen positiven s die Potenz $\left(1+\frac{1}{s}\right)^s$ einer festen Gränze, welche mit dem Buchstaben e bezeichnet wird, und deren Betrag ist

$$e = 2{,}7182818\ldots$$

Von diesem Satze kann man hier Gebrauch machen wenn man n ins Unendliche wachsen lässt, wobei auch $\frac{n}{\eta}$ und die beiden einschliessenden ganzen Zahlen k und $k+1$ unend-

---

$$\frac{a^m - b^m}{a-b} < m a^{m-1} \quad \text{oder} \quad a^m - b^m < m(a-b)\,a^{m-1},$$

wofür man schreiben kann

$$\alpha) \qquad [a - m(a-b)]\,a^{m-1} < b^m.$$

Nehmen wir erstens bei ganzen positiven p

$$m = p+1, \qquad a = 1 + \frac{1}{p}, \qquad b = 1 + \frac{1}{p+1},$$

womit der Bedingung $a > b$ genügt ist, so erhalten wir

$$\beta) \qquad \left(1+\frac{1}{p}\right)^p < \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1}$$

und specieller für $p = 1, 2, 3,$ u. s. w.

$$(1+\tfrac{1}{1})^1 < (1+\tfrac{1}{2})^2 < (1+\tfrac{1}{3})^3 < (1+\tfrac{1}{4})^4 \ldots$$

Man ersieht hieraus, dass der Werth von $\left(1+\frac{1}{s}\right)^s$ fortwährend wächst, wenn s das Gebiet der natürlichen Zahlen durchläuft. Nehmen wir zweitens in α)

$$m = q+1, \qquad a = 1 + \frac{1}{2q}, \qquad b = 1,$$

so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2q}\right)^q < 1 \quad \text{oder} \quad \left(1+\frac{1}{2q}\right)^q < 2$$

und durch Erhebung aufs Quadrat

$$\left(1+\frac{1}{2q}\right)^{2q} < 4.$$

Um so mehr ist nun nach β)

$$\left(1+\frac{1}{2q-1}\right)^{2q-1} < \left(1+\frac{1}{2q}\right)^{2q} < 4;$$

es mag also s eine ungerade Zahl $= 2q-1$ oder eine gerade Zahl $= 2q$ sein, jedenfalls beträgt $\left(1+\frac{1}{s}\right)^s$ weniger als 4. Die vorhin bewiesene unausgesetzte Zunahme von $\left(1+\frac{1}{s}\right)^s$ geht daher nicht über alle Gränzen hinaus, sie muss folglich eine Gränze haben, die > 2 und < 4 ist. Mittelst logarithmischer Tafeln lässt sich dieser Gränzwerth näherungsweise bestimmen, doch ist die erreichte Genauigkeit nur dann erheblich, wenn man s sehr gross nimmt und die Tafeln auf wenigstens 12 Decimalstellen berechnet sind.

lich zunehmen. Es nähern sich dann $\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$ und $\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}$ der gemeinschaftlichen Gränze e, ferner $\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{-\eta}$ und $\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{2-\eta}$ der gemeinschaftlichen Gränze 1, mithin wird die vorige Ungleichung zu der Gleichung

$$\xi = e^{\eta}.$$

Daraus bestimmt sich η; es ist nämlich

$$\eta = \frac{\log \xi}{\log e},$$

mithin dient zur Quadratur der Hyperbel die Formel

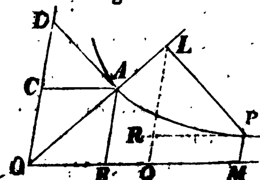
$$5) \qquad S = \tfrac{1}{2} ab \frac{\log \xi}{\log e} = \frac{ab}{2 \log e} \log\left(\frac{X}{x_0}\right)$$

oder in Zahlen, bezogen auf das gewöhnliche Logarithmensystem

$$6) \quad S = \frac{ab}{2 \,.\, 0{,}4342945} \log\left(\frac{X}{x_0}\right) = 1{,}1512925 \,.\, ab \log\left(\frac{X}{x_0}\right).$$

Hiernach lässt sich auch die hyperbolische Fläche bestimmen, welche durch einen vom Scheitel A aus gerechneten Hyperbelbogen AP, durch die von P auf die Hauptachse herabgelassene Senkrechte PL und durch die Strecke AL begrenzt wird. Es ist nämlich

Fig. 118.



Fläche $ALP = \triangle OMP + \triangle OLP - \triangle OAB -$ Fläche $ABMP$ mithin weil $\triangle OMP$ die Hälfte des Parallelogrammes aus OM und MP beträgt,

$$\text{Fläche } ALP = \tfrac{1}{4} ab + \tfrac{1}{2} OL \,.\, LP - \tfrac{1}{4} ab - \frac{ab}{2 \log e} \log\left(\frac{OM}{OB}\right),$$

und wenn zur Abkürzung $OL = x$, $LP = y$ gesetzt wird,

$$\text{Fläche } ALP = \tfrac{1}{2} xy - \frac{ab}{2 \log e} \log\left(\frac{OM}{OB}\right).$$

Zieht man ferner $LQ \,//\, OC$ und $PR \,//\, OB$, so ist in den ähnlichen Dreiecken OLQ und OAB

$$\frac{OQ}{OB} = \frac{OL}{OA} = \frac{x}{a}$$

und in den ähnlichen Dreiecken PRL und ACD

$$\frac{PR}{AC}=\frac{PL}{AD}=\frac{y}{b},$$

oder, wegen $PR=QM$ und $AC=OB$,

$$\frac{QM}{OB}=\frac{y}{b}.$$

Die Addition beider Gleichungen giebt

$$\frac{OM}{OB}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},$$

mithin ist

7) $$\text{Fläche } ALP=\tfrac{1}{2}xy-\frac{ab}{2\log e}\log\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right),$$

worin der Subtrahend den hyperbolischen Sector bedeutet, welcher von der Hauptachse OA, der Geraden OP und dem Bogen AP begrenzt wird.

Die Rectification der Hyperbel übersteigt die Kräfte der Elementargeometrie.

§. 40.

Die Uebertragung der Kegelschnitte.

Wenn eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel gegeben vorliegt, so kann man sich eine solche Linie als Schnitt irgend einer Kegelfläche denken und demgemäss die Aufgabe stellen, alle die Kegelflächen zu finden, auf welche sich die gegebene krumme Linie als Schnitt übertragen lässt. Dieses Problem ist die Umkehrung der in den §§. 29, 33, 36 behandelten Aufgaben und auch durch dieselben Mittel lösbar.

a) Von der gegebenen Parabel sei A der Scheitel und F der Brennpunkt, also AF die Achse; durch letztere legen wir eine zur Parabelebene senkrechte Ebene, construiren in dieser mit einem beliebigen Halbmesser MF einen die Gerade AF in F berührenden Kreis und ziehen endlich zwei Tangenten an den Kreis, von denen die eine durch A und die andere parallel zu AF geht. Die beiden Tangenten, deren Berührungspunkte U' und U'' heissen mögen, schneiden sich in einem Punkte O, und wenn man sich den Winkel $U'OU''$ um OM als Achse herumgedreht denkt, während die Parabelebene fest bleibt, so beschreibt jener

Winkel eine Kegelfläche und der Kreis $FU'U''$ eine Kugel, welche sowohl den Kegel als die Schnittebene berührt. Man erkennt hieraus unter Rücksicht auf §. 29, dass O der Mittelpunkt, $FAOU''$ der Hauptschnitt eines der Kegel ist, auf welche die vorliegende Parabel übertragen werden kann. Um die Lage des Punktes O näher zu bestimmen, lassen wir von O auf die verlängerte FA die Senkrechte OL herab und erhalten jetzt die Gleichung

Fig. 119.

$$AO = AU' + U'O = AF + OU'',$$

oder auch

$$AO = FA + FL,$$

woraus hervorgeht, dass O einer Parabel angehört, deren Scheitel F und deren Brennpunkt A ist. Ferner halbirt die Kegelachse OM den Winkel AOU'' und ist daher Tangente an der neuen Parabel; das Ergebniss lautet mithin vollständig: Die Mittelpunkte aller Kegelflächen, auf die sich eine gegebene Parabel übertragen lässt, liegen auf einer zweiten Parabel, deren Ebene senkrecht auf der gegebenen Parabelebene steht, deren Scheitel der Brennpunkt und deren Brennpunkt der Scheitel von der ersten Parabel ist; die Achsen der betreffenden Kegelflächen sind die Tangenten an der zweiten Parabel.

b) Die gegebene Ellipse habe AB zur grossen Achse, F und G zu Brennpunkten; durch AB legen wir eine zur Ellipsenebene senkrechte Ebene, construiren in letzterer mit einem beliebigen Halbmesser MF einen die Gerade AB in F berührenden Kreis und ziehen von A und B aus Tangenten an denselben. Die Berührungspunkte der Tangenten mögen U' und U'', ihr

Fig. 120.

Durchschnitt O heissen, nach §. 33 ist dann AOB der Hauptschnitt und OM die Achse einer der Kegelflächen, auf welche sich die gegebene Ellipse übertragen lässt. Man hat nun

$$BO - AO = (BU'' + U''O) - (AU' + U'O)$$

und wegen $U''O = U'O$

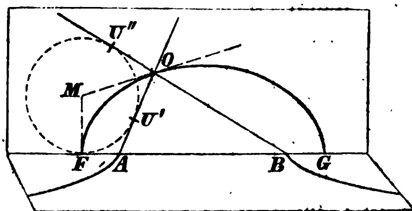
$$BO - AO = BU'' - AU' = BF - AF = BF - BG = FG,$$

woraus hervorgeht, dass O auf einer Hyperbel liegt, deren Scheitel F, G und deren Brennpunkte A, B sind. Da ferner OM den Vectorenwinkel AOB halbirt, so ist OM Tangente an der Hyperbel; das Gesammtresultat besteht demnach in dem Satze: Die Mittelpunkte aller Kegelflächen, auf welche sich eine gegebene Ellipse übertragen lässt, liegen auf einer Hyperbel, deren Ebene senkrecht zur Ellipsenebene steht, deren Scheitel die Brennpunkte und deren Brennpunkte die Scheitel der gegebenen Ellipse sind; die Achsen der betreffenden Kegelflächen berühren die erwähnte Hyperbel.

Nimmt man den willkührlichen Halbmesser MF gleich der kleinen Halbachse der Ellipse, so werden die Geraden AU' und BU'' parallel, der Punkt O rückt ins Unendliche, die Kegelfläche degenerirt zu einer Cylinderfläche und die Achse derselben ist die Asymptote der Hyperbel. Diese specielle Uebertragung wurde bereits in §. 33 erwähnt.

c) Die Hauptachse einer gegebenen Hyperbel sei AB, F und G mögen ihre Brennpunkte heissen; durch AB legen wir eine zur Hyperbelebene senkrechte Ebene, beschreiben

Fig. 121.



in ihr mit dem willkührlichen Halbmesser MF einen die Gerade FG in F berührenden Kreis und ziehen an diesen von A und B aus Tangenten, deren Berührungspunkte U',

U'' und deren Durchschnitt O sein möge. Nach §. 36 ist jetzt AOB der Hauptschnitt und OM die Achse einer der Kegelflächen, auf die sich die gegebene Hyperbel übertragen lässt; zugleich hat man

$$AO + BO = (AU' + U'O) + (BU'' - U''O)$$

d. i. wegen $U'O = U''O$

$$AO + BO = AU' + BU'' = AF + BF = BG + BF = FG,$$

woraus hervorgeht, dass O einer Ellipse angehört, von welcher FG die grosse Achse, A und B die Brennpunkte sind. Da ferner OM den Winkel AOU'' halbirt, so ist OM Tangente an der Ellipse; das Gesammtergebniss lautet: Die Mittelpunkte aller Kegelflächen, auf welche sich eine gegebene Hyperbel übertragen lässt, liegen auf einer Ellipse, deren Ebene senkrecht zur Hyperbelebene steht, deren Scheitel die Brennpunkte und deren Brennpunkte die Scheitel der gegebenen Hyperbel sind; die Achsen der betreffenden Kegelflächen berühren die erwähnte Ellipse.

Nimmt man den willkührlichen Halbmesser MF gleich der Nebenhalbachse der Hyperbel, so liegt die Schnittebene parallel zur Kegelachse; dies giebt jene specielle Uebertragung, von der schon in §. 36 die Rede war.

Cap. VII.

Die Ausmessung der runden Körper.

---

§. 41.

Oberfläche und Inhalt des Cylinders.

Zufolge der früheren auf die Rectification und Quadratur des Kreises bezüglichen Untersuchungen sind wir berechtigt, den Kreis als die Gränze anzusehen, welcher sich ein regelmässiges Polygon mehr und mehr nähert, sobald die Seitenzahl desselben unausgesetzt vergrössert wird;

denken wir uns jenes Vieleck als Basis eines geraden Prisma's; so erscheint der Cylinder als die Gränze, in welche das Prisma übergeht, sobald seine Grundfläche zu einem Kreise wird. Auf diese einfache Bemerkung gründet sich die Ermittelung der Oberfläche und des Inhaltes des Cylinders.

I. Die Längenzahl des Cylinderhalbmessers sei r, die seiner Höhe sei h, ferner heisse e_n der Umfang des der Basis einbeschriebenen regulären n-Ecks und u_n der Umfang des entsprechenden umschriebenen Vielecks, so ist der Cylinder zwischen zwei Prismen enthalten, deren gemeinsame Höhe h ist, und von denen das kleinere das eingeschriebene und das grössere das umschriebene regelmässige Vieleck zur Basis hat. Für die Mantelfläche, deren Inhalt M heissen möge, gilt daher die Beziehung

$$e_n h < M < u_n h,$$

und wenn hier n ins Unendliche wächst, so gehen e_n und u_n in die gemeinschaftliche Gränze $2\pi r$ über; aus der vorigen Ungleichung wird dann die Gleichung

$$M = 2\pi r h,$$

d. h.: Die Mantelfläche des Cylinders ist gleich der Fläche eines Rechtecks, welches die Peripherie der Cylinderbasis zur einen und die Höhe des Cylinders zur anderen Seite hat. Dasselbe Resultat findet man auch dadurch, dass man den Mantel in eine Ebene abwickelt, wie schon früher angegeben wurde. (S. 111.)

Die Gesammtoberfläche des Cylinders, welche S heissen möge, besteht aus dem Mantel und zwei Kreisflächen; man hat daher

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r),$$

d. h.: Die Gesammtoberfläche des Cylinders ist einem Rechtecke gleich, welches die Peripherie der Grundfläche zur einen und die Summe von Höhe und Radius zur anderen Seite hat.

II. Nennen wir E_n die Fläche des der Basis eingeschriebenen regelmässigen n-Ecks, U_n die Fläche des entsprechenden umschriebenen Vielecks und V das Volumen des Cylinders, so gilt die Beziehung

$$E_n h < V < U_n h;$$

für unendlich wachsende n gehen E_n und U_n in die gemeinschaftliche Gränze πr^2 über und an die Stelle der vorigen Ungleichung tritt dann die Gleichung

$$V = \pi r^2 h,$$

d. h.: **Der Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Inhalte eines geraden Prisma's, dessen Höhe die nämliche und dessen Grundfläche der Basis des Cylinders inhaltsgleich ist.**

§. 42.

Oberfläche und Inhalt des Kegels.

I. Der Halbmesser der Kegelbasis heisse r, h die Höhe und s die Seite des Kegels, so dass

$$s = \sqrt{r^2 + h^2},$$

e_n heisse die Peripherie des der Basis eingeschriebenen und u_n die des umschriebenen regelmässigen n-Ecks; der Kegel ist zwischen zwei geraden n-seitigen Pyramiden enthalten, welche die nämliche Höhe besitzen, und von denen die kleinere das erste und die grössere das zweite Vieleck zur Basis hat. Um die Oberfläche der ersten Pyramide zu berechnen, sei s' die Höhe einer der Seitenflächen, die gesuchte Fläche ist dann $\frac{1}{2}e_n s'$; auf gleiche Weise ergiebt sich für die Oberfläche der zweiten Pyramide $\frac{1}{2}u_n s''$, wenn s'' die Höhe einer seiner Seitenflächen bezeichnet; zwischen beiden Flächen liegt die des Kegelmantels, welche M heissen möge, und man hat daher

$$\tfrac{1}{2}e_n s' < M < \tfrac{1}{2}u_n s''.$$

Bei unendlich wachsenden n gehen e_n und u_n in $2\pi r$, s' und s'' in s über, es bleibt daher

$$M = \tfrac{1}{2}2\pi rs = \pi rs = \pi r\sqrt{r^2 + h^2};$$

d. h.: **Die Mantelfläche des Kegels ist einem Kreisausschnitte gleich, der die Seite des Kegels zum Halbmesser und die Peripherie der Kegelbasis zum Bogen hat.** Der Centriwinkel dieses Sectors umfasst demnach $\frac{360 \cdot r}{s}$ Grade. Dasselbe Resultat ergiebt sich durch Abwickelung des Kegelmantels. (S. 112.)

Für die Gesammtoberfläche des Kegels, welche S heissen möge, findet man

$$S = \pi rs + \pi r^2 = \pi r\,(s + r) = \pi r\,(r + \sqrt{r^2 + h^2}),$$

was auf ähnliche Weise wie die vorige Gleichung in Worte übertragen werden kann.

Die Mantelfläche eines abgestumpften Kegels lässt sich als Differenz zwischen den Mantelflächen zweier ganzen Kegel betrachten; der kleinere von diesen habe r' zum Radius und s' zur Seite, so ist

$$M = \pi rs - \pi r's'.$$

Um die Formel practisch brauchbarer zu gestalten, bringen wir die Differenz $s - s'$ als Seite des abgestumpften Kegels in Rechnung; nennen wir sie l und beachten ausserdem die Aehnlichkeit der beiden Vollkegel, so haben wir die Beziehungen

$$s - s' = l, \quad r : r' = s : s'$$

und erhalten daraus

$$s = \frac{rl}{r - r'}, \quad s \frac{r'l}{r - r'};$$

nach Substitution dieser Werthe geht die obige Formel für M in die folgende über

$$M = \pi\,(r + r')\,l.$$

Dies kann auf verschiedene Weise gedeutet werden; bemerkenswerth ist nachstehende Formulirung: Die Mantelfläche eines abgestumpften Kegels kommt der Fläche eines Rechtecks gleich, welches den Umfang des mittleren Querschnittes zur Basis und die Seite des abgestumpften Kegels zur Höhe hat.

Für die Gesammtoberfläche des abgestumpften Kegels hat man die Formel

$$S = \pi r^2 + \pi r'^2 + \pi\,(r + r')\,l = \pi\,[r^2 + r'^2 + (r + r')\,l].$$

II. Bezeichnen wir mit E_n und U_n die Flächen der in und um die Kegelbasis beschriebenen regelmässigen Vielecke, sowie mit V das Kegelvolumen, und berücksichtigen dass letzteres zwischen zwei n-seitigen Pyramiden enthalten ist, deren kleinere das erste und deren grössere das zweite Vieleck zur Basis hat, und welche beide die gemeinschaftliche Höhe h besitzen, so haben wir die Beziehung

$$\tfrac{1}{3}E_n h < V < \tfrac{1}{3}U_n h;$$

für unendlich wachsende n vereinigen sich E_n und U_n zu dem gemeinschaftlichen Werthe πr^2 und daher wird

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Das Kegelvolumen ist demnach gleich dem Volumen einer Pyramide von der nämlichen Höhe und inhaltsgleicher Grundfläche.

Der Inhalt eines abgestumpften Kegels kann als Differenz der Volumina zweier vollen Kegel berechnet werden und ist hiernach

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h - \tfrac{1}{3}\pi r'^2 h' = \tfrac{1}{3}\pi\,(r^2 h - r'^2 h').$$

Nennen wir k die Höhe des abgestumpften Kegels und beachten die Aehnlichkeit der beiden vollen Kegel, so haben wir

$$h - h' = k, \quad r : r' = h : h',$$

woraus

$$h = \frac{rk}{r - r'}, \quad h' = \frac{r'k}{r - r'};$$

nach Substitution dieser Werthe verwandelt sich die vorige Formel in die folgende

$$V = \tfrac{1}{3}\pi\,(r^2 + rr' + r'^2)\,k.$$

Dies lässt sich zwar gleichfalls in Worte übertragen, giebt aber keine kurze leicht zu merkende Regel.

§. 43.

Oberfläche und Inhalt der Kugel.

I. Die im vorigen Paragraphen entwickelte Formel für den Mantel eines abgestumpften Kegels kann zur Quadratur der Kugel dienen, wenn man ihr vorher eine passende Gestalt verleiht; errichtet man nämlich im Mittelpunkte M der Kegelseite PQ auf ihr eine Senkrechte, welche die Kegelachse in O schneidet und projicirt P, Q und M auf die Achse, so sind PP', QQ' die beiden Halbmesser des abgestumpften Kegels und

$$MM' = \tfrac{1}{2}(PP' + QQ')$$

ist sein mittlerer Halbmesser. Der Kegelmantel, welchen PQ bei der Umdrehung um OP' beschreibt, hat zur Fläche

$$\pi\,(PP' + QQ')\,PQ = 2\pi MM' . PQ.$$

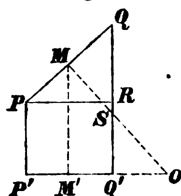


Fig. 122.

Wenn ferner durch P eine Parallele zu OP' gezogen und R ihr Durchschnitt mit QQ' genannt wird, so ist $\angle PQR = \angle MOM'$ (weil jeder dieser Winkel den spitzen Winkel bei S zu 90° ergänzt), $\angle PRQ = \angle MM'O = 90^\circ$, mithin $\triangle PQR \sim \triangle MOM'$; man erhält daraus

$$PQ : PR = MO : MM'$$

folglich

$$MM' = \frac{MO}{PQ} \cdot PR = \frac{MO}{PQ} \cdot P'Q'.$$

Demnach ist der von PQ beschriebene Kegelmantel

$$= 2\pi \cdot MO \cdot P'Q',$$

d. h. gleich dem Producte aus der Peripherie des mit MO beschriebenen Kreises und der Projection von PQ.

Um nach dieser Vorbereitung die Fläche der Kugelzone zu finden, welche ein mit dem Halbmesser $OA = OH = r$ aus dem Mittelpunkte O beschriebener Kreisbogen bei seiner Rotation um den festen Durchmesser OX erzeugt, theilen wir den Bogen AH in eine beliebige Anzahl, etwa n, gleicher Theile, verbinden alle Theilpunkte $A, B, C \ldots H$ durch Sehnen und bestimmen zunächst die Oberfläche, welche durch Umdrehung der gebrochenen Linie zwischen $ABCD \ldots H$ entsteht. Die genannte Fläche ist aus den Mänteln von n abgestumpften Kegeln zusammengesetzt, deren Seiten der Reihe nach AB, BC, $CD \ldots$ sind und deren Höhen $A'B'$, $B'C'$, $C'D' \ldots$ heissen mögen; denkt man sich die vorhin erwähnte Construction auf jeden dieser abgestumpften Kegel angewendet, so bleibt die Linie MO dieselbe, weil die Dreiecke AOB, BOC, $COD \ldots$ sämmtlich gleiche Höhe besitzen, es ist daher, wenn MO zur Abkürzung mit ϱ und die von der gebrochenen Linie $ABCD \ldots H$ beschriebene Fläche mit S bezeichnet wird

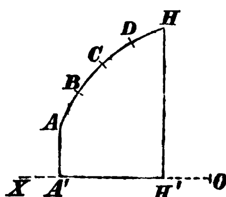


Fig. 123.

$$S = 2\pi\varrho \cdot A'B' + 2\pi\varrho \cdot B'C' + \ldots + 2\pi\varrho \cdot G'H',$$

d. i. kürzer

$$S = 2\pi\varrho \cdot A'H'.$$

Lassen wir die Anzahl der Theilpunkte $B, C, D \ldots G$ ins Unendliche wachsen, so hat die gebrochene Linie $ABCD \ldots GH$ den Kreisbogen AH zur Gränze, die erzeugte Fläche wird zur Kugelzone und ϱ geht in den Halbmesser r über; für $A'H' = h$ lautet jetzt die Formel

$$S = 2\pi rh,$$

d. h.: Die Fläche einer Kugelzone ist gleich der eines Rechtecks, welches den Umfang eines grössten Kugelkreises zur Basis und mit der Zone gleiche Höhe hat. Dieselbe Formel gilt zugleich für die Kugelkappe, weil diese als eine Zone betrachtet werden darf, von welcher der eine Radius Null ist.

Wenn der Bogen AH zu einem Halbkreise, mithin $A'H' = 2r$ wird, so giebt die obige Formel die Oberfläche Ω der ganzen Kugel, nämlich

$$\Omega = 4\pi r^2,$$

d. h.: Die Oberfläche der ganzen Kugel beträgt das Vierfache von der Fläche eines grössten Kreises.

Zufolge der in §. 22 gegebenen Erörterungen sind nun auch die Formeln für die Fläche eines Zweiecks, dessen Winkel w heissen möge, und eines sphärischen Dreiecks ABC sogleich aufzustellen; man hat nämlich

$$Z = \frac{w}{360^0} 4\pi r^2 = \pi \frac{w}{90^0} r^2$$

und

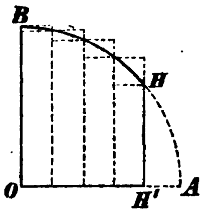
$$\triangle = \frac{A + B + C - 180^0}{360^0} . 2\pi r^2 = \pi \frac{A + B + C - 180^0}{180^0} r^2.$$

Diese Formel führt auch zur Inhaltsbestimmung eines beliebigen sphärischen Polygons, sobald man letzteres als eine Zusammensetzung sphärischer Dreiecke ansieht.

II. Behufs der Cubatur der Kugel betrachten wir zunächst eine Schicht, deren eine Begränzungsebene mit der Ebene eines grössten Kreises zusammenfällt; man erhält eine derartige Schicht dadurch, dass man in der Ebene eines Viertelkreises AOB den Punkt H willkührlich auf dem Bogen AB wählt, H auf OA nach H' projicirt und die viereckige Figur $BOH'H$ um OA als Achse rotiren lässt. Wir theilen nun die Strecke OH', welche h heissen möge,

in eine beliebige Anzahl, etwa n, gleicher Theile, ziehen durch jeden Theilpunkt eine Parallele zu OB bis zum Durchschnitte mit Arc AB, und construiren aus jeder so entstandenen Senkrechten und der Strecke $\frac{h}{n}$ ein Rechteck; dadurch bilden sich zwei Reihen von Rechtecken und es beträgt die Summe der umschriebenen Rechtecke mehr und die Summe der eingeschriebenen Rechtecke weniger als die Fläche $BOH'H$. Bei der Umdrehung um OA erzeugen die umschriebenen Rechtecke einen aus n Cylindern zusammengesetzten Körper, dessen Volumen mehr als das Volumen der Kugelschicht ausmacht, ebenso beschreiben die eingeschriebenen Rechtecke einen Körper, dessen Volumen weniger als das Volumen der Schicht beträgt. Beide Cylindersummen sind leicht zu berechnen; nennen wir r den Halbmesser der Kugel, so sind die Radien des ersten, zweiten, dritten u. s. w. umschriebenen Cylinders

Fig. 124.



$$r, \quad \sqrt{r^2-\left(\frac{h}{n}\right)^2}, \quad \sqrt{r^2-\left(\frac{2h}{n}\right)^2}, \quad \sqrt{r^2-\left(\frac{3h}{n}\right)^2}, \ldots$$
$$\sqrt{r^2-\left(\frac{(n-1)h}{n}\right)^2},$$

die Halbmesser des ersten, zweiten, dritten u. s. w. eingeschriebenen Cylinders sind

$$\sqrt{r^2-\left(\frac{h}{n}\right)^2}, \sqrt{r^2-\left(\frac{2h}{n}\right)^2}, \sqrt{r^2-\left(\frac{3h}{n}\right)^2} \ldots \sqrt{r^2-\left(\frac{nh}{n}\right)^2}.$$

Hieraus ergiebt sich als Volumen des umschriebenen Körpers

$$\pi r^2 \frac{h}{n} + \pi \left[r^2 - \left(\frac{h}{n}\right)^2\right] \frac{h}{n} + \pi \left[r^2 - \left(\frac{2h}{n}\right)^2\right] \frac{h}{n} + \ldots .$$
$$+ \pi \left[r^2 - \left(\frac{(n-1)h}{n}\right)^2\right] \frac{h}{n}$$

oder, weil n die Anzahl der Summanden ausdrückt

$$\pi r^2 h - \pi \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} h^3;$$

auf gleiche Weise findet man für das Volumen des eingeschriebenen Körpers

$$\pi\left[r^2-\left(\frac{h}{n}\right)^2\right]\frac{h}{n}+\pi\left[r^2-\left(\frac{2h}{n}\right)^2\right]\frac{h}{n}+\pi\left[r^2-\left(\frac{3h}{n}\right)^2\right]\frac{h}{n}+\ldots$$
$$+\pi\left[r^2-\left(\frac{nh}{n}\right)^2\right]\frac{h}{n}$$
$$=\pi r^2h-\pi\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}h^3.$$

Die Differenz beider Volumina ist $\frac{1}{n}h^3$ und kann für unendlich wachsende n kleiner als jede beliebig kleine Zahl gemacht werden; man schliesst daraus, dass sich die Volumina des der Kugelschicht umschriebenen und des einbeschriebenen Körpers einer und derselben Gränze nähern, welche keine andere als das Volumen der immer zwischenliegenden Kugelschicht sein kann. Nennen wir das letztere V, so ist hiernach

$$V = \text{Gränzwerth von}\left\{\pi r^2h-\pi\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}h^3\right\},$$

d. i. nach dem schon auf S. 68 benutzten arithmetischen Satze

$$V=\pi r^2h-\tfrac{1}{3}\pi h^3=\pi\left(r^2-\tfrac{1}{3}h^2\right)h.$$

Mittelst dieser Formel lässt sich auch das Volumen jeder anderen Kugelschicht bestimmen, deren parallele Begränzungsebenen keine grössten Kreise sind. Fällt man nämlich vom Mittelpunkte der Kugel auf die genannten Ebenen Senkrechte, deren Längen h_1 und h_2 heissen mögen, so kann die erwähnte Kugelschicht als Differenz zweier Kugelschichten der vorigen Art berechnet werden und ihr Volumen ist daher

$$\pi\left(r^2-\tfrac{1}{3}h_1^2\right)h_1-\pi\left(r^2-\tfrac{1}{3}h_2^2\right)h_2.$$

Im speciellen Falle $h=r$ giebt die für V entwickelte Formel das Volumen einer Halbkugel $=\frac{2}{3}\pi r^3$, und es ist demnach für das ganze Kugelvolumen

$$K=\tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Der Inhalt eines Kugelabschnittes findet sich dadurch, dass man das vorhin berechnete Volumen V einer Kugelschicht von dem Halbkugelvolumen subtrahirt, derselbe ist folglich

$$\tfrac{2}{3}\pi r^3-\pi\left(r^2-\tfrac{1}{3}h^2\right)h;$$

will man die Höhe des Kugelabschnittes in Rechnung

bringen, so ist $r-h$ mit einem neuen Buchstaben zu bezeichnen; für $r-h=h'$ oder $h=r-h'$ ergiebt sich so der Werth

$$\pi\left(r-\tfrac{1}{3}h'\right)h'^2.$$

Das Volumen eines Kugelauschnittes wird als Summe eines Kugelabschnittes und eines Kegels berechnet; bezeichnet h' wie vorhin die Höhe des Abschnittes, so ist $r-h'$ die Höhe des Kegels und $\sqrt{r^2-(r-h')^2}=\sqrt{2rh'-h'^2}$ sein Halbmesser, für das gesuchte Volumen erhält man hiernach

$$\pi\left(r-\tfrac{1}{3}h'\right)h'^2+\tfrac{1}{3}\pi\left(2rh'-h'^2\right)(r-h')=\tfrac{2}{3}\pi r^2 h'.$$

Zwei Meridianebenen und das zugehörige Zweieck umschliessen einen Raum, den wir einen Kugelkeil nennen wollen; derselbe ist so viel mal in dem Kugelvolumen enthalten als seine gekrümmte Oberfläche (das Zweieck) in der Kugelfläche, also, wenn J den Inhalt des Keiles bezeichnet

$$\frac{J}{K}=\frac{Z}{\Omega},\ \text{mithin}\ J=\frac{Z}{\Omega}K.$$

Setzt man für Z, Ω und K ihre Werthe, so hat man die Formel

$$J=\tfrac{4}{3}\pi\frac{w}{90^0}r^3.$$

Die Ebenen dreier grössten Kreise und das zugehörige sphärische Dreieck, welches ABC heissen möge, umschliessen zusammen einen Raum, den wir eine dreiseitige Kugelpyramide nennen wollen; derselbe ist so viel mal in dem Kugelraume enthalten wie seine gekrümmte Oberfläche (das Kugeldreieck) in der Kugelfläche, man hat daher, wenn P den Inhalt der Kugelpyramide bezeichnet

$$\frac{P}{K}=\frac{\triangle}{\Omega},\ \text{mithin}\ P=\frac{\triangle}{\Omega}K.$$

Vermöge der bekannten Werthe von $\triangle$, Ω, K folgt hieraus die Formel

$$P=\tfrac{1}{3}\pi\frac{A+B+C-180^0}{180^0}r^3.$$

Eine mehrseitige Kugelpyramide kann in eine Partie dreiseitiger Kugelpyramiden zerlegt und als Summe derselben berechnet werden.

VIERTES BUCH.

Sphärische Trigonometrie.

Cap. VIII.

Die Berechnung des körperlichen Dreiecks.

---

§. 44.

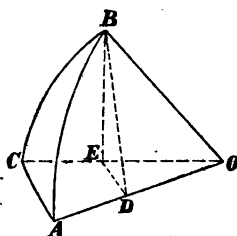
Einleitung und Formeln für das rechtwinklige Dreieck.

Nachdem wir in Cap. II. den Zusammenhang zwischen den Seiten und Winkeln einer dreiseitigen Ecke nachgewiesen und die Constructionen erwähnt haben, durch welche aus den Bestimmungsstücken eines körperlichen Dreiecks die übrigen Bestandtheile abgeleitet werden können, ist noch die Berechnung der fehlenden Stücke vorzunehmen; die Gründe zu dieser Ergänzung der Lehre vom körperlichen Dreieck sind die nämlichen wie bei der Theorie des ebenen Dreiecks (Thl. I. §. 36), sie fallen sogar noch schwerer ins Gewicht, weil die Constructionen körperlicher Ecken in einer Ebene umständlicher und desshalb auch in der Anwendung ungenauer als die Constructionen ebener Dreiecke sind. Wir setzen daher im Folgenden immer voraus, dass die Bestimmungsstücke körperlicher Ecken in Zahlen gegeben seien und bezeichnen die Seiten mit a, b, c, sowie die gegenüberliegenden Winkel mit A, B, C; auch können wir der körperlichen Ecke jederzeit ein sphärisches Dreieck substituiren, wenn wir uns aus dem Scheitel der Ecke mit der Längeneinheit als

Halbmesser eine Kugelfläche construirt und ihre Durchschnitte mit den Seitenebenen der Ecke aufgesucht denken. Endlich bemerken wir noch, dass bei allen folgenden Untersuchungen körperliche Ecken oder sphärische Dreiecke vorausgesetzt sind, von denen jede Seite weniger als 180° beträgt; es liegt hierin desswegen keine Beschränkung der Allgemeinheit, weil sich im Gegenfalle unter den sieben Nebendreiecken immer mindestens eines findet, dessen Seiten einzeln genommen kleiner als 180° sind, und auf dessen Berechnung dann die Berechnung des gegebenen Dreiecks zurückkommt.

Wir betrachten zunächst das bei C rechtwinklige sphärische Dreieck ABC mit den spitzwinkligen Katheten $\angle BOC = a$ und $\angle AOC = b$; von dem Punkte B lassen wir auf den Kugelhalbmesser CO die Senkrechte BE herab und construiren die Ebene, welche BE in sich enthält und auf der Ebene AOB senkrecht steht; die Duchschnitte der Hilfsebene mit AOB und AOC mögen BD und DE heissen.

Fig. 125.



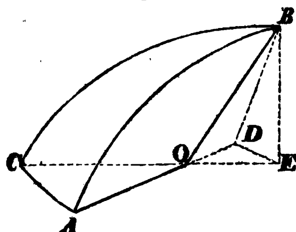
Da die Ebene BDE auf den beiden Ebenen AOC und AOB gleichzeitig senkrecht steht, so ist sie auch normal zur Kante AO, mithin $\angle BDE$ der an dieser Kante liegende Neigungswinkel A. Aus den rechtwinkligen Dreiecken BOD, OED und BOE ergeben sich nun die Beziehungen

$$\cos c = \frac{OD}{OB} = \frac{OE \cdot \cos b}{OB} = \frac{OB \cdot \cos a \cdot \cos b}{OB}$$

oder

1) $$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

Fig. 126.

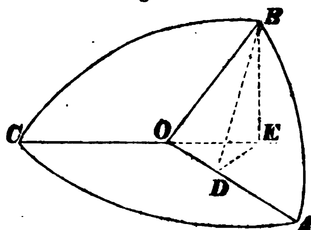


Ist eine der Katheten, z. B. a, ein stumpfer Winkel, so fällt der Fusspunkt E auf die Verlängerung von CO, ebenso D auf die Verlängerung von AO, und aus der Nebenecke erhält man

$$\cos(180^0-c)=\frac{OD}{OB}=\frac{OE.\cos b}{OB}=\frac{OB.\cos(180^0-a).\cos b}{OB},$$

was mit No. 1) übereinstimmt, wenn man $\cos(180^0-c)$ durch $-\cos c$ und $\cos(180^0-a)$ durch $-\cos a$ ersetzt. Sind endlich beide Katheten stumpf, so fällt E auf die Verlängerung von CO, dagegen D auf AO selbst, und es ergiebt sich

Fig. 127.



$$\cos c=\frac{OD}{OB}=\frac{OE.\cos(180^0-b)}{OB}=\frac{OB.\cos(180^0-a).\cos(180^0-b)}{OB},$$

wiederum übereinstimmend mit No. 1). Alles zusammen führt zu dem Satze: **In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ist der Cosinus der Hypotenuse gleich dem Producte aus den Cosinus der Katheten.**

Die rechtwinkligen Dreiecke BDE, BDO und BEO geben ferner in allen drei genannten Fällen

$$\sin A=\frac{BE}{BD}=\frac{OB.\sin a}{OB.\sin c}$$

oder kürzer

2) $\sin A=\frac{\sin a}{\sin c}$ und entsprechend $\sin B=\frac{\sin b}{\sin c}$,

d. h.: **Der Sinus irgend eines an der Hypotenuse liegenden Winkels ist gleich dem Verhältnisse zwischen den Sinus der Gegenkathete und der Hypotenuse.**

Aus den vorhin erwähnten rechtwinkligen Dreiecken erhält man noch in allen Fällen

$$\cos A=\frac{DE}{DB}=\frac{OE.\sin b}{OB.\sin c}=\frac{OB.\cos a\sin b}{OB.\sin c};$$

schreibt man diese Gleichung in der Gestalt

$$\cos A=\cos a\frac{\sin b}{\sin c}$$

und wendet die zweite der Formeln 2) an, so wird

3) $\cos A=\cos a\sin B$, ebenso $\cos B=\cos b\sin A$,

d. h.: **Der Cosinus eines der Hypotenuse anliegenden Winkels ist gleich dem Producte aus**

dem Cosinus der Gegenkathete und dem Sinus des anderen an der Hypotenuse liegenden Winkels.

Die entwickelten drei Hauptsätze enthalten die Mittel zur Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks, wie wir kurz zeigen wollen.

I. Gegeben: die beiden Katheten a und b. Die Hypotenuse ergiebt sich unmittelbar durch die Formel

4) $$\cos c = \cos a \cos b,$$

die Winkel an der Hypotenuse werden durch die Gleichungen

5) $$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \sin B = \frac{\sin b}{\sin c}$$

bestimmt, wo c aus der vorhergehenden Rechnung bekannt ist. Will man dagegen A und B direct berechnen, so dient hierzu eine Formel, welche durch Combination der Gleichungen 2) und 3) entsteht; man erhält nämlich durch Division der Werthe von $\sin A$ und $\cos A$

$$\tan A = \frac{\tan a}{\sin c \sin B}$$

oder, weil nach No. 2) $\sin c \sin B = \sin b$ ist,

6) $$\tan A = \frac{\tan a}{\sin b} \text{ und entsprechend } \tan B = \frac{\tan b}{\sin a}.$$

II. Gegeben: die Hypotenuse c und die Kathete a. Die andere Kathete b folgt aus der Gleichung 1), nämlich

7) $$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a};$$

von den beiden an der Hypotenuse liegenden Winkeln ergiebt sich der eine aus No. 2), nämlich

8) $$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$$

und der andere aus No. 3), wenn statt $\cos b$ und $\sin A$ die eben genannten Werthe substituirt werden, nämlich

9) $$\cos B = \tan a \cot c.$$

III. Gegeben: die Kathete a und der anliegende Winkel B. Die zweite Formel in No. 6) giebt die andere Kathete mittelst der Gleichung

10) $$\tan b = \sin a \tan B;$$

die Hypotenuse folgt aus No. 9)

11) $$\tan c = \frac{\tan a}{\cos B}$$

und der übrige Winkel nach No. 3)

12) $$\cos A = \cos a \sin B.$$

IV. Gegeben: die Kathete b und der Gegenwinkel B. Die andere Kathete findet sich durch Umstellung der Formel 10), nämlich

13) $$\sin a = \tan b \cot B,$$

die Hypotenuse durch Transformation von No. 2), nämlich

14) $$\sin c = \frac{\sin b}{\sin B},$$

und der übrige Winkel aus No. 3):

15) $$\sin A = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

Die drei aufgestellten Formeln sind übrigens zweideutig, weil die Winkel a, c und B ebensowohl spitz als stumpf sein können (vergl. §. 8).

V. Gegeben: die Hypotenuse c und der Winkel B. Die anliegende Kathete bestimmt sich durch Umsetzung der Formel 9), nämlich

16) $$\tan a = \tan c \cos B,$$

die gegenüberliegende Kathete folgt aus No. 2) oder No. 14)

17) $$\sin b = \sin c \sin B;$$

der noch übrige Winkel ergiebt sich dadurch, dass man erst die Gleichung 12) durch die Gleichung 15) dividirt und in der entstehenden Formel

$$\cot A = \cos a \cos b \tan B$$

von der Gleichung 1) Gebrauch macht; es wird so

18) $$\cot A = \cos c \tan B.$$

VI. Gegeben: die beiden Winkel A und B. Aus den in 3) verzeichneten Gleichungen erhält man für die Katheten

19) $$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B} \text{ und } \cos b = \frac{\cos B}{\sin A},$$

endlich kann die Hypotenuse mittelst der Formel

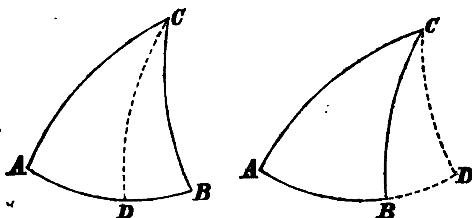
20) $$\cos c = \cot A \cot B$$

berechnet werden, welche dadurch entsteht, dass man die obigen Werthe von $\cos a$ und $\cos b$ in die Gleichung 1) substituirt.

§. 45.
Fundamentalformeln für das schiefwinklige Dreieck.

Von der einen Winkelspitze C des sphärischen Dreiecks ABC fällen wir eine Senkrechte CD auf die Gegenseite AB und zerlegen dadurch das schiefwinklige Dreieck in die Summe oder Differenz zweier rechtwinkligen Dreiecke, je nachdem der Fusspunkt jenes Perpendikels auf AB selbst oder auf die Verlängerung von AB zu liegen kommt. In jedem Falle setzen wir die sphärischen Seiten

Fig. 128.



$AD = u$, $BD = v$, $CD = w$ und die Winkel $ACD = U$, $BCD = V$; bei der ersten Lage der Senkrechten CD ist dann $c = u + v$, $C = U + V$, bei der zweiten $c = u - v$, $C = U - V$.

I. Wenden wir den zweiten der im vorigen Paragraphen entwickelten Hauptsätze auf jedes der rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD an, so erhalten wir

$$\sin A = \frac{\sin w}{\sin b}, \quad \sin B = \frac{\sin w}{\sin a},$$

und durch Vergleichung der hieraus folgenden Werthe von $\sin w$

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B;$$

diese Gleichung bleibt für beide Lagen des Perpendikels CD dieselbe, weil die Winkel ABC und DBC in jedem Falle gleiche Sinus besitzen. Der obigen Gleichung entsprechen zwei ähnliche Beziehungen, welche dadurch entstehen, dass man von B und A Senkrechte auf die Gegenseiten herablässt; zusammen hat man also die drei Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} \sin b \sin A = \sin a \sin B \\ \sin a \sin C = \sin c \sin A \\ \sin c \sin B = \sin b \sin C \end{cases}$$

welche sich zu der Proportion

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C$$

zusammenziehen lassen und den Satz liefern: **In jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinus der Seiten wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.**

II. Durch Anwendung des dritten im vorigen Paragraphen entwickelten Hauptsatzes gelangt man zu den Gleichungen

$$\cos U = \cos u \sin A, \quad \cos V = \cos v \sin B,$$

welche durch Substitution der Werthe

$$\sin A = \frac{\sin w}{\sin b}, \quad \sin B = \frac{\sin w}{\sin a}$$

die folgende Form annehmen

$$\cos U = \frac{\cos u \sin w}{\sin b}, \quad \cos V = \frac{\cos v \sin w}{\sin a}.$$

Das Product derselben ist

$$\cos U \cos V = \frac{\cos u \cos v \sin^2 w}{\sin a \sin b} = \frac{\cos u \cos v\,(1 - \cos^2 w)}{\sin a \sin b};$$

schreibt man dafür

$$\cos U \cos V = \frac{\cos u \cos v - \cos v \cos w \,.\, \cos u \cos w}{\sin a \sin b},$$

so kann nach No. 1) des vorigen Paragraphen $\cos v \cos w = \cos a$ und $\cos u \cos w = \cos b$ gesetzt werden, man hat dann einfacher

$$\cos U \cos V = \frac{\cos u \cos v - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Für das Product $\sin U \sin V$ findet sich, indem man von den Gleichungen

$$\sin U = \frac{\sin u}{\sin b}, \quad \sin V = \frac{\sin v}{\sin a}$$

ausgeht, die entsprechende Formel

$$\sin U \sin V = \frac{\sin u \sin v}{\sin a \sin b}.$$

Um nun zu einer Gleichung zwischen den drei Seiten a, b, c und dem Winkel C zu gelangen, bedarf es nur der Bemerkung, dass $C = U \pm V$ und $c = u \pm v$ ist, wo die

oberen Zeichen der ersten, die unteren der zweiten Lage von CD entsprechen; mittelst der Formel

$$\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha \pm \beta)$$

erhält man nämlich durch Addition von $\cos U \cos V$ und $\sin U \sin V$

$$\cos(U \pm V) = \frac{\cos(u \pm v) - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

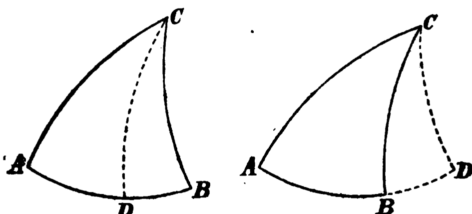
und für $U \pm V = C$, $u \pm v = b$ die gesuchte Gleichung, der sich noch zwei ähnliche Beziehungen zur Seite stellen lassen; zusammen ist also

$$2)\quad \begin{cases} \cos C = \dfrac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}, \\ \cos B = \dfrac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}, \\ \cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}. \end{cases}$$

III. Aus den bereits in No. II. erwähnten Gleichungen

$$\cos U = \cos u \sin A, \quad \cos V = \cos v \sin B$$

Fig. 128.



leiten wir die folgenden ab

$$\cos u = \frac{\cos U}{\sin A}, \quad \cos v = \frac{\cos V}{\sin B};$$

durch Multiplication derselben wird

$$\cos u \cos v = \frac{\cos U \cos V}{\sin A \sin B}.$$

Zufolge der Proportionalität der Sinus der Seiten und der Winkel ergiebt sich ferner

$$\sin A : \sin U = \sin w : \sin u,$$

oder

$$\sin u = \frac{\sin U \sin w}{\sin A} \text{ und entsprechend } \sin v = \frac{\sin V \sin w}{\sin B};$$

das Product beider Gleichungen ist

$$\sin u \sin v = \frac{\sin U \sin V \sin^2 w}{\sin A \sin B} = \frac{\sin U \sin V (1 - \cos^2 w)}{\sin A \sin B}.$$

Giebt man dieser Beziehung eine etwas andere Form, indem man schreibt

$$\sin u \sin v = \frac{\sin U \sin V - \cos w \sin U \,.\, \cos w \sin V}{\sin A \sin B},$$

so können die Producte $\sin U \cos w$ und $\sin V \cos w$ durch die Winkel A und B ausgedrückt werden, wobei aber die Fälle zu unterscheiden sind, ob CD zwischen A und B zu liegen kommt oder nicht. Bei der ersten Lage hat man vermöge des dritten Satzes in §. 44

$$\cos w \sin U = \cos A, \quad \cos w \sin V = \cos B,$$

bei der zweiten Lage dagegen

$$\cos w \sin U = \cos A, \quad \cos w \sin V = \cos(180^0 - B) = -\cos B,$$

also, wenn beide Fälle durch das Zeichen $\pm$ zusammengefasst werden,

$$\sin u \sin v = \frac{\sin U \sin V \mp \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

Bei der ersten Lage von CD ist $u + v = c$, $U + V = C$, mithin durch Subtraction der für $\cos u \cos v$ und $\sin u \sin v$ gefundenen Ausdrücke, wobei im letzteren das obere Zeichen zu nehmen ist,

$$\cos(u+v) = \frac{\cos(U+V) + \cos A \cos B}{\sin A \sin B},$$

d. h.

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B};$$

bei der zweiten Lage von CD ist $u - v = c$, $U - V = C$, mithin durch Addition

$$\cos(u-v) = \frac{\cos(U-V) + \cos A \cos B}{\sin A \sin B},$$

oder

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

Man erhält in beiden Fällen dieselbe Formel; dieser lassen sich noch zwei andere ähnlich gebildete zur Seite stellen und man hat somit

3)
$$\begin{cases} \cos c = \dfrac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}, \\ \cos b = \dfrac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}, \\ \cos a = \dfrac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}. \end{cases}$$

Zu denselben Formeln gelangt man kürzer dadurch, dass man die in No. 2) verzeichneten Gleichungen auf das Polardreieck anwendet; nennen wir $a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1$ die Seiten und Winkel des letzteren, so ist für dieses wie für das ursprüngliche Dreieck

$$\cos C_1 = \frac{\cos c_1 - \cos a_1 \cos b_1}{\sin a_1 \sin b_1},$$

mithin nach Substitution der Werthe $C_1 = 180^0 - c$, $a_1 = 180^0 - A$, $b_1 = 180^0 - B$, $c_1 = 180^0 - C$

$$-\cos c = \frac{-\cos C - \cos A \cos B}{\sin A \sin B},$$

was mit der ersten Formel in No. 3) übereinstimmt.

IV. Schliesslich wollen wir aus den bisherigen Gleichungen noch Relationen zwischen vier solchen Bestandtheilen des sphärischen Dreiecks ableiten, die unmittelbar auf einander folgen wie z. B. A, b, C, a. Nach der dritten und ersten Formel in No. 2) ist

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos c - \cos a \cos b = \sin a \sin b \cos C;$$

multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit $\cos b$ und addirt das Product zur ersten, so hebt sich $\cos b \cos c$ und es bleibt

$$\cos a\,(1 - \cos^2 b) = \sin b \sin c \cos A + \sin a \sin b \cos b \cos C,$$

wobei $1 - \cos^2 b$ durch $\sin^2 b$ ersetzt werden kann. Nach beiderseitiger Division mit $\sin a \sin b$ ergiebt sich

$$\cot a \sin b = \frac{\sin c}{\sin a} \cos A + \cos b \cos C$$

und wenn man statt $\dfrac{\sin c}{\sin a}$ den gleichgeltenden Bruch $\dfrac{\sin C}{\sin A}$ einführt, so gelangt man zu der gesuchten Formel, welcher noch zwei ähnlich gebildete Gleichungen zur Seite gestellt werden können nämlich

$$4)\quad \begin{cases} \cot a \sin b = \cot A \sin C + \cos b \cos C, \\ \cot c \sin a = \cot C \sin B + \cos a \cos B, \\ \cot b \sin c = \cot B \sin A + \cos c \cos A. \end{cases}$$

Auf die Polarecke angewendet giebt die erste Gleichung

$$\cot(180^\circ - A) \sin(180^\circ - B) = \cot(180^\circ - a) \sin(180^\circ - c) + \cos(180^\circ - B) \cos(180^\circ - c)$$

oder

$$-\cot A \sin B = -\cot a \sin c + \cos B \cos c,$$

und bei anderer Anordnung

$$5)\quad \begin{cases} \cot a \sin c = \cot A \sin B + \cos c \cos B, \\ \cot c \sin b = \cot C \sin A + \cos b \cos A, \\ \cot b \sin a = \cot B \sin C + \cos a \cos C. \end{cases}$$

Der Sache nach sind diese Gleichungen nicht wesentlich verschieden von den vorigen; sie entsprechen nur dem Falle, wo die Seiten und Winkel des Dreiecks in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden.

§. 46.

Dreiecksberechnung aus den drei Seiten.

Die Formeln 2) des vorigen Paragraphen enthalten bereits die Lösung der Aufgabe, aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks die Winkel desselben zu finden, jedoch sind jene Formeln für die logarithmische Berechnung nicht bequem und bedürfen desswegen einer weiteren Bearbeitung.

Addirt man beide Seiten der Gleichung

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

zur Einheit, so ergiebt sich

$$1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b \sin c}$$

und unter Anwendung bekannter goniometrischer Formeln (No. 7 auf S. 192 und No. 18 auf S. 193 des ersten Thls.)

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b \sin c}.$$

Setzen wir zur Abkürzung die halbe Summe der Seiten $= s$, also $a + b + c = 2s$ und $b + c - a = 2s - 2a = 2(s - a)$, so folgt aus der vorigen Gleichung die nachstehende

1) $$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$$

und entsprechend für die übrigen Winkel

$$\cos\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}.$$

Wir subtrahiren ferner beide Seiten der Gleichung

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

von der Einheit und erhalten dadurch

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$

oder $$2\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(a-b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \sin c};$$

nach Einführung der Werthe $a-b+c = 2s-2b = 2(s-b)$ und $a+b-c = 2(s-c)$ wird hieraus

2) $$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$$

und dazu gehören die entsprechenden zur Berechnung von B und C dienenden Formeln

$$\sin\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a \sin c}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}}.$$

Durch Division mit $\cos\tfrac{1}{2}A$ in $\sin\tfrac{1}{2}A$ ergiebt sich weiter

3) $$\tan\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$$

und analog $$\tan\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)}},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}}.$$

Mittelst der goniometrischen Formel $\sin A = 2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A$ gelangt man noch zu den Ergebnissen

4) $$\left\{\begin{aligned} \sin A &= \frac{2\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin b \sin c}, \\ \sin B &= \frac{2\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin a \sin c}, \\ \sin C &= \frac{2\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin a \sin b}. \end{aligned}\right.$$

Wollte man die Formel 4) direct aus dem für $\cos A$ gegebenen Ausdrucke ableiten, so würde man von der Gleichung $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ Gebrauch machen müssen und erhielte

$$\sin^2 A = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin b \sin c},$$

oder durch Auflösung der Quadrate und indem man $\sin b$ und $\sin c$ durch $\cos b$ und $\cos c$ ausdrückt,

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

In der vorigen Form ist der Zähler das Product der beiden Factoren

$$\begin{aligned}\sin b \sin c + (\cos a - \cos b \cos c) &= \cos a - \cos(b+c) \\ &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(a+b+c) \sin \tfrac{1}{2}(b+c-a)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sin b \sin c - (\cos a - \cos b \cos c) &= \cos(b-c) - \cos a \\ &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(a-b+c) \sin \tfrac{1}{2}(a+b-c)\end{aligned}$$

und mithin ist durch Zusammenstellung beider Formen des Zählers

$$5) \left\{\begin{aligned} &1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c \\ &= 4 \sin \tfrac{1}{2}(a+b+c) \sin \tfrac{1}{2}(-a+b+c) \\ &\qquad . \sin \tfrac{1}{2}(a-b+c) \sin \tfrac{1}{2}(a+b-c). \end{aligned}\right.$$

Mittelst dieser Transformation ist aus dem für $\sin^2 A$ angegebenen Ausdrucke die Formel 4) sehr leicht herzuleiten; diese doppelte Entwickelung hat aber den Vortheil, dass man die Gleichung 5) kennen lernt, welche sich später als nützlich erweisen wird.

§. 47.

Dreiecksberechnung aus den drei Winkeln.

Die Formeln 3) des §. 45 enthalten bereits die Ableitung der Seiten aus den Winkeln, bedürfen aber zum Zwecke der logarithmischen Rechnung einer Bearbeitung, die der im vorigen Paragraphen durchgeführten völlig analog ist. Man erhält nämlich

$$1 + \cos a = \frac{\sin B \sin C + \cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} = \frac{\cos A + \cos(B-C)}{\sin B \sin C}$$

oder

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}a = \frac{2\cos\tfrac{1}{2}(A-B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\sin B\sin C};$$

für $A+B+C=2S$ ergiebt sich hieraus die Formel

$$1)\qquad \cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}};$$

die analogen Formeln hierzu sind

$$\cos\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-C)}{\sin A\sin C}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A\sin B}}.$$

Aus dem Werthe von $\cos a$ folgt ferner

$$1-\cos a = \frac{\sin B\sin C-\cos A-\cos B\cos C}{\sin B\sin C} = -\frac{\cos A+\cos(B+C)}{\sin B\sin C},$$

oder

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}a = -\frac{2\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C}$$

und durch Einführung der halben Winkelsumme S

$$2)\qquad \sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}};$$

hierzu gehören die analogen Formeln

$$\sin\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\sin A\sin C}},\quad \sin\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\sin A\sin B}}.$$

Ferner erhält man durch Division Ausdrücke für die Tangenten der halben Winkel, nämlich

$$3)\qquad \tan\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}\ \text{u. s. w.}$$

und durch Anwendung der Formel $\sin A = 2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A$

$$4)\ \sin A = \frac{2\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{\sin B\sin C}\ \text{u. s. w.}$$

Die in den Gleichungen 2), 3) und 4) unter dem Wurzelzeichen vorkommenden negativen Vorzeichen bedürfen noch einer Erläuterung. Nach §. 7 beträgt die Winkelsumme $A+B+C$ mehr als zwei und weniger als sechs rechte Winkel, mithin liegt $\tfrac{1}{2}(A+B+C)=S$ zwischen 90° und 270°, folglich ist $\cos S$ jederzeit negativ; ferner beträgt jeder der Ausdrücke $B+C-A=2(S-A)$, $A+C-B=2(S-B)$, $A+B-C=2(S-C)$ weniger als 180°, also jede der Differenzen $S-A$, $S-B$, $S-C$ weniger als

90°, und es sind folglich die Cosinus dieser Werthe immer positiv. Demnach enthalten die Formeln 2), 3) und 4) unter dem Wurzelzeichen einen einzigen negativen Factor ($\cos S$), wodurch das vorhandene Minuszeichen jederzeit aufgehoben wird.

§. 48.

Die Gauss'schen und Neper'schen Gleichungen.

Die Formeln der beiden vorigen Paragraphen lassen sich auf die Weise mit einander verbinden, dass Gleichungen zwischen allen sechs Bestandtheilen eines sphärischen Dreiecks zum Vorschein kommen. Von der Formel

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B$$

ausgehend, erhält man durch Substitution der für $\cos\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}B$, $\sin\frac{1}{2}A$, $\sin\frac{1}{2}B$ angegebenen Werthe

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}$$
$$-\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}$$
$$=\frac{\sin s-\sin(s-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}},$$

d. h. wenn man $\sin s - \sin(s-c)$ in ein Product zusammenzieht und beachtet, dass die Wurzelgrösse $=\sin\frac{1}{2}C$ ist

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos(s-\frac{1}{2}c)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C,$$

oder nach Hebung von $2\sin\frac{1}{2}c$ und unter Rücksicht auf die Bedeutung von s

$$1)\qquad \cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C.$$

Geht man von der bekannten Formel für $\cos\frac{1}{2}(A-B)$ aus, so ergiebt sich durch eine sehr ähnliche Rechnung

$$2)\qquad \cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C.$$

Wir substituiren ferner in die goniometrische Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B + \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B$$

die in §. 46 entwickelten Werthe von $\sin\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}B$, $\cos\frac{1}{2}A$, $\sin\frac{1}{2}B$ und erhalten

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}$$
$$+\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}$$
$$=\frac{\sin(s-b)+\sin(s-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}$$

und bei weiterer Zusammenziehung

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{2\sin[s-\frac{1}{2}(a+b)]\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C$$
$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C,$$

oder endlich

3) $$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Von der bekannten Formel für $\sin\frac{1}{2}(A-B)$ ausgehend, findet man durch eine völlig analoge Rechnung

4) $$\sin\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Die erhaltenen vier Beziehungen stellt man gewöhnlich in folgender Gestalt zusammen

5) $$\begin{cases}\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C,\\ \sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C,\\ \cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C,\\ \sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C;\end{cases}$$

sie heissen die Gauss'schen Gleichungen.

Aus diesen lassen sich wiederum Relationen zwischen fünf Bestandtheilen eines sphärischen Dreiecks herleiten, indem man entweder c oder C herausschafft. Dividirt man nämlich mit der ersten Gleichung in die zweite und mit dritten in die vierte, so bekommt man

6) $$\begin{cases}\tan\frac{1}{2}(A+B)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C,\\ \tan\frac{1}{2}(A-B)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C;\end{cases}$$

dividirt man dagegen mit der ersten Gleichung in die dritte und mit der zweiten in die vierte, wobei man die rechten Seiten zuerst hinschreibt, so wird

$$7)\quad \begin{cases} \tan\frac{1}{2}(a+b) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c, \\ \tan\frac{1}{2}(a-b) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c; \end{cases}$$

dies sind die sogenannten Neper'schen Analogieen.

§. 49.

Dreiecksberechnung aus zwei Seiten und dem zwischenliegenden Winkel.

Sind a, b und C die gegebenen Bestandtheile, so kann man zunächst die beiden übrigen Winkel A und B mittelst der in §. 45 unter No. 4) und 5) entwickelten Formeln berechnen; die erste der Gleichungen 4) und die letzte der Gleichungen 5) geben nämlich

$$\cot A = \frac{\cot a \sin b - \cos b \cos C}{\sin C},$$

$$\cot B = \frac{\cot b \sin a - \cos a \cos C}{\sin C}.$$

Nachher leitet man die dritte Seite c aus den drei Winkeln ab. Dieses Verfahren ist aber für die ununterbrochene logarithmische Rechnung nicht sehr bequem, und daher zeigen wir noch einen anderen Weg.

Mittelst der beiden Neper'schen Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} \tan\frac{1}{2}(A+B) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C, \\ \tan\frac{1}{2}(A-B) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C; \end{cases}$$

berechnet man zuerst die halbe Summe und die halbe Differenz der unbekannten Winkel A und B, woraus A und B selbst mittelst der identischen Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} A = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}(A-B), \\ B = \frac{1}{2}(A+B) - \frac{1}{2}(A-B) \end{cases}$$

folgen. Die noch übrige Seite c kann nun aus einer der Gleichungen 7) des vorigen Paragraphen abgeleitet werden, indem man diesen die Formen

$$3)\quad \begin{cases} \tan\frac{1}{2}c = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\tan\frac{1}{2}(a+b), \\ \tan\frac{1}{2}c = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\tan\frac{1}{2}(a-b) \end{cases}$$

ertheilt, in denen rechter Hand nur bekannte Grössen vorkommen. Noch etwas bequemer ist die Anwendung der aus den Gauss'schen Gleichungen entspringenden Formeln

$$4)\quad \begin{cases} \cos\frac{1}{2}c = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\sin\frac{1}{2}C = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cos\frac{1}{2}C, \\ \sin\frac{1}{2}c = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\sin\frac{1}{2}C = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\cos\frac{1}{2}C, \end{cases}$$

weil man hier die schon in No. 1) gebrauchten Werthe der Cosinus und Sinus von $\frac{1}{2}(a \pm b)$ wiederum benutzen kann.

Auch selbst in dem Falle, wo man die dritte Seite allein berechnen will, bleibt das angegebene Verfahren das kürzeste, weil man hier nur einen der beiden Winkel $\frac{1}{2}(A+B)$ und $\frac{1}{2}(A-B)$ aufzusuchen braucht, welcher dann die Stelle eines Hilfswinkels vertritt; bezeichnet man zur Abkürzung $\frac{1}{2}(A+B)$ mit Φ, so geschieht die Berechnung von c entweder mittelst der Gleichungen

$$5)\quad \tan\Phi = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C,\quad \cos\frac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\Phi}\cos\frac{1}{2}C,$$

oder durch die entsprechenden für $\frac{1}{2}(A-B) = \Psi$ geltenden Formeln

$$6)\quad \tan\Psi = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C,\quad \sin\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\Psi}\cos\frac{1}{2}C.$$

§. 50.

Dreiecksberechnung aus zwei Winkeln und der zwischenliegenden Seite.

Sind A, B, c die gegebenen Bestandtheile, so dienen die beiden Neper'schen Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} \tan\frac{1}{2}(a+b) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c, \\ \tan\frac{1}{2}(a-b) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c \end{cases}$$

zur Berechnung der halben Summe und der halben Differenz der unbekannten Seiten a und b, woraus a und b selbst mittelst der identischen Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} a = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b), \\ b = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b) \end{cases}$$

folgen. Den dritten Winkel C kann man entweder aus den Neper'schen Analogieen

$$3)\quad \begin{cases} \tan\frac{1}{2}C = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}(A+B), \\ \tan\frac{1}{2}C = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}(A-B), \end{cases}$$

oder aus den Gauss'schen Gleichungen

$$4)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}C = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cos\frac{1}{2}c = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\sin\frac{1}{2}c, \\ \cos\frac{1}{2}C = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\cos\frac{1}{2}c = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\sin\frac{1}{2}c \end{cases}$$

herleiten, wobei das Letztere meistens bequemer ist.

Will man den dritten Winkel allein berechnen, so braucht man nur eine der Grössen $\frac{1}{2}(a+b)$ und $\frac{1}{2}(a-b)$ aufzusuchen, welche dann als Hilfswinkel dient; für $\frac{1}{2}(a+b) = \varphi$ hat man auf diese Weise

$$5)\quad \tan\varphi = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c, \quad \sin\frac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\varphi}\sin\frac{1}{2}c,$$

und für $\frac{1}{2}(a-b) = \psi$

$$6)\quad \tan\psi = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c, \quad \cos\frac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\psi}\sin\frac{1}{2}c.$$

§. 51.

Dreiecksberechnung aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel.

Wenn a, b und A gegeben sind, so enthält die Fundamentalformel

$$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c$$

nur die eine Unbekannte c, welche sich unter Anderem dadurch entwickeln lässt, dass man $\sin c$ und $\cos c$ durch $\tan\frac{1}{2}c$ ausdrückt; man hat nämlich

$$\sin c = 2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c = 2\tan\frac{1}{2}c\cos^2\frac{1}{2}c = 2\tan\frac{1}{2}c\,\frac{1}{1+\tan^2\frac{1}{2}c},$$

$$\cos c = 2\cos^2\frac{1}{2}c - 1 = 2\,\frac{1}{1+\tan^2\frac{1}{2}c} - 1 = \frac{1-\tan^2\frac{1}{2}c}{1+\tan^2\frac{1}{2}c};$$

nach Substitution dieser Werthe wird die obige Beziehung zu der quadratischen Gleichung

$(\cos a + \cos b) \tan^2 \frac{1}{2}c - 2 \sin b \cos A \tan \frac{1}{2}c = \cos b - \cos a$
und hieraus ergiebt sich

$$1) \qquad \tan \tfrac{1}{2}c = \frac{\sin b \cos A \pm \sqrt{\sin^2 a - \sin^2 b \sin^2 A}}{\cos a + \cos b}.$$

Diese Formel eignet sich zwar zur logarithmischen Rechnung nicht, sie zeigt aber, unter welchen Umständen die Dreiecksbestimmung zweideutig, eindeutig oder unmöglich ist. Der letzte Fall tritt ein, wenn $\sin b \sin A$ mehr als $\sin a$ beträgt, es muss also $\sin b \sin A$ entweder ebenso viel oder weniger als $\sin a$ ausmachen. Findet das Erste statt, so verschwindet die Wurzelgrösse und damit die Zweideutigkeit, welche durch das doppelte Vorzeichen desselben herbeigeführt wurde. Für $\sin b \sin A < \sin a$ ist im Allgemeinen das Dreieck zweideutig, jedoch hört diese Doppelsinnigkeit über eine gewisse Gränze hinaus wieder auf; wegen $c < 180^0$, also $\frac{1}{2}c < 90^0$, muss nämlich $\tan \frac{1}{2}c$ nothwendig positiv sein und es kann daher das negative Vorzeichen der Wurzel nur dann benutzt werden, wenn

$\sqrt{\sin^2 a - \sin^2 b \sin^2 A} < \sin b \cos A$, d. h. $\sin a < \sin b$

ist; die erwähnte Zweideutigkeit besteht daher nur so lange, als die Bedingungen $\sin b \sin A < \sin a < \sin b$ zusammen erfüllt sind; sie verschwindet, wenn $\sin a \geqq \sin b$ (also von selbst $> \sin b \sin A$) wird. Bei umgekehrter Anordnung lautet das Ergebniss: es ist

c eindeutig für $\sin a \geqq \sin b$,
c zweideutig für $\sin a < \sin b$ und zugleich $\sin a > \sin b \sin A$,
c eindeutig für $\sin a = \sin b \sin A$,
c unmöglich für $\sin a < \sin b \sin A$.

Für die praktische Berechnung ist es am vortheilhaftesten, zuerst den Winkel B zu suchen und nachher c und C zu bestimmen; vermöge der Proportion $\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$ ergiebt sich zunächst

$$2) \qquad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \sin A,$$

nachher aus den Neper'schen Analogieen

$$3) \qquad \tan \tfrac{1}{2}c = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} \tan \tfrac{1}{2}(a+b)$$
$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} \tan \tfrac{1}{2}(a-b),$$

4) $$\cot\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\tan\tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\tan\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Da in No. 2) B durch seinen Sinus bestimmt ist, so kann B ebensowohl spitz als stumpf sein; für $\sin a > \sin b$ entscheidet sich die Sache durch die Bemerkung, dass der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüberliegen muss, für $\sin a < \sin b$ bleibt die Zweideutigkeit so lange, als nicht $\sin a \overline{\gtrless} \sin b \sin A$ ist.

§. 52.

Dreiecksbestimmung aus zwei Winkeln und einer Gegenseite.

Aus den gegebenen Bestandtheilen A, B und a findet man C, wenn man in der Gleichung

$$\cos a \sin B \sin C = \cos A + \cos B \cos C$$

$\sin C$ und $\cos C$ durch $\cot\frac{1}{2}C$ ausdrückt; die Substitution der Werthe

$$\sin C = \frac{2\cot\frac{1}{2}C}{\cot^2\frac{1}{2}C+1}, \quad \cos C = \frac{\cot^2\frac{1}{2}C-1}{\cot^2\frac{1}{2}C+1}$$

verwandelt nämlich die obige Relation in eine quadratische Gleichung, deren Auflösung giebt

1) $$\cot\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos a \sin B \pm \sqrt{\sin^2 A - \sin^2 a \sin^2 B}}{\cos A + \cos B}.$$

Die Discussion dieser Formel ist der im vorigen Paragraphen mitgetheilten Erörterung so ähnlich, dass die Angabe des Endresultates genügen wird; man findet

C eindeutig für $\sin A \geqq \sin B$,

C zweideutig für $\sin A < \sin B$ und zugleich $\sin A > \sin a \sin B$,

C eindeutig für $\sin A = \sin a \sin B$,

C unmöglich für $\sin A < \sin a \sin B$.

Für die praktische Berechnung empfiehlt sich folgendes Verfahren; aus der Proportion $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$ leitet man zunächst

2) $$\sin b = \frac{\sin B}{\sin A}\sin a$$

ab und benutzt nachher die Neper'schen Analogieen zur Bestimmung der übrigen Stücke, nämlich

$$3)\quad \begin{cases} \cot\frac{1}{2}C = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\tan\frac{1}{2}(A+B) \\ \qquad\quad = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\tan\frac{1}{2}(A-B), \\ \tan\frac{1}{2}c = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\tan\frac{1}{2}(a+b) \\ \qquad\quad = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\tan\frac{1}{2}(a-b). \end{cases}$$

Die in No. 2) erwähnte Formel bestimmt die Seite b nicht unzweideutig; ist nun $\sin A > \sin B$, so muss b so gewählt werden, dass dem grösseren der Winkel A und B die grössere Seite gegenüber liegt; für $\sin A < \sin B$ bleibt die Zweideutigkeit so lange, als nicht $\sin A \overline{\overline{>}} \sin a \sin B$ ist.

§. 53.

Inhaltsbestimmung des sphärischen Dreiecks.

Nach §. 43, I. kann der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks aus den drei Winkeln desselben mittelst der Formel

$$1)\qquad \Delta = \pi\frac{A+B+C-180^\circ}{180^\circ}r^2$$

abgeleitet werden, es kommt also nur darauf an, den sphärischen Excess

$$2)\qquad E = A+B+C-180^\circ$$

zu ermitteln. Dies ist zwar in dem Falle bald geschehen, wo die Winkel A, B, C unmittelbar gegeben sind, würde aber eine etwas umständliche Rechnung verursachen, wenn das Dreieck aus anderen Stücken bestimmt wäre, folglich die Winkel erst einzeln aufgesucht werden müssten; wir entwickeln daher noch diejenigen Formeln, welche zur directen Berechnung des Excesses dienen, sobald das Dreieck unzweideutig bestimmt ist.

Aus der Gleichung 2) folgt $\frac{1}{2}E = \frac{1}{2}(A+B+C) - 90^\circ$, mithin

$$\sin\frac{1}{2}E = -\cos\frac{1}{2}(A+B+C) = -\cos\left[\frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{2}C\right]$$
$$= -\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}C + \sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}C,$$

und durch Anwendung der Gauss'schen Gleichungen (§. 48, 5)

$$\sin\tfrac{1}{2}E = -\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C.\cos\tfrac{1}{2}C + \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C.\sin\tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b) - \cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C;$$

im Zähler lässt sich die Differenz der beiden Cosinus in das doppelte Product zweier Sinus verwandeln und nachher die Formel $2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C = \sin C$ benutzen; dies giebt

$$3)\qquad \sin\tfrac{1}{2}E = \frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\sin C.$$

Eine ähnliche Rechnung, bei der man von $\cos\frac{1}{2}E$ ausgeht, liefert das Seitenstück zur vorstehenden Formel; man hat nämlich

$$\cos\tfrac{1}{2}E = \sin\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \sin[\tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{1}{2}C]$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C + \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}C$$

und durch Anwendung der Gauss'schen Gleichungen

$$\cos\tfrac{1}{2}E = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C.\cos\tfrac{1}{2}C + \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C.\sin\tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C + \cos\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

Entwickelt man im Zähler $\cos\frac{1}{2}(a-b)$ und $\cos\frac{1}{2}(a+b)$, so lassen sich die entstehenden Glieder dadurch zusammenziehen, dass man von den Formeln

$$\cos^2\tfrac{1}{2}C + \sin^2\tfrac{1}{2}C = 1 \quad\text{und}\quad \cos^2\tfrac{1}{2}C - \sin^2\tfrac{1}{2}C = \cos C$$

Gebrauch macht; das Resultat dieser leichten Reduction ist

$$4)\qquad \cos\tfrac{1}{2}E = \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

Jede der Grundformeln 3) und 4) enthält auf der rechten Seite vier Bestandtheile (a, b, c, C) des sphärischen Dreiecks, von denen sich mittelst der übrigen sphärisch-trigonometrischen Relationen eine herausschaffen lässt, in jedem Falle bleibt eine Gleichung übrig, in welcher der Excess durch drei Bestimmungsstücke ausgedrückt ist. Die hauptsächlichsten Entwickelungen dieser Art sind folgende.

I. Wenn E aus den drei Seiten a, b, c berechnet werden soll, ist C zu eliminiren, und es kann dies auf verschiedene Weise geschehen, indem man entweder die Gleichungen 3) und 4) unter einander oder mit einer der Formeln des §. 46 verbindet.

Um das Erste vorzunehmen, schreiben wir die Gleichungen 3) und 4) in nachstehender Weise

$$\cos\tfrac{1}{2}c\,\sin\tfrac{1}{2}E = \sin\tfrac{1}{2}a\,\sin\tfrac{1}{2}b\,\sin C$$

$$\cos\tfrac{1}{2}c\,\cos\tfrac{1}{2}E - \cos\tfrac{1}{2}a\,\cos\tfrac{1}{2}b = \sin\tfrac{1}{2}a\,\sin\tfrac{1}{2}b\,\cos C,$$

quadriren und addiren sie; es ergiebt sich

$$(\cos\tfrac{1}{2}c\,\sin\tfrac{1}{2}E)^2 + (\cos\tfrac{1}{2}c\,\cos\tfrac{1}{2}E - \cos\tfrac{1}{2}a\,\cos\tfrac{1}{2}b)^2$$
$$= \sin^2\tfrac{1}{2}a\,\sin^2\tfrac{1}{2}b.$$

Löst man linker Hand die Quadrate auf und benutzt die Formeln

$$\sin^2\tfrac{1}{2}E + \cos^2\tfrac{1}{2}E = 1, \qquad \cos^2\tfrac{1}{2}a = 1 - \sin^2\tfrac{1}{2}a,$$
$$\cos^2\tfrac{1}{2}b = 1 - \sin^2\tfrac{1}{2}b,$$

so kann die übrig bleibende Gleichung leicht auf $\cos\frac{1}{2}E$ reducirt werden; das Ergebniss ist

$$5)\qquad \cos\tfrac{1}{2}E = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a + \cos^2\frac{1}{2}b + \cos^2\frac{1}{2}c - 1}{2\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}b\,\cos\frac{1}{2}c}.$$

Eine für logarithmische Rechnung bequemere Formel findet sich dadurch, dass man den in §. 46 angegebenen Werth von $\sin C$ in die Gleichung 3) substituirt; es wird

$$6)\qquad \sin\tfrac{1}{2}E = \frac{\sqrt{\sin s\,\sin(s-a)\,\sin(s-b)\,\sin(s-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}b\,\cos\frac{1}{2}c}.$$

Aus den Formeln 5) und 6) lassen sich die Werthe von $\tan\frac{1}{2}E$ und $\cot\frac{1}{2}E$ ableiten, doch sind dieselben nicht bequem; wir suchen daher $\tan\frac{1}{4}E$ zu entwickeln, indem wir von der Gleichung

$$\tan\tfrac{1}{2}u = \frac{1-\cos u}{\sin u} \quad \text{also} \quad \tan\tfrac{1}{4}E = \frac{1-\cos\frac{1}{2}E}{\sin\frac{1}{2}E}$$

ausgehen. Vermöge der für $\cos\frac{1}{2}E$ und $\sin\frac{1}{2}E$ angegebenen Werthe wird zunächst

$$\tan\tfrac{1}{4}E = \frac{1-\cos^2\frac{1}{2}a - \cos^2\frac{1}{2}b - \cos^2\frac{1}{2}c + 2\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}b\,\cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin s\,\sin(s-a)\,\sin(s-b)\,\sin(s-c)}};$$

auf den Zähler dieses Ausdrucks kann die in §. 46 unter No. 5) entwickelte Formel angewendet werden, wenn man $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ statt der dort vorkommenden Grössen a, b, c setzt; der Zähler ist dann

$$4\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(-a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(a-b+c)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{2}s\,\sin\tfrac{1}{2}(s-a)\,\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\,\sin\tfrac{1}{2}(s-c).$$

Substituirt man diesen Werth und setzt $\sin s = 2\sin\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}s$, ebenso $\sin(s-a) = 2\sin\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-a)$ u. s. w., so erscheint die sehr elegante Formel

7) $\tan\frac{1}{2}E = \sqrt{\tan\frac{1}{2}s\,\tan\frac{1}{2}(s-a)\,\tan\frac{1}{2}(s-b)\,\tan\frac{1}{2}(s-c)}.$

II. Um den sphärischen Excess aus zwei Seiten a, b und dem Zwischenwinkel C zu berechnen, bedarf es der Elimination von c in den Gleichungen 4) und 5); sie geschieht einfach durch Division und giebt

$$\tan\frac{1}{2}E = \frac{\sin\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}b\,\sin C}{\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}b\,\cos C}$$

oder, wenn Zähler und Nenner mit $\sin\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}b$ dividirt werden,

8) $$\tan\frac{1}{2}E = \frac{\sin C}{\cot\frac{1}{2}a\,\cot\frac{1}{2}b + \cos C}.$$

So lange hier das Product $\cot\frac{1}{2}a\,\cot\frac{1}{2}b$ und der Winkel C sich nicht ändern, so lange bleibt der sphärische Excess mithin auch der Inhalt des Dreiecks derselbe und man kann demnach den Satz aussprechen: wenn zwei sphärische Dreiecke in einem Winkel und in dem Producte der Cotangenten (oder Tangenten) der halben an diesem Winkel liegenden Seiten übereinstimmen, so besitzen sie gleiche Fläche.

Die vorige Formel ist zur logarithmischen Rechnung unbequem und bedarf deshalb einer Verbesserung, welche unter Anderem durch Einführung eines Hilfswinkels erreicht wird; schreibt man nämlich

$$\tan\frac{1}{2}E = \frac{\tan\frac{1}{2}a\,\tan\frac{1}{2}b\,\cos C}{1 + \tan\frac{1}{2}a\,\tan\frac{1}{2}b\,\cos C}\tan C$$

und setzt

$$\tan\frac{1}{2}a\,\tan\frac{1}{2}b\,\cos C = \tan^2\varphi,$$

wo nun der Hilfswinkel φ mittelst der Gleichung

9) $$\tan\varphi = \sqrt{\tan\frac{1}{2}a\,\tan\frac{1}{2}b\,\cos C}$$

zu bestimmen ist, so verwandelt sich die obige Formel in

10) $$\tan\frac{1}{2}E = \sin\varphi\,\tan C$$

und hier kann die Rechnung ununterbrochen mit Logarithmen geführt werden.

Sind von einem sphärischen Dreiecke zwei Winkel bekannt, so ist es das Kürzeste, den dritten Winkel und somit E direct zu berechnen; wir unterlassen daher die Entwickelung der auf diesen Fall bezüglichen Formeln.

13*

§. 54.

Sphärische Dreiecke von geringer Krümmung.

Bisher setzten wir den Halbmesser der Kugel, auf welcher sphärische Dreiecke bestimmt waren, immer der Einheit gleich und dachten uns die Seiten a, b, c in Graden, Minuten etc. ausgedrückt; ist dagegen ein Halbmesser r gegeben und jede Seite des sphärischen Dreiecks auf der Kugel selber mittelst eines bestimmten Längenmasses gemessen, so müssen die Seitenwinkel erst berechnet werden; dem Bogen a auf der gegebenen Kugel entspricht dann der Bogen $\frac{a}{r}$ auf einer mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kugel und der zugehörige Centriwinkel ist der gesuchte Seitenwinkel, den wir gleichfalls mit $\frac{a}{r}$ bezeichnen können, weil es für die trigonometrischen Functionen gleichgiltig bleibt, ob man schreibt $\cos 180^0 = -1$ oder $\cos \pi = -1$, $\cos 90^0 = 0$ oder $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ u. s. w. Wir betrachten nun besonders den Fall, wo a, b, c im Vergleich zu r sehr klein sind, wie z. B. bei den gewöhnlichen Messungen auf der Erdoberfläche, und wollen namentlich die Frage erörtern, ob sich einem derartigen sphärischen Dreiecke ein ebenes Dreieck substituiren lässt.

Bezeichnen wir durch s die Länge eines beliebigen mit mit dem Halbmesser r beschriebenen Bogens, so ist $\frac{s}{r}$ die Länge des mit dem Radius $= 1$ beschriebenen, zu dem nämlichen Centriwinkel gehörenden Bogens, und für den Sinus des letzteren gelten nach Theil I. S. 248 die Ungleichungen

$$\sin\frac{s}{r} > \frac{s}{r} - \frac{1}{6}\left(\frac{s}{r}\right)^3,$$

$$\sin\frac{s}{r} < \frac{s}{r} - \frac{1}{6}\left(\frac{s}{r}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{s}{r}\right)^5.$$

Bei kleinen $\frac{s}{r}$ beträgt $\frac{1}{120}\left(\frac{s}{r}\right)^5$ sehr wenig, und daher stimmen die Grössen, zwischen denen $\sin\frac{s}{r}$ liegt, in we-

nigstens 7 Decimalen überein*); bei diesem Genauigkeitsgrade kann man folglich die obigen Ungleichungen durch die Gleichung

$$1)\qquad \sin\frac{s}{r} = \frac{s}{r} - \tfrac{1}{6}\left(\frac{s}{r}\right)^3$$

ersetzen. Für den Cosinus gestaltet sich die Sache ähnlich, denn es ist

$$\cos\frac{s}{r} < 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2 + \tfrac{1}{24}\left(\frac{s}{r}\right)^4,$$

$$\cos\frac{s}{r} > 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2 + \tfrac{1}{24}\left(\frac{s}{r}\right)^4 - \tfrac{1}{720}\left(\frac{s}{r}\right)^6,$$

mithin weil die rechten Seiten um noch weniger als die vorigen differiren;

$$2)\qquad \cos\frac{s}{r} = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2 + \tfrac{1}{24}\left(\frac{s}{r}\right)^4.$$

Sind nun a, b, c die Seitenlängen eines sphärischen Dreiecks und r der Kugelhalbmesser, so geschieht die Berechnung des Winkels A mittelst der Formel

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cdot\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{c}{r}},$$

und hier können die Gleichungen 1) und 2) benutzt werden, falls r sehr gross im Verhältniss zu a, b und c ist. Bei der Ausrechnung der Producte $\cos\frac{b}{r}\,.\cos\frac{c}{r}$ und $\sin\frac{b}{r}\,.\sin\frac{c}{r}$ sind ferner diejenigen Summanden wegzulassen, welche höhere als vierte Potenzen von r zu Nennern haben, weil eben diese Ausdrücke die 7. Decimale nicht beeinflussen; dies giebt

$$\cos A = \frac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \dfrac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24r^4}}{\dfrac{bc}{r^2}\left(1-\dfrac{b^2+c^2}{6r^2}\right)}.$$

---

*) Für die Erde z. B. ist nahezu $r = 860$ geographische Meilen, mithin bei einem Bogen von 50 Meilen Länge

$$\tfrac{1}{120}\left(\tfrac{5}{86}\right)^5 = 0{,}000000007,$$

womit sich die obige Behauptung rechtfertigt.

Multipliciren wir Zähler und Nenner mit $1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}$, so erhalten wir den neuen Nenner

$$\frac{bc}{r^2}-\frac{bc\,(b^2+c^2)^2}{36\,r^5},$$

wobei der Subtrahend wegzulassen ist; auf gleiche Weise lässt sich der Zähler vereinfachen und es bleibt

$$cos\,A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{(b^2+c^2)^2-a^2\,(b^2+c^2)}{12bcr^2}$$
$$+\frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24bcr^2}$$

oder

$$cos\,A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-\frac{2\,(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4}{24bcr^2}.$$

Wir denken uns zweitens ein ebenes Dreieck $A'B'C'$, dessen Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ den Bögen a, b, c der Länge nach gleich sein mögen; in diesem Dreiecke ist

$$cos\,A'=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

und es findet sich hieraus

$$4b^2c^2\,sin^2\,A'=2\,(a^2\,b^2+b^2\,c^2+c^2\,a^2)-a^4-b^4-c^4;$$

die Substitution dieser Ausdrücke in No. 3) giebt

$$cos\,A=cos\,A'-\frac{b\,c}{6\,r^2}\,sin^2\,A'.$$

Diese Beziehung zwischen den Winkeln A und A' lässt eine Vereinfachung zu, wenn man sich erinnert, dass A nur wenig von A' differiren kann also $A-A'$ eine sehr kleine Grösse sein muss, die wir x nennen wollen; es ist dann $A=A'+x$ und nach Formel 8) in §. 44 des ersten Theiles

$$cos\,A=cos\,A'-x\,sin\,A',$$

mithin durch Vergleichung mit dem Obigen

$$x=\frac{b\,c}{6\,r^2}\,sin\,A'=\tfrac{1}{3}\,\frac{\tfrac{1}{2}\,bc\,sin\,A'}{r^2}$$

Hier bedeutet $\frac{1}{2}bc\,sin\,A'$ den Inhalt des Dreiecks $A'B'C'$, welcher Δ' heissen möge; man erhält demnach für x den einfachen Ausdruck $\frac{1}{3}\frac{\Delta'}{r^2}$ oder

$$A=A'+\tfrac{1}{3}\frac{\Delta'}{r^2},\quad B=B'+\tfrac{1}{3}\frac{\Delta'}{r^2},\quad C=C'+\tfrac{1}{3}\frac{\Delta'}{r^2},$$

wobei sich die Werthe von B und C durch eine analoge Betrachtung ergeben. Umgekehrt ist

$$A' = A - \tfrac{1}{3}\frac{\Delta'}{r^2}, \quad B' = B - \tfrac{1}{3}\frac{\Delta'}{r^2}, \quad C' = C - \tfrac{1}{3}\frac{\Delta'}{r^2}$$

und da $A' + B' + C' = 180^0$, so folgt

$$180^0 = A + B + C - \frac{\Delta'}{r^2} \text{ oder } \frac{\Delta'}{r^2} = A + B + C - 180^0.$$

Man erkennt hieraus, dass das Verhältniss $\frac{\Delta'}{r^2}$ als sphärischer Excess des Dreiecks ABC zu betrachten ist und dass ferner die Winkel des ebenen Dreiecks mittelst der einfachen Gleichungen

$$A' = A - \tfrac{1}{3}E, \quad B' = B - \tfrac{1}{3}E, \quad C' = C - \tfrac{1}{3}E$$

aus den Winkeln des sphärischen Dreieckes abgeleitet werden können. Dies giebt den für die Geodäsie wichtigen Satz: Ein wenig gekrümmtes Kugeldreieck darf als ein ebenes Dreieck angesehen werden, dessen Seiten die nämlichen Längen besitzen und dessen Winkel dadurch gebildet sind, dass jeder Winkel des Kugeldreiecks um ein Drittheil des sphärischen Excesses vermindert worden ist.

Cap. IX.

Stereometrische Anwendungen der sphärischen Trigonometrie.

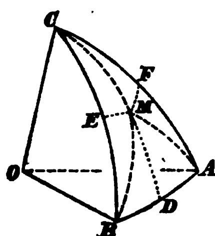
---

§. 55.

Bestimmung der um und in ein sphärisches Dreieck beschriebenen Kreise.

I. Bezeichnet M wie früher den Pol des Kugelkreises, welcher sich um das sphärische Dreieck ABC beschreiben lässt, so sind die Bögen AM, BM, CM gleich und

Fig. 129.



stellen den sphärischen Halbmesser jenes Kreises dar; für $AM = BM = CM = r$ und $\angle BAM = \angle ABM = \gamma$ ist nun in dem Dreiecke ABM nach Formel 2) in §. 45

$$1)\qquad \cos\gamma = \frac{\cos r - \cos c \cos r}{\sin c \sin r} = \frac{1 - \cos c}{\sin c} \cot r;$$

diese Gleichung wird nachher, in der Form

$$2)\qquad \tan r = \frac{1 - \cos c}{\sin c} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} = \tan \tfrac{1}{2} c \sec\gamma$$

dargestellt, zur Berechnung von $\tan r$ dienen, sobald erst γ bestimmt ist.

Aus dem sphärischen Dreiecke ACM ergiebt sich auf ganz ähnliche Weise wie oben

$$\cos(A - \gamma) = \frac{1 - \cos b}{\sin b} \cot r$$

und wenn die vorstehende Gleichung durch No. 1) dividirt wird

$$\frac{\cos(A - \gamma)}{\cos\gamma} = \frac{1 - \cos b}{\sin b} \cdot \frac{\sin c}{1 - \cos c}.$$

Linker Hand lösen wir $\cos(A - \gamma)$ auf, rechter Hand bringen wir die leicht zu beweisende Transformation

$$\frac{\sin c}{1 - \cos c} = \frac{1 + \cos c}{\sin c}$$

in Anwendung und erhalten so

$$\cos A + \sin A \tan\gamma = \frac{(1 - \cos b)(1 + \cos c)}{\sin b \sin c},$$

welche den Werth von $\tan\gamma$, durch b, c und A ausgedrückt, liefert. Um aber $\tan\gamma$ durch die Dreiecksseiten auszudrücken, substituiren wir die bekannten Werthe

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \quad \sin A = \frac{2\lambda}{\sin b \sin c}$$

worin zur Abkürzung

$$3)\qquad \lambda = \sqrt{\sin s \sin(s - a) \sin(s - b) \sin(s - c)}$$

gesetzt worden ist, und erhalten nach Weglassung des gemeinschaftlichen Nenners $\sin b \sin c$ und durch Reduction auf $\tan\gamma$

$$tan\,\gamma = \frac{1 - (cos\,a + cos\,b - cos\,c)}{2\lambda}.$$

Da in der Formel 2) nicht die Tangente, sondern die Sekante von γ vorkommt, so muss erst noch die Gleichung $sec^2\gamma = 1 + tan^2\gamma$ zu Hilfe genommen werden; dies giebt zunächst

$$sec^2\gamma = \frac{4\lambda^2 + 1 - 2(cos\,a + cos\,b - cos\,c) + (cos\,a + cos\,b - cos\,c)^2}{4\lambda^2}$$

Hier lässt sich der Zähler mittelst der Formel 5) in §. 46 zusammenziehen; man hat nämlich

$$4\lambda^2 = 1 - cos^2 a - cos^2 b - cos^2 c + 2\,cos\,a\,cos\,b\,cos\,c,$$

und durch die Substitution dieses Werthes findet sich bei vollständiger Ausrechnung als Zähler

$$\begin{aligned} &2 - 2\,cos\,a - 2\,cos\,b + 2\,cos\,c \\ &\quad + 2\,cos\,a\,cos\,b - 2\,cos\,a\,cos\,c - 2\,cos\,b\,cos\,c \\ &\quad + 2\,cos\,a\,cos\,b\,cos\,c \\ &= 2\,(1 - cos\,a)\,(1 - cos\,b)\,(1 + cos\,c) \\ &= 16\,sin^2\tfrac{1}{2}a\,sin^2\tfrac{1}{2}b\,cos^2\tfrac{1}{2}c, \end{aligned}$$

mithin nach Einsatz des Vorstehenden und Ausziehung der Wurzel

$$sec\,\gamma = \frac{2\,sin\,\frac{1}{2}a\,sin\,\frac{1}{2}b\,cos\,\frac{1}{2}c}{\lambda}.$$

Die Gleichung 2) liefert nun zur Berechnung r die elegante Formel

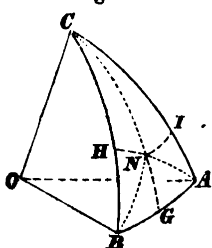
$$4)\quad tan\,r = \frac{2\,sin\,\frac{1}{2}a\,sin\,\frac{1}{2}b\,sin\,\frac{1}{2}c}{\sqrt{sin\,s\,sin\,(s-a)\,sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)}},$$

welche dem in §. 26 des ersten Theiles entwickeltem Satze analog ist; letzterer lässt sich daraus herleiten, wenn man den Halbmesser der Kugel unendlich gross werden lässt und dann die Sinus und Tangenten der Bögen mit letzteren vertauscht. Durch Einführung des sphärischen Excesses kann man übrigens der Gleichung 4) noch die folgende Gestalt ertheilen

$$5)\qquad tan\,r = \frac{tan\,\frac{1}{2}a\,tan\,\frac{1}{2}b\,tan\,\frac{1}{2}c}{sin\,\frac{1}{2}E}.$$

II. Ist N der Pol des einem sphärischen Dreiecke eingeschriebenen Kreises, $NG = NH = NI = \varrho$ sein sphärischer Halbmesser, so halbiren die Bögen AN, BN, CN die Winkel des Dreiecks, die Dreiecke ANG und ANI sind sym-

Fig. 130.



metrisch gleich, ebenso BNG und BNH, CNH und CNI; der Abschnitt $AG = AI$ möge x heissen, dem analog sei $BG = BH = y$, $CH = CI = z$, man hat dann

$$x + y = c, \quad x + z = b, \quad y + z = a,$$

woraus

$$x = \tfrac{1}{2}(b + c - a) = s - a$$
$$y = \tfrac{1}{2}(a + c - b) = s - b$$
$$z = \tfrac{1}{2}(a + b - c) = s - c.$$

In dem rechtwinkligen Dreiecke AGN ist nun nach Formel 10 in §. 44

$$\tan\varrho = \sin x \tan\tfrac{1}{2}A = \sin(s - a)\tan\tfrac{1}{2}A$$

und entsprechend

$$\tan\varrho = \sin(s - b)\tan\tfrac{1}{2}B, \quad \tan\varrho = \sin(x - c)\tan\tfrac{1}{2}C.$$

Will man $\tan\varrho$ durch die Dreieckseiten allein ausdrücken, so bedarf es nur der Substitution des bekannten Werthes von $\tan\tfrac{1}{2}A$; man erhält

$$6) \qquad \tan\varrho = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

oder, wenn man es vorzieht, den sphärischen Excess in Rechnung zu bringen,

$$7) \qquad \tan\varrho = \frac{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}{\sin s}\sin\tfrac{1}{2}E.$$

Durch ein analoges Verfahren erhält man die Halbmesser der Kreise, welche je eine Dreieckseite und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten berühren; die Halbirung des Winkels A und der Nebenwinkel von B und C z. B. führt zu demjenigen Kreise, welcher die Seite $BC = a$ und von den übrigen Seiten die Verlängerungen berührt; seinen Halbmesser wollen wir mit ϱ_1 bezeichnen und unter x, y, z wiederum die Abschnitte verstehen, welche durch die Berührungspunkte des Kreises auf den Seiten gebildet werden; es ist dann

$$x - y = c, \quad x - z = b, \quad y + z = a,$$

woraus folgt

$$x = s, \quad y = s - c, \quad z = s - b.$$

Man hat ferner

$$\tan\varrho_1 = \sin x \tan\tfrac{1}{2}A = \sin s \tan\tfrac{1}{2}A$$

und vermöge des bekannten Werthes von $\tan\tfrac{1}{2}A$

8) $$\tan \varrho_1 = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin (s-a)}},$$

für die übrigen Halbmesser ist in entsprechender Weise

9) $$\tan \varrho_2 = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a) \sin (s-c)}{\sin (s-b)}},$$

10) $$\tan \varrho_3 = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin (s-c)}}.$$

Aus den zur Bestimmung von r, ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 angegebenen Formeln lassen sich leicht Beziehungen zwischen diesen vier Grössen herleiten; wir erwähnen nur die folgenden

11) $$\tan r \tan \varrho = \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)},$$

12) $$\sqrt{\tan \varrho \tan \varrho_1 \tan \varrho_2 \tan \varrho_3}$$
$$= \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)},$$

deren letzte das sphärische Seitenstück zur Gleichung 8) in §. 26, Theil I. darstellt.

§. 56.

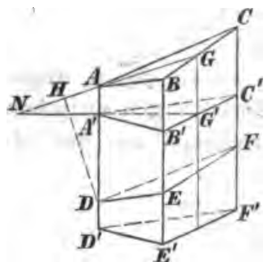
Die Grundformeln der Polyedrometrie.

Der trigonometrischen Behandlung polygonometrischer Aufgaben lässt sich die trigonometrische Auflösung von solchen Problemen gegenüberstellen, bei denen aus gegebenen und hinreichenden Bestandtheilen eines Körpers die übrigen Stücke berechnet werden sollen; der Polygonometrie der Ebene entspricht dann die Polyedrometrie des Raumes. Bei der ungemeinen Mannigfaltigkeit räumlicher Gestalten würde eine nur einigermaassen ins Detail gehende Untersuchung dieser Art einen so bedeutenden Raum in Anspruch nehmen, dass hier nur ihre Grundzüge mitgetheilt werden können. Um zu diesen zu gelangen, gehen wir von der Projection ebener Flächen aus, welche hier ähnliche Dienste leistet, wie die Projection gerader Linien bei der Entwickelung der polygonometrischen Grundformeln.

I. Ein beliebig vielseitiges schiefes Prisma $ABCDEF$ sei von einer zu den Kanten AD, BE.... senkrechten Ebene durchschnitten und $A'B'C'$ die entstandene Schnitt-

figur, welche als rechtwinklige Projection von ACB gelten kann; wir denken uns ferner die Ebene des Neigungswinkels von ABC gegen $A'B'C'$ construirt und der Einfachheit wegen durch die Kante AD gelegt; diese Ebene schneidet die Ebenen ABC und $A'B'C'$ in zwei Geraden AG u. $A'G'$, der Winkel ANA' zwischen letzteren ist dann der Neigungswinkel, welcher v heissen möge. Nehmen wir $DD' = AA'$ und legen durch D' eine Ebene parallel zu $A'B'C'$, so ist bekanntlich in Beziehung auf die Volumina

Fig. 131.



$$\text{Prisma } A'B'C'D'E'F' = \text{Prisma } ABCDEF.$$

Das erste Volumen lässt sich, wenn g' den Flächeninhalt von $A'B'C'$ bezeichnet, durch $g'.D'A'$ ausdrücken, das zweite Volumen gestattet eine ähnliche Berechnung, sobald man dessen Höhe construirt; man erhält dieselbe einfach dadurch, dass man in der Ebene $AGG'A'$, welcher auch der Punkt D angehört, von D auf die nöthigenfalls verlängerte GA das Perpendikel DH herablässt. Bezeichnet g die Fläche ABC, so ist $g.DH$ das zweite der obigen Volumina, also

$$g'.D'A' = g.DH, \text{ mithin } g' = g\frac{DH}{D'A'} = g\frac{DH}{DA};$$

das Verhältniss $DH:DA$ bedeutet den Cosinus von $\angle HDA$, und da dieser Winkel dem von den Geraden AG und $A\,G'$ gebildeten Neigungswinkel v gleichkommt, so folgt die einfache Beziehung

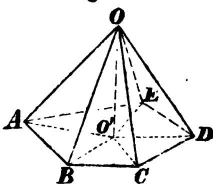
$$g' = g \cos v$$

d. h.: Die Fläche der Projection einer ebenen Figur ist das Product aus dem Inhalte der ursprünglichen Figur in den Cosinus des Neigungswinkels beider Figurenebenen.

II. Dieser Satz gestattet eine Anwendung auf die Pyramide, wenn man die Spitze O derselben auf die Basis $ABCD\ldots$ mithin auch alle Seitenflächen ABO, BCO, $CDO\ldots$ auf die Grundfläche projicirt. Setzen wir zunächst voraus, dass die Projection O' von O nicht ausserhalb der Basis

liege, so ist die Fläche der letzteren gleich der Summe der Dreiecksflächen ABO', BCO', $CDO'\ldots$, deren jede nach der vorhin erwähnten Formel berechnet werden kann; wir bezeichnen zu diesem Zwecke den Inhalt der Basis mit S_0, die Inhalte der Seitenflächen ABO, $BCO\ldots$ der Reihe nach mit S_1, S_2, $S_3\ldots$, endlich die Winkel, welche die Seitenflächen mit der Basis bilden, durch v_1, v_2, $v_3\ldots$ und erhalten so

Fig. 132.



1) $$S_0 = S_1 \cos v_1 + S_2 \cos v_2 + S_3 \cos v_3 + \ldots$$

In dem Falle, wo O' ausserhalb der Basis zu liegen kommt, werden eine oder einige der Projectionen ABO', BCO' u. s. w. negativ, so z. B. in der durch die Figur dargestellten vierseitigen Pyramide

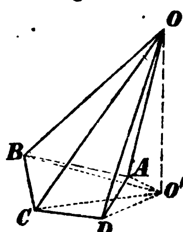
$$ABCD = ABO' + BCO' + CDO' - DAO';$$

dabei ist aber der an der Kante DA liegende Flächenwinkel ein stumpfer und

$$DAO' = DAO\,.\cos(180^0 - v_4) = -S_4 \cos v_4,$$

mithin doch wieder

Fig. 133.



$$S_0 = S_1 \cos v_1 + S_2 \cos v_2 + S_3 \cos v_3 + S_4 \cos v_4.$$

man erkennt hieraus die allgemeine Giltigkeit der Formel 1).

Wir betrachten ferner eine abgestumpfte Pyramide, bei welcher an der Basis S_0 die Seitenflächen S_1, S_2, $S_3\ldots$ liegen mögen; die zur Basis parallele ihr ähnliche Seitenfläche soll s_0 heissen. Ergänzen wir die abgestumpfte Pyramide zu einer vollen und nennen T_1, T_2, $T_3\ldots$ die Seitenflächen der ganzen Pyramide, sowie t_1, t_2, $t_3\ldots$ die Seitenflächen des abgeschnittenen Theiles, so kann der in No. 1) liegende Satz sowohl auf die grössere als auf die kleinere Pyramide angewendet werden; dies giebt

$$S_0 = T_1 \cos v_1 + T_2 \cos v_2 + T_3 \cos v_3 + \ldots$$
$$s_0 = t_1 \cos v_1 + t_2 \cos v_2 + t_3 \cos v_3 + \ldots$$

und durch Subtraction, indem man die Gleichungen $T_1 - t_1 = S_1$, $T_2 - t_2 = S_2$ u. s. w. beachtet

2) $$S_0 - s_0 = S_1 \cos v_1 + S_2 \cos v_2 + S_3 \cos v_3 + \ldots$$

Wenn die abgestumpfte Pyramide in ein Prisma übergeht, wird $s_0 = S_0$, mithin

3) $$0 = S_1 \cos v_1 + S_2 \cos v_2 + S_3 \cos v_3 + \dots$$

Die Gleichung 1) gestattet eine bemerkenswerthe Anwendung auf die dreiseitige Pyramide, bei welcher jede Seitenfläche als Basis angesehen werden kann; um eine symmetrische Bezeichnung zu haben, nennen wir A_0, A_1, A_2, A_3 die vier Ecken des Körpers, S_0, S_1, S_2, S_3 die denselben gegenüberliegenden Seitenflächen, und bezeichnen endlich die Winkel, welche je zwei Begränzungsflächen mit einander bilden, durch Nebeneinanderstellung der gleichnamigen Buchstaben. Hiernach gelten folgende vier Gleichungen

$$S_0 = S_1 \cos(S_0, S_1) + S_2 \cos(S_0, S_2) + S_3 \cos(S_0, S_3)$$
$$S_1 = S_0 \cos(S_1, S_0) + S_2 \cos(S_1, S_2) + S_3 \cos(S_1, S_3)$$
$$S_2 = S_0 \cos(S_2, S_0) + S_1 \cos(S_2, S_1) + S_3 \cos(S_2, S_3)$$
$$S_3 = S_0 \cos(S_3, S_0) + S_1 \cos(S_3, S_1) + S_2 \cos(S_3, S_2),$$

aus denen sich unter Rücksicht auf die Identität von $\angle(S_0, S_1)$ und $\angle(S_1, S_0)$, $\angle(S_0, S_2)$ und $\angle(S_2, S_0)$ u. s. w. verschiedene neue Beziehungen ableiten lassen. Multiplicirt man z. B. die obigen Gleichungen der Reihe nach mit S_0, S_1, S_2, S_3, addirt die drei letzten und subtrahirt die erste, so bleibt

4) $$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - S_0^2$$
$$= 2\{S_1 S_2 \cos(S_1, S_2) + S_2 S_3 \cos(S_2, S_3) + S_3 S_1 \cos(S_3, S_1)\}.$$

III. Schneidet man ein mehrseitiges Prisma durch eine auf den Seitenkanten senkrechte Ebene, so entsteht als Durchschnittsfigur ein Vieleck, dessen Winkel die Neigungswinkel je zweier Seitenebenen sind, und dessen Seiten die Höhen der Seitenflächen darstellen, sobald man letztere als Parallelogramme betrachtet, welche die Seitenkanten des Prisma's zu Grundlinien haben. Die Seitenflächen mögen S_1, S_2, $S_3 \dots$ und ihre Durchschnitte mit der eingelegten Ebene s_1, s_2, $s_3 \dots$ heissen; ferner sei k die Länge der Seitenkanten, P der Inhalt der Prisma's und p die Fläche des aus den Seiten s_1, $s_2 \dots$ und den Winkeln (s_1, s_2), $(s_2, s_3) \dots$ gebildeten Polygons; es ist dann

$$S_1 = ks_1, \quad S_2 = ks_2 \dots \quad \text{und auch} \quad P = kp,$$

oder umgekehrt

5) $$s_1 = \frac{S_1}{k}, \quad s_2 = \frac{S_2}{k} \ldots, \quad p = \frac{P}{k}.$$

Hat man nun irgend eine polygonometrische Formel zwischen einigen oder allen der Grössen $s_1, s_2, s_3 \ldots, p$ und $\angle(s_1, s_2)$, $\angle(s_2, s_3)$ u. s. w., so kann man vermöge der Gleichungen 5) die genannten Grössen aus jener Formel heraus und dafür $S_1, S_2, S_3 \ldots, P$ hereinbringen und auch $\angle(s_1, s_2) = \angle(S_1, S_2)$, $\angle(s_2, s_3) = \angle(S_2, S_3) \ldots$ setzen; die polygonometrische Formel verwandelt sich dann von selbst in eine entsprechende polyedrometrische.

So z. B. liefert bei einem dreiseitigen Prisma die bekannte Gleichung

$$s_1 = s_2 \cos(s_1, s_2) + s_3 \cos(s_1, s_3)$$

die analoge Beziehung

6) $$S_1 = S_2 \cos(S_1, S_2) + S_3 \cos(S_1, S_3);$$

statt der bekannten trigonometrischen Formel

$$s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 = 2 s_1 s_2 \cos(s_1, s_2)$$

erhält man

7) $$S_1^2 + S_2^2 - S_3^2 = 2 S_1 S_2 \cos(S_1, S_2);$$

die Proportionalität der Seiten und Sinus der Gegenwinkel liefert die Formel

8) $$\frac{S_1}{\sin(S_2, S_3)} = \frac{S_2}{\sin(S_1, S_3)} = \frac{S_3}{\sin(S_1, S_2)};$$

endlich kann man aus der zur Berechnung der Dreiecksfläche dienenden Gleichung

$$2p = s_1 s_2 \sin(s_1, s_2) = s_1 s_3 \sin(s_1, s_3) = s_2 s_3 \sin(s_2, s_3)$$

die entsprechende Relation

9) $$2kP = S_1 S_2 \sin(S_1, S_2) = S_1 S_3 \sin(S_1, S_3) = S_2 S_3 \sin(S_2, S_3)$$

abgeleitet werden, die bei der folgenden Untersuchung von Nutzen ist.

§. 57.

Untersuchung des dreiseitigen Prisma's.

Um eine möglichst einfache Bezeichnung zu haben, nennen wir a, b, c die Grundkanten und d die Seitenkante des Prisma's, ferner A, B, C die Seitenflächen, so wie sie der Reihe nach an a, b, c liegen, D die Grundfläche; die

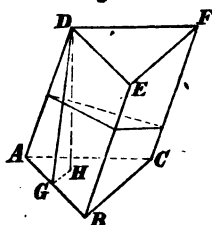
Seiten des normalen Querschnittes mögen a', b', c' heissen, wobei a' die rechtwinklige Projection von a ist, b' die von b, und c' die von c; die Winkel endlich mögen auf folgende Weise

$$\angle(A, D) = \alpha, \quad \angle(B, D) = \beta, \quad \angle(C, D) = \gamma,$$
$$\angle(B, C) = \angle(b', c') = \alpha', \quad \angle(C, A) = \angle(c', a') = \beta',$$
$$\angle(A, B) = \angle(a', b') = \gamma'$$

bezeichnet werden, so dass α, β, γ die Neigungswinkel an der Basis und α', β', γ' die Neigungswinkel der Seitenflächen unter einander bedeuten.

I. Legen wir durch die eine Ecke D des Prisma's eine Normalebene zur Grundkante $AB = c$ und construiren die Höhe $DH = h$ des Körpers, so ist in dem bei G rechtwinkligen Dreiecke AGD, dessen Winkel GAD mit $\angle(c, d)$ bezeichnet werden soll,

Fig. 134.



$$DG = d \sin(c, d)$$

ferner in dem bei H rechtwinkligen Dreiecke DGH

$$h = DG \,.\, \sin\gamma = d \sin(c, d) \sin\gamma.$$

Für den Inhalt des Prisma's, welcher Π heissen möge, folgt hieraus

$$\Pi = (\triangle ABC) \,.\, h = D \,.\, d \sin(c, d) \sin\gamma;$$

die Seitenfläche $ABED = C$ ist aber $= AB \,.\, DG = cd \sin(c, d)$, entnimmt man dieser Gleichung den Werth von $d \sin(c, d)$ und substituirt ihn in die Formel für Π, so ergiebt sich

$$\Pi = \frac{D \,.\, C}{c} \sin\gamma.$$

Zwei ähnliche Gleichungen sind leicht zu bilden, wenn man die Winkel β und α auf analoge Weise construirt; nach Wegschaffung der Brüche hat man die drei Beziehungen

1) $a\Pi = A \,.\, D \sin\alpha, \quad b\Pi = B \,.\, D \sin\beta, \quad c\Pi = C \,.\, D \sin\gamma.$

Durch Multiplication derselben wird

$$abc\Pi^3 = ABCD^3 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma;$$

beachtet man, dass $abc : 4D$ den Halbmesser r des um die Grundfläche D beschriebenen Kreises ausdrückt, so findet sich

2) $$r = \frac{ABCD^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{4\Pi^3},$$

wobei r auch als Halbmesser des um das Prisma beschriebenen schiefen Cylinders angesehen werden kann.

Durch Addition der Gleichungen 1) erhält man

$$(a+b+c)\,\Pi = (A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma)\,D$$

und weil $2D:(a+b+c)$ den Halbmesser ϱ des in die Grundfläche D beschriebenen Kreises bedeutet

$$3)\qquad \varrho = \frac{2\Pi}{A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma},$$

wobei ϱ auch als Halbmesser des schiefen Cylinders gelten kann, welcher die Seitenflächen des Prisma's von Innen berührt. Auf gleiche Weise können die Radien derjenigen schiefen Cylinder bestimmt werden, welche je eine Seitenfläche und die Erweiterungen der beiden anderen, also überhaupt die Ebenen A, B, C von Aussen berühren; man findet nämlich

$$4)\qquad \begin{cases} \varrho_1 = \dfrac{2\Pi}{B\sin\beta + C\sin\gamma - A\sin\alpha}, \\ \varrho_2 = \dfrac{2\Pi}{A\sin\alpha + C\sin\gamma - B\sin\beta}, \\ \varrho_3 = \dfrac{2\Pi}{A\sin\alpha + B\sin\beta - C\sin\gamma}. \end{cases}$$

Hieraus folgt eine neue Gleichung, wenn man sich an die Formel

$$D = \sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3} \quad \text{oder} \quad \varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = D^2$$

erinnert; bezeichnet man nämlich für den Augenblick mit N das Product der vier Factoren

$$A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma, \qquad -A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma,$$
$$A\sin\alpha - B\sin\beta + C\sin\gamma, \qquad A\sin\alpha + B\sin\beta - C\sin\gamma,$$

so wird durch Multiplication der in 3) und 4) verzeichneten Gleichungen

$$5)\qquad D^2 = \frac{16\,\Pi^4}{N} \quad \text{oder} \quad 16\,\Pi^4 = D^2 N.$$

Der Werth von N ist einer bedeutenden Vereinfachung fähig, wenn man beachtet, dass zufolge der Gleichung 3) des vorigen Paragraphen

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$$

sein muss; erhebt man diese Gleichung aufs Quadrat, so ist

$$A^2\cos^2\alpha + B^2\cos^2\beta + C^2\cos^2\gamma$$
$$= -2\,[AB\cos\alpha\cos\beta + AC\cos\alpha\cos\gamma + BC\cos\beta\cos\gamma],$$

durch nochmalige Quadrirung und Zusammenziehung der beiderseits gleichartigen Grössen wird hieraus

$$6)\quad A^4 \cos^4\alpha + B^4 \cos^4\beta + C^4 \cos^4\gamma$$
$$-2(A^2B^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta + A^2C^2 \cos^2\alpha \cos^2\gamma + B^2C^2 \cos^2\beta \cos^2\gamma)$$
$$-8ABC(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0;$$

diese Gleichung ist es, welche zur Reduction von N benutzt werden kann. Vereinigt man nämlich zunächst je zwei der vier Factoren von N, so erscheint N als Product der beiden Ausdrücke

$$(B\sin\beta + C\sin\gamma)^2 - A^2\sin^2\alpha, \quad A^2\sin^2\alpha - (B\sin\beta - C\sin\gamma)^2$$

oder der beiden gleichgeltenden

$$B^2\sin^2\beta + C^2\sin^2\gamma - A^2\sin^2\alpha + 2BC\sin\beta\sin\gamma$$

und

$$-(B^2\sin^2\beta + C^2\sin^2\gamma - A^2\sin^2\alpha - 2BC\sin\beta\sin\gamma);$$

die Multiplication dieser Factoren giebt

$$-N = A^4\sin^4\alpha + B^4\sin^4\beta + C^4\sin^4\gamma$$
$$-2A^2B^2\sin^2\alpha\sin^2\beta - 2A^2C^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma - 2B^2C^2\sin^2\beta\sin^2\gamma.$$

Drückt man alle Sinus durch Cosinus aus und benutzt die Gleichung 6), so bleibt

$$-N = A^4(1-2\cos^2\alpha) + B^4(1-2\cos^2\beta) + C^4(1-2\cos^2\gamma)$$
$$-2A^2B^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta)$$
$$-2A^2C^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\gamma)$$
$$-2B^2C^2(1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma)$$

und durch Einführung der Winkel 2α, 2β, 2γ

$$-N = A^2(B^2+C^2-A^2)\cos 2\alpha$$
$$+B^2(A^2+C^2-B^2)\cos 2\beta$$
$$+C^2(A^2+B^2-C^2)\cos 2\gamma,$$

oder endlich, wenn man die Formel 7) des vorigen Paragraphen beachtet,

$$-N = A^2 . 2BC\cos\alpha' . \cos 2\alpha + B^2 . 2AC\cos\beta' . \cos 2\beta$$
$$+ C^2 . 2AB\cos\gamma' . \cos 2\gamma;$$

aus der Gleichung 5) fliesst hiernach die folgende

$$7)\quad 8\Pi^4 = -ABCD^2(A\cos 2\alpha\cos\alpha' + B\cos 2\beta\cos\beta'$$
$$+ C\cos 2\gamma\cos\gamma'),$$

welche den Inhalt des Prisma's durch die Flächen und Flächenwinkel des Körpers berechnen lehrt.

II. Nicht minder bemerkenswerthe Resultate ergeben sich, wenn man den Inhalt des dreiseitigen Prisma's durch drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten und die

von letzteren gebildeten Winkel ausdrückt. Zunächst ist $\Pi = Dh$ oder, wenn die Dreiecksfläche D aus zwei Seiten b, c und dem Winkel (b, c) der Basis bestimmt wird,

$$\Pi = \tfrac{1}{2} bc \sin(b, c) \,.\, h$$

und vermöge der im Anfange dieses Paragraphen angegebenen Formel für h

8) $$\Pi = \tfrac{1}{2} bcd \sin(b, c) \sin(c, d) \sin\gamma.$$

Nun sind b, c, d die in einer Ecke der Basis zusammenstossenden Kanten, $\angle(b, c)$ und $\angle(c, d)$ zwei Seitenwinkel und γ der von ihnen eingeschlossene Flächenwinkel; bringt man noch den dritten Seitenwinkel (d, b) in Rechnung, so ist nach §. 46, Formel 4)

$$\sin\gamma = \frac{2\lambda_a}{\sin(b, c) \sin(c, d)},$$

wo λ_a die Quadratwurzel aus dem Producte der Factoren

$$\sin\frac{(b, c) + (c, d) + (d, b)}{2}, \quad \sin\frac{-(b, c) + (c, d) + (d, b)}{2}$$

$$\sin\frac{(b, c) - (c, d) + (d, b)}{2}, \quad \sin\frac{(b, c) + (c, d) - (d, b)}{2}$$

abkürzend bezeichnet; aus der Formel für Π wird jetzt

9) $$\Pi = bcd \,.\, \lambda_a.$$

Um den hierin liegenden Satz in Worte übertragen zu können, wollen wir λ_a die Amplitude der Ecke A nennen, in welcher die Kanten b, c, d zusammentreffen; das Theorem lautet dann: Der Inhalt eines dreiseitigen Prisma's ist immer das Product aus drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten und der Amplitude dieser Ecke.

Aus der Gleichung

$$\Pi = bcd\lambda_a = cad\lambda_b = abd\lambda_c$$

folgt noch

$$\frac{\Pi}{abcd} = \frac{\lambda_a}{a} = \frac{\lambda_b}{b} = \frac{\lambda_c}{c},$$

d. h.: Die Grundkanten eines dreiseitigen Prisma's verhalten sich wie die Amplituden der Gegenecken.

Eine zweite Transformation der Gleichung 8) entsteht dadurch, dass man den Winkel γ stehen lässt und dagegen die Winkel (b, c) und (c, d) herausschafft. Die drei an der

Ecke A vorhandenen Neigungswinkel sind α', β, γ, mithin nach §. 47, Formel 4) die Seitenwinkel

$$\sin(b, c) = \frac{2}{\sin\beta \sin\gamma} A_a, \quad \sin(c, d) = \frac{2}{\sin\gamma \sin\alpha'} A_a,$$

wo A_a die Quadratwurzel aus dem Producte der vier Factoren

$$-\cos\frac{\alpha'+\beta+\gamma}{2}, \quad \cos\frac{-\alpha'+\beta+\gamma}{2}, \quad \cos\frac{\alpha'-\beta+\gamma}{2}, \quad \cos\frac{\alpha'+\beta-\gamma}{2}$$

bedeutet; aus der Formel 8) wird jetzt die folgende

10) $$\Pi = \frac{2\,bcd\,(A_a)^2}{\sin\alpha' \sin\beta \sin\gamma},$$

wonach der Inhalt des Prisma's aus drei in einer Ecke zusammentreffenden Kanten und den an dieser Ecke vorhandenen Flächenwinkeln berechnet werden kann.

Um noch die in einer Ecke zusammenstossenden Seitenflächen B, C, D statt der Kanten b, c, d in die soeben gewonnene Formel einzuführen, berücksichtigen wir die unmittelbar sich ergebenden Gleichungen

$$B = bd \sin(b, d) = bd\,\frac{2A_a}{\sin\alpha' \sin\beta},$$

$$C = cd \sin(c, d) = cd\,\frac{2A_a}{\sin\alpha' \sin\gamma},$$

$$D = \tfrac{1}{2} bc \sin(b, c) = \tfrac{1}{2} bc\,\frac{2A_a}{\sin\beta \sin\gamma};$$

multiplicirt man sie mit einander und setzt beiderseits noch den Factor A_a hinzu, so wird

$$BCD \,.\, A_a = \frac{4\,b^2c^2d^2(A_a)^4}{\sin^2\alpha' \sin^2\beta \sin^2\gamma} = \Pi^2,$$

mithin umgekehrt

11) $$\Pi = \sqrt{BCDA_a}.$$

Nennen wir A_a die Coamplitude der Ecke A, so liegt hierin das Theorem: Der Inhalt eines dreiseitigen Prisma's ist die Quadratwurzel aus dem Producte von drei in einer Ecke zusammenstossenden Seitenflächen und der Coamplitude dieser Ecke.

Man erhält hieraus noch

$$\frac{\Pi^2}{ABCD} = \frac{A_a}{A} = \frac{A_b}{B} = \frac{A_c}{C},$$

d. h.: **Die Seitenflächen eines dreiseitigen Prisma's verhalten sich wie die Coamplituden ihrer Gegenecken.**

§. 58.

Untersuchung der dreiseitigen Pyramide.

I. Da jede dreiseitige Pyramide als der dritte Theil eines Prisma's betrachtet werden kann, so lassen sich die Resultate des vorigen Paragraphen, gehörig modificirt, auch auf die dreiseitige Pyramide übertragen. Dabei gelte, wenn ABC die Grundfläche und D die Spitze des Körpers heisst, folgende Bezeichnung der Kanten

$$BC = a,\quad CA = b,\quad AB = c,\quad AD = a_1,\quad BD = b_1,\quad CD = c_1,$$

so dass a und a_1, b und b_1, c und c_1 Gegenkanten sind; die vier Seitenflächen BCD, CAD, ABD, welche der Reihe nach den Ecken A, B, C gegenüber liegen, mögen mit A, B, C und die Basis ABC mit D bezeichnet werden, endlich sei

$$\angle(A, D) = \alpha,\quad \angle(B, D) = \beta,\quad \angle(C, D) = \gamma,$$
$$\angle(B, C) = \alpha_1,\quad \angle(C, A) = \beta_1,\quad \angle(A, B) = \gamma_1,$$

so dass α, β, γ die an den Grundkanten vorhandenen Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Basis und α_1, β_1, γ_1 die an den Gegenkanten a_1, b_1, c_1 liegenden Neigungswinkel der Seitenflächen unter einander bedeuten. Denkt man sich die Pyramide $DABC$ zu einem dreiseitigen Prisma ergänzt (wie z. B. die Pyramide $FABC$ auf S. 68), so ist die Basis des letzteren D, seine Seitenflächen sind $2A$, $2B$, $2C$, und wenn Π das Pyramidenvolumen bezeichnet, so ist 3Π der Inhalt des Prisma's; die Anwendung der in No. II. entwickelten Sätze des vorigen Paragraphen giebt nun, wenn man der Reihe nach die in den Ecken A, B, C, D zusammenstossenden Kanten betrachtet und die zugehörigen Amplituden λ_a, λ_b, λ_c, λ_d nennt

$$1)\qquad 3\Pi = a_1 b c \lambda_a = a b_1 c \lambda_b = a b c_1 \lambda_c = a_1 b_1 c_1 \lambda_d,$$

d. h.: **Der Pyramideninhalt ist der dritte Theil von dem Producte dreier in einer Ecke zusammenstossender Kanten und der Amplitude dieser Ecke.** Demzufolge kann die Amplitude einer Ecke als

der dreifache Inhalt einer Pyramide gelten, welche dadurch entsteht, dass man auf den Kanten der Ecke die Längeneinheit abschneidet; wir machen diese Bemerkung hauptsächlich wegen der Formel 12) in §. 55, welche dadurch einen eleganten geometrischen Sinn erhält.

Aus der Gleichung 1) folgt durch Division mit abc

$$\frac{3\Pi}{abc} = \frac{a_1}{a}\lambda_a = \frac{b_1}{b}\lambda_b = \frac{c_1}{c}\lambda_c$$

oder

$$\frac{a}{a_1} : \frac{b}{b_1} : \frac{c}{c_1} = \lambda_a : \lambda_b : \lambda_c,$$

d. h.: Die Quotienten aus jeder Grundkante durch die Gegenkante verhalten sich wie die Amplituden der Ecken an der Basis.

Mittelst des zweiten an die Formel 11) des vorigen Paragraphen geknüpften Satzes ergiebt sich ferner $3\Pi = \sqrt{2B \, . \, 2C \, . \, DA_a}$ oder

2) $3\Pi = 2\sqrt{BCDA_a} = 2\sqrt{ACDA_b} = 2\sqrt{ABDA_c} = 2\sqrt{ABCA_d}$,

d. h.: Der Pyramideninhalt beträgt zwei Drittheile der Quadratwurzel aus dem Producte dreier in einer Ecke zusammenstossender Seitenflächen und der Coamplitude dieser Ecke.

Eine weitere Folge hiervon ist die Beziehung

$$\frac{9\Pi^2}{4ABCD} = \frac{A_a}{A} = \frac{A_b}{B} = \frac{A_c}{C} = \frac{A_d}{D},$$

d. h.: Die Seitenflächen verhalten sich wie die Coamplituden der Gegenecken.

Nicht ohne Interesse ist es, den Inhalt der Pyramide durch die sechs Kanten allein auszudrücken, was desswegen möglich sein muss, weil die Pyramide durch die sechs Kanten unzweideutig bestimmt wird. Wir transformiren zu diesem Zwecke die Gleichung

$$3\Pi = a_1 b_1 c_1 \lambda_d \quad \text{oder} \quad 9\Pi^2 = a_1^2 b_1^2 c_1^2 (\lambda_d)^2.$$

Der Werth von $(\lambda_d)^2$ ist hier, wenn die an der Ecke D vorhandenen Kantenwinkel (b_1, c_1), (c_1, a_1), (a_1, b_1) mit a', b', c' bezeichnet werden

$$(\lambda_d)^2 = \sin\tfrac{1}{2}(a'+b'+c') \sin\tfrac{1}{2}(-a'+b'+c')$$
$$. \sin\tfrac{1}{2}(a'-b'+c') \sin\tfrac{1}{2}(a'+b'-c')$$

oder nach der in §. 46, Formel 5) erwähnten Transformation

$$4(\lambda_d)^2 = 1 - \cos^2 a' - \cos^2 b' - \cos^2 c' + 2\cos a' \cos b' \cos c'.$$

Man hat aber aus den Dreiecken BCD, CAD, ABD

$$\cos a' = \frac{b_1^2 + c_1^2 - a^2}{2 b_1 c_1}, \quad \cos b' = \frac{c_1^2 + a_1^2 - b^2}{2 c_1 a_1},$$

$$\cos c' = \frac{a_1^2 + b_1^2 - c^2}{2 a_1 b_1};$$

setzt man diese Werthe ein, bringt Alles auf gleiche Benennung, entwickelt die Quadrate und hebt so viel als möglich, so ergiebt sich

$$3) \quad \begin{cases} 144\,\Pi^2 = a^2 a_1^2 (b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2) \\ \qquad\quad + b^2 b_1^2 (c^2 + c_1^2 + a^2 + a_1^2 - b^2 - b_1^2) \\ \qquad\quad + c^2 c_1^2 (a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2) \\ \qquad\quad - a^2 b^2 c^2 - a^2 b_1^2 c_1^2 - a_1^2 b^2 c_1^2 - a_1^2 b_1^2 c^2. \end{cases}$$

II. Schliesslich geben wir noch die Bestimmung der Halbmesser von den der Pyramide umschriebenen und eingeschriebenen Kugelflächen.

Fig. 135.

Gehen wir auf die früher erwähnte Construction des Halbmessers der umschriebenen Kugel zurück, so ist, wenn man sich OS und $OB = r$ gezogen denkt,

$$4) \quad r^2 = \overline{OS}^2 + \overline{BS}^2 = \overline{OS}^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2.$$

Die Linie OS findet sich aus dem Vierecke $MSNO$, in welchem fünf Stücke bekannt sind. Da nämlich M der Mittelpunkt des um ABC beschriebenen Kreises ist, so hat man $\angle BMS = \angle BAC = \angle(b, c)$ und in dem rechtwinkligen Dreiecke BSM

$$SM = BS \,.\, \cot BMS = \tfrac{1}{2} a \cot(b, c),$$

auf gleiche Weise findet sich

$$SN = BS \,.\, \cot BNS = \tfrac{1}{2} a \cot(b_1, c_1);$$

ferner kennt man in dem Vierecke $MSNO$ den Winkel $MSN = \alpha$ und die beiden rechten Winkel bei M und N. Die Diagonale OS bestimmt sich nun aus der einfachen Bemerkung, dass das Viereck $MSNO$ ein Sehnenviereck, mithin OS der Durchmesser des umschriebenen Kreises sein muss; berechnet man ihn als Durchmesser des um das

Dreieck MSN beschriebenen Kreises, so ist nach Thl. I. §. 27 Formel 1)

$$OS = 2.\frac{SM.SN.MN}{4.\triangle MSN} = \frac{SM.SN.\sqrt{(\overline{SM}^2 + \overline{SN}^2 - 2SM.SN.\cos\alpha)}}{SM.SN.\sin\alpha}$$

und daraus folgt nach Hebung und Substitution der Werthe von SM und SN

$$\overline{OS}^2 = a^2\frac{\cot^2(b,c) + \cot^2(b_1,c_1) - 2\cot(b,c)\cot(b_1,c_1)\cos\alpha}{4\sin^2\alpha}$$

mithin nach No. 4)

$$5)\quad r^2 = a^2\frac{\cot^2(b,c) + \cot^2(b_1,c_1) - 2\cot(b,c)\cot(b_1,c_1)\cos\alpha + \sin^2\alpha}{4\sin^2\alpha}.$$

Will man statt der Winkel (b,c), (b_1,c_1) und α die an einer Ecke, etwa an C, liegenden Kantenwinkel einführen, so ist

$$\cot(b,c) = \frac{b - a\cos(a,b)}{a\sin(a,b)},\quad \cot(b_1,c_1) = \frac{c_1 - a\cos(a,c_1)}{a\sin(a,c_1)}$$

zu setzen und α durch (a,b), (a,c_1), (b,c_1) auszudrücken; dies geschieht am besten auf die Weise, dass man die genannten Winkel kurz mit c'', b'', a'', die Amplitude der Ecke C mit λ_c bezeichnet,

$$\cot(b,c) = \frac{b - a\cos c''}{a\sin c''},\quad \cot(b_1,c_1) = \frac{c_1 - a\cos b''}{a\sin b''},$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos a'' - \cos b''\cos c''}{\sin b''\sin c''},\quad \sin\alpha = \frac{2\lambda_c}{\sin b''\sin c''},$$

substituirt und für das im Zähler vorkommende $4\lambda^2$ den gleichgeltenden Ausdruck

$$1 - \cos^2 a'' - \cos^2 b'' - \cos^2 c'' + 2\cos a''\cos b''\cos c''$$

eintreten lässt. Die Ausführung dieser Rechnung giebt bei einigen sich von selbst darbietenden Reductionen

$$\begin{aligned}16(\lambda_c)^2 r^2 = {} & a^2\sin^2 a'' + b^2\sin^2 b'' + c_1^2\sin^2 c'' \\ & - 2ab(\cos c'' - \cos a''\cos b'') - 2ac_1(\cos b'' - \cos a''\cos c'') \\ & - 2bc_1(\cos c'' - \cos a''\cos b'').\end{aligned}$$

Diese Formel giebt den Halbmesser der umschriebenen Kugel, ausgedrückt durch drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten und die von denselben gebildeten Winkel. Symmetrischer erscheint sie, wenn man statt der Ecke C die Ecke D nimmt; man hat dann, unter Rücksicht auf die schon in I. gebrauchte Bezeichnung,

$$6)\quad \begin{cases} 16(\lambda_d)^2 r^2 = a_1^2 \sin^2 a' + b_1^2 \sin^2 b' + c_1^2 \sin^2 c' \\ \qquad - 2a_1 b_1 (\cos c' - \cos a' \cos b') \\ \qquad - 2b_1 c_1 (\cos a' - \cos b' \cos c') \\ \qquad - 2c_1 a_1 (\cos b' - \cos c' \cos a'). \end{cases}$$

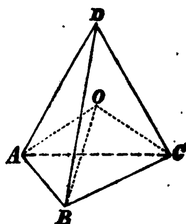
Durch Substitution der vorhin angegebenen Werthe von $\cos a'$, $\cos b'$, $\cos c'$, aus denen nachher die Werthe von $\sin^2 a'$, $\sin^2 b'$, $\sin^2 c'$ folgen, und vermöge der Relation $\Pi = \frac{1}{6} a_1 b_1 c_1 \lambda_d$ ergiebt sich noch

$$7)\quad r^2 = \frac{(aa_1+bb_1+cc_1)(-aa_1+bb_1+cc_1)(aa_1-bb_1+cc_1)(aa_1+bb_1-cc_1)}{576\,\Pi^2},$$

in welcher Formel nur die Kanten vorkommen, wenn man Π nach Formel 3) bestimmt. Beachtet man, dass der Zähler von r der vierfache Inhalt eines aus den Seiten aa_1, bb_1, cc_1 construirten Dreiecks sein würde, so liegt in der Formel 7) der eigenthümliche Satz: Das Product aus dem sechsfachen Inhalte der Pyramide in den Halbmesser der umschriebenen Kugel ist dem Inhalte eines Dreiecks gleich, dessen Seiten die Zahlenwerthe der Producte aus den Gegenkanten der Pyramide sind.

Weit weniger Mühe verursacht die Bestimmung der Halbmesser von den Kugelflächen, welche die Begränzungsebenen der Pyramide berühren. Denken wir uns den Mittelpunkt O der eingeschriebenen Kugel mit den vier Ecken der Pyramide durch Gerade verbunden, so zerfällt die Pyramide $DABC$ in vier kleinere Pyramiden $OBCD$, $OCAD$, $OABD$, $OABC$, deren Grundflächen nach der eingeführten Bezeichnung A, B, C, D heissen, und deren gemeinsame Höhe der Halbmesser ϱ der eingeschriebenen Kugel ist; demzufolge hat man die Gleichung

Fig. 136.



$$\Pi = \tfrac{1}{3} A\varrho + \tfrac{1}{3} B\varrho + \tfrac{1}{3} C\varrho + \tfrac{1}{3} D\varrho$$

und daraus

$$8)\quad \varrho = \frac{3\,\Pi}{A+B+C+D}.$$

Bezeichnen wir ferner mit ϱ_1 den Halbmesser der Kugelfläche, welche die Ebene A und die Erweiterungen der Ebenen B, C, D berührt, so ist für ϱ_1, sowie für die

Halbmesser ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 der übrigen von Aussen berührenden Kugeln

$$9)\qquad \begin{cases} \varrho_1 = \dfrac{3\,\Pi}{B+C+D-A} \\ \varrho_2 = \dfrac{3\,\Pi}{C+D+A-B} \\ \varrho_3 = \dfrac{3\,\Pi}{D+A+B-C} \\ \varrho_4 = \dfrac{3\,\Pi}{A+B+C-D}. \end{cases}$$

Man kann hier A, B, C, D, Π durch andere Stücke der Pyramide, z. B. durch a_1, b_1, c_1, $\angle a'$, $\angle b'$, $\angle c'$ oder durch a, b, c, a_1, b_1, c_1 ausdrücken, was weiter keine Schwierigkeiten verursacht. Bemerkenswerth ist noch die folgende Relation zwischen den fünf Halbmessern

$$10)\qquad \frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}+\frac{1}{\varrho_4}=2\,\frac{1}{\varrho},$$

welche einer für das ebene Dreieck geltenden Beziehung entspricht.

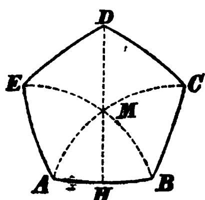
§. 59.

Berechnung der regulären Körper.

Wenn in einer Ecke eines regelmässigen Körpers m Flächen zusammentreffen, von denen jede n Seiten besitzt, so kann zunächst die Grösse eines der vorhandenen m Kantenwinkel und darauf der Neigungswinkel jeder Seitenfläche gegen die nächste bestimmt werden. Der gesuchte Kantenwinkel, welcher μ heissen möge, ist der Peripheriewinkel des regelmässigen n-Ecks, folglich

$$1)\qquad \mu = \frac{2\,(n-4)\,90^0}{n} = 180^0 - \frac{360^0}{n}.$$

Fig. 137.



Um ferner den Neigungswinkel, der ν heissen soll, zu finden, beschreiben wir aus dem Scheitel der m-seitigen Ecke mit dem Halbmesser 1 eine Kugelfläche, welche von den Seitenflächen in einem regelmässigen sphärischen Polygone von m Seiten geschnitten wird. Dieses sphä-

rische Vieleck sei $ABCD\dots$ und M der Pol des ihm umschriebenen Kugelkreises; die sphärischen Dreiecke AMB, $BMC\dots$ sind gleichschenklig und congruent, mithin $\angle BAM = \angle ABM = \frac{1}{2}v$ und $\angle AMB = \frac{360^\circ}{m}$. Halbirt man den letzteren Winkel durch den Bogen MH, so steht letzterer senkrecht auf AB und es ist daher in dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke AHM

$$sin\, BAM = \frac{cos\, AMH}{cos\, AH},$$

oder nach dem vorhin Gesagten

$$2) \qquad sin\, \tfrac{1}{2}v = \frac{cos \frac{180^\circ}{m}}{cos\, \frac{1}{2}\mu} = \frac{cos \frac{180^\circ}{m}}{sin \frac{180^\circ}{n}}.$$

Bei dem Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder hat man der Reihe nach

$$m = 3,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 3,\ \ 5,$$
$$n = 3,\ \ 4,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 3,$$

mithin in derselben Ordnung

$$sin\, \tfrac{1}{2}v = \sqrt{\tfrac{1}{3}},\ \ \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \ \sqrt{\tfrac{2}{3}},\ \ \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}},\ \ \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \tfrac{2}{3}\sqrt{5}};$$

hieraus kann man leicht $cos\, \frac{1}{2}v$, $sin\, v$, $cos\, v$, $tan\, v$ ableiten, wobei man die folgenden, durch ihre Rationalität ausgezeichneten Werthe findet:

für das Tetraeder $cos\, v = \frac{1}{3}$, $v = 70^\circ\, 31'\, 44''$,
„ „ Hexaeder $sin\, v = 1$, $v = 90^\circ\, 0'\, 0''$,
„ „ Oktaeder $cos\, v = -\frac{1}{3}$, $v = 109^\circ\, 28'\, 16''$,
„ „ Dodekaeder $tan\, v = -2$, $v = 116^\circ\, 33'\, 54''$,
„ „ Ikosaeder $sin\, v = \frac{2}{3}$, $v = 138^\circ\, 11'\, 23''$.

Mit Beziehung auf §. 24, II. möge O den Mittelpunkt der dem Polyeder um- und eingeschriebenen Kugeln bedeuten; der Halbmesser der ersteren sei $AO = BO = CO = DO\dots = r$, der Radius der zweiten $MO = NO\dots = \varrho$, ferner $AM = BM\dots = r'$ der Halbmesser des Kreises, welcher um eine Seitenfläche beschrieben wer-

Fig. 138.

den kann, und $MS = MT \ldots = \varrho'$ der Radius des der Seitenfläche eingeschriebenen Kreises. Aus dem Dreiecke AMS, worin $AS = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$, $\angle SAM = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\mu$ und $\angle ASM = 90^{\circ}$ ist, findet man augenblicklich

$$r' = \tfrac{1}{2}a \sec\tfrac{1}{2}\mu, \quad \varrho' = \tfrac{1}{2}a \tan\tfrac{1}{2}\mu;$$

das rechtwinklige Dreieck OMS, welches den Winkel $SMO = \frac{1}{2}\nu$ enthält, liefert weiter

$$\varrho = \varrho' \tan\tfrac{1}{2}\nu = \tfrac{1}{2}a \tan\tfrac{1}{2}\mu \tan\tfrac{1}{2}\nu,$$

und

$$OS = \varrho' \sec\tfrac{1}{2}\nu = \tfrac{1}{2}a \tan\tfrac{1}{2}\mu \sec\tfrac{1}{2}\nu,$$

endlich giebt das rechtwinklige Dreieck BSO

$$r = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a)^2 + (OS)^2} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{1 + \tan^2\tfrac{1}{2}\mu \sec^2\tfrac{1}{2}\nu}.$$

Einfacher wird dieser Ausdruck, wenn man gemäss der Formel 2)

$$\cos\tfrac{1}{2}\mu = \frac{\cos\dfrac{180^{\circ}}{m}}{\sin\tfrac{1}{2}\nu}$$

setzt, daraus $\tan\frac{1}{2}\mu$ ableitet und dies in die Gleichung für r substituirt; man findet ohne Mühe

3) $$r = \tfrac{1}{2}a \tan\frac{180^{\circ}}{m} \tan\tfrac{1}{2}\nu.$$

Die Formel für ϱ nimmt eine ähnliche Gestalt an, wenn für $\frac{1}{2}\mu$ sein Werth gesetzt wird, es ist nämlich

4) $$\varrho = \tfrac{1}{2}a \cot\frac{180^{\circ}}{n} \tan\tfrac{1}{2}\nu.$$

Bezeichnen wir mit s die Anzahl der Begränzungsflächen des Polyeders, mit S den Flächeninhalt einer derselben, mit T die gesammte Oberfläche und mit V das Volumen des Körpers, so haben wir zunächst durch Beachtung des Umstandes, dass S die Fläche eines regulären n-Ecks ausmacht, $S = n\frac{1}{2}a^2 \tan\frac{1}{2}\mu$ oder

5) $$S = \tfrac{1}{4}a^2 n \cot\frac{180^{\circ}}{n} \quad \text{und} \quad T = \tfrac{1}{4}a^2 ns \cot\frac{180^{\circ}}{n};$$

ferner ist der Inhalt von einer der s Pyramiden, aus denen der Körper besteht, $= \frac{1}{3}S\varrho$, also $V = \frac{1}{3}sS\varrho$, oder vermöge der Werthe von S und ϱ

6) $$V = \tfrac{1}{24}a^3 ns \cot^2\frac{180^{\circ}}{n} \tan\tfrac{1}{2}\nu.$$

Die hier entwickelten Formeln dienen zur Beantwortung

aller Fragen, welche sich auf die Grössenverhältnisse der wichtigsten Bestandtheile regulärer Körper beziehen; die daraus resultirenden Zahlenwerthe sind folgende.

Für das Tetraeder:

$$r = \frac{\sqrt{6}}{4}a, \quad \varrho = \frac{\sqrt{6}}{12}a, \quad T = \sqrt{3}a^2, \quad V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3;$$

für das Hexaeder:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad \varrho = \tfrac{1}{2}a, \quad T = 6a^2, \quad V = a^3;$$

für das Oktaeder:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \quad \varrho = \frac{\sqrt{6}}{6}a, \quad T = 2\sqrt{3}a^2, \quad V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3;$$

für das Dodekaeder:

$$r = \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{4}a, \quad \varrho = \frac{\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}a,$$

$$T = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2, \quad V = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3;$$

für das Ikosaeder:

$$r = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a, \quad \varrho = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a,$$

$$T = 5\sqrt{3}\,a^2, \quad V = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3.$$

Wir haben hier Alles durch die Kante a ausgedrückt; wäre nicht diese, sondern eine andere Grösse, z. B. r, gegeben, so würde man zunächst a durch r ausdrücken und den gefundenen Werth in die übrigen Formeln substituiren, was in allen Fällen sehr leicht ist.

FÜNFTES BUCH.

Descriptive Geometrie.

Einleitung.

Wenn es darauf ankommt, ebene Figuren durch eine Zeichnung zu veranschaulichen, so nimmt man die Ebene der Figuren selbst zur Ebene der Zeichnung und es bedarf dann nur des Ziehens von geraden Linien und der Construction von Kreisen oder Kreisbögen, um alle in der Planimetrie vorkommenden Figuren darzustellen. Wesentlich anders wird die Sache bei stereometrischen Gebilden; im Raume selbst zu construiren, d. h. Modelle zusammen zu fügen, ist, wenn auch sehr anschaulich, doch so mühsam, dass sich mit Nothwendigkeit die Frage aufdrängt, ob es nicht möglich sein würde, Raumgebilde durch Zeichnung in einer Ebene zu versinnlichen. Obschon die Frage ursprünglich von der Praxis, namentlich von der Baukunst und Maschinenlehre, abstammt, so wird sie doch zu einer theoretischen und streng wissenschaftlichen, sobald man ihre Beantwortung nicht der Willkühr des einzelnen Zeichners überlassen, sondern allgemein giltige Gesetze aufstellen will. Den Inbegriff dieser geometrisch begründeten (nicht beliebig ersonnenen) Zeichnungsmethoden nennt man die descriptive oder darstellende Geometrie; sie zerfällt, wie sich nach dem Gesagten erwarten lässt, in zwei Haupttheile: einen theoretischen und einen praktischen; der

erste giebt die wissenschaftliche Begründung der Methoden nebst den Auflösungen der Fundamentalprobleme, der zweite enthält die mannigfaltigen Anwendungen zur bildlichen Darstellung von Gegenständen des practischen Lebens (Bauwerken, Maschinen etc.). Im folgenden beschränken wir uns auf den theoretischen Theil.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass man den sinnlichen Eindruck einer Raumgestalt am genausten wiedergiebt, wenn man den physicalischen Process des Sehens nachzuahmen versteht; mittelst des Gesetzes der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes ist dies aber geometrisch möglich. Denken wir uns nämlich von allen Punkten eines Körpers gerade Linien (Lichtstrahlen) nach einem ausserhalb des Körpers liegenden Punkte (dem Auge) gezogen und den erzeugten Strahlenbüschel von einer zwischen Punkt und Körper aufgestellten Ebene durchschnitten, so entsteht auf letzterer ein genaues Bild des Körpers, die sogenannte perspectivische Abbildung oder Centralprojection desselben; umgekehrt empfängt ein in dem festen Punkte, dem sogenannten Projectionscentrum, befindliches Auge die von dem Bilde ausgehenden Lichtstrahlen ganz in derselben Weise, als wenn sie von dem Körper herkämen, und es muss folglich der optische Eindruck, mithin auch die Anschaulichkeit, in beiden Fällen dieselbe sein. Obschon nun die perspectivische Abbildung die naturgetreuste und daher die einzige für die Malerei brauchbare ist, so leidet sie doch an dem wesentlichen Uebelstande, dass sie die meisten Theile des Körpers nicht in ihrer wahren Grösse, sondern verkürzt erscheinen lässt, und dass es eben desswegen, wenn auch nicht unmöglich, doch umständlich ist, die wahren Dimensionen des Objectes aus der Zeichnung herauszufinden. Diese Unbequemlichkeit, welche besonders dann sehr fühlbar wird, wenn eine Zeichnung als Norm für eine auszuführende Arbeit dienen soll, bedingt eine Modification des obigen Verfahrens; sie besteht darin, dass man die von allen Punkten des Körpers ausgehenden Geraden (die Lichtstrahlen oder projicirenden Linien) nicht in einem Punkte convergiren, sondern einander parallel gehen lässt, also das Projections-

centrum in unendliche Entfernung setzt. Durchschneidet man diesen Parallelstrahlenbüschel wiederum mittelst einer Ebene, so entsteht auf letzterer die sogenannte Parallelprojection des Körpers; in dem besonderen Falle, wo die Richtung der projicirenden Linien senkrecht zur Ebene der Projection ist, erhält man die sogenannte rechtwinklige Projection (Orthogonalprojection), die oft auch schlechtweg Projection heisst, weil sie am häufigsten vorkommt.

Nach diesen Erklärungen versteht es sich von selbst, dass die theoretische descriptive Geometrie in zwei Haupttheile zerfällt, von denen der eine die Parallelprojection, der andere die perspectivische Projection betrachtet; da die erste Projectionsweise die offenbar einfachere ist, so stellen wir ihre Theorie voran.

Cap. X.

Die Parallelprojection.

---

§. 60.

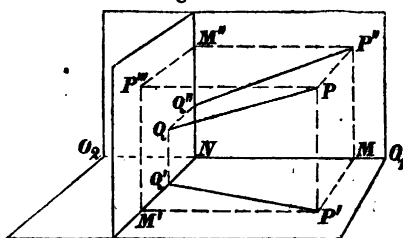
Die Projection eines Punktes.

Zufolge des in der Einleitung Gesagten ist die rechtwinklige Projection eines Punktes auf eine Ebene nichts Anderes als der Fusspunkt des von dem Punkte auf die Ebene herabgelassenen Perpendikels; letzteres heisst der Projectionsstrahl des Punktes oder auch die projicirende Gerade. Da sich von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Ebene nur eine Senkrechte fällen lässt, so ist durch Punkt und Ebene auch die Projection des Punktes vollständig bestimmt. Diesen Satz darf man aber nicht umkehren; wenn nämlich in einer Ebene ein Punkt P' gegeben ist, welcher die Projection eines im Raume liegenden Punktes P sein soll, so kann der letztere willkührlich auf der durch P' gehenden Normale der Ebene gewählt

werden; P' stellt daher die gemeinschaftliche Projection einer unendlichen Menge von Punkten dar, welche sämmtlich auf der genannten Normale liegen. Die Bestimmung eines Punktes P im Raume durch seine Projection erfordert daher entweder die Kenntniss von P' und der Länge $P'P$, oder, was gewöhnlicher ist, die Kenntniss von zwei seiner Projectionen auf zwei verschiedene Ebenen. Dies geschieht auf folgende Weise.

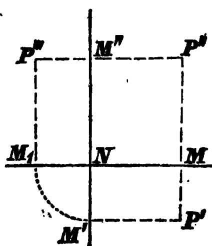
Man denkt sich zwei zu einander senkrechte Ebenen, die horizontale und die verticale Projectionsebene, deren Durchschnitt die Grundlinie heissen mag, und projicirt den Punkt P im Raume auf beide Ebenen; seine Projection auf die erste Ebene wird die Horizontalprojection von P genannt und mit P' bezeichnet, die Projection auf die zweite Ebene heisst seine Verticalprojection P''. Diese beiden Projectionen bestimmen die Lage des Punktes P im Raume; durch P' und P'' kann nämlich eine zur Grundlinie O_1O_2 senkrechte Ebene gelegt werden, und wenn M ihren Durchschnitt mit O_1O_2 bezeichnet, so erscheint P als Ecke eines Rechtecks $P'MP''P$, dessen Seiten die bekannten Entfernungen $P'M$ und $P''M$ sind.

Fig. 139.



Um nun dieser räumlichen Figur eine Construction in der Ebene substituiren zu können, denken wir uns beide Projectionsebenen so weit um die Grundlinie gedreht, bis sie in eine Ebene zusammenfallen, und nehmen letztere zur Ebene der Zeichnung. Zieht man, wie es allgemein üblich ist, die Grundlinie horizontal, so repräsentirt der unterhalb der Grundlinie liegende Theil der Zeichnungsebene die horizontale, der oberhalb befindliche die verticale Projectionsebene. Die Gerade $P'P''$, d. h. die Verbindungslinie der Projec-

Fig. 140.



tionen, steht jederzeit senkrecht zur Grundlinie, also vertical und schneidet dieselbe in einem Punkte M der Art, dass MP' die Entfernung des Punktes von der Verticalebene, und MP'' seine Entfernung von der Horizontalebene angiebt.

Die Vollständigkeit erfordert übrigens, dass man sich die beiden Projectionsebenen in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung (nicht halbbegränzt durch die Grundlinie) vorstelle; man hat daher an der Horizontalebene eine vordere und hintere Seite, ebenso an der Verticalebene eine obere und untere Hälfte zu unterscheiden; zufolge der um die Grundlinie vorgenommenen Drehung fällt dann die Vorderseite der Horizontalebene mit der unteren Hälfte der Verticalebene, und in gleicher Weise der obere Theil der Verticalebene mit der Hinterseite der Horizontalebene zusammen. Demgemäss muss man sich die Ebene der Zeichnung als eine aus der Aufeinanderlagerung zweier Ebenen entstandene Doppelebene vorstellen, doch ist hierbei eine Verwechselung nicht zu fürchten, weil die vorhin angegebene Bezeichnungsweise der Punkte bei consequenter Durchführung immer sicher entscheidet, zu welcher der beiden aufeinander liegenden Ebenen jeder Punkt gehört. Findet man z. B. einen über der Grundlinie liegenden Punkt mit nur einem Accent versehen, so erkennt man augenblicklich, dass derselbe nicht als Verticalprojection, sondern als die auf die hintere Seite der Horizontalebene gefallene Horizontalprojection eines Punktes im Raume anzusehen ist.

Man kommt häufig in den Fall, noch eine dritte Projection des Punktes P in die Zeichnung aufnehmen zu müssen. Der dritten Projectionsebene giebt man dann eine zu den schon vorhandenen Ebenen senkrechte Lage, nennt sie die seitliche Verticalebene und bezeichnet die auf sie fallende Projection von P mit P'''. Um sie gleichfalls in der Ebene der Zeichnung anbringen zu können, denkt man sich die seitliche Verticalebene um ihren Durchschnitt mit der ersten Verticalebene gedreht, bis sie mit letzterer in eine Ebene zusammenfällt, und stellt sie dann neben die Zeichnung der Verticalebene. Da die Projec-

tionen P' und P'' die Lage des Punktes P im Raume schon bestimmen, so muss sich P''' aus P' und P'' ableiten lassen; in der That ist P die Ecke eines rechtwinkligen Parallelepipedes, dessen Kanten die Entfernung des P von den drei Projectionsebenen darstellen, kennt man also den Punkt N, in welchem die seitliche Verticalebene die Grundlinie schneidet, so sind $PP''' = NM$, $PP'' = NM'$, $PP' = NM''$ jene Kanten und $NMP'M'$, $NMP''M''$, $NM'P'''M''$ die in die Projectionsebenen fallenden Seitenflächen des Parallelepipedes, welche bei den erwähnten Drehungen der Projectionsebenen ihre Grössen nicht ändern und daher unmittelbar construirt werden können. Das Verfahren ist: durch den Punkt N, in welchem die seitliche Verticalebene die schon vorhandene Verticalebene schneidet, zieht man eine verticale Gerade (den Durchschnitt der beiden Verticalebenen), ferner $P'M' \,//\, P''M'' \,//\, MN$, nimmt $NM_1 = NM'$ (damit beim Zusammenlegen der Ecke an N der Punkt M_1 wieder mit M' zusammenfalle) und construirt das Rechteck $NM_1P'''M''$ aus den Seiten $NM_1 = MP'$ und $NM'' = MP''$. Eben so leicht würde es sein, aus irgend zwei anderen der Projectionen P', P'', P''' die dritte Projection herzuleiten.

Fig. 139.

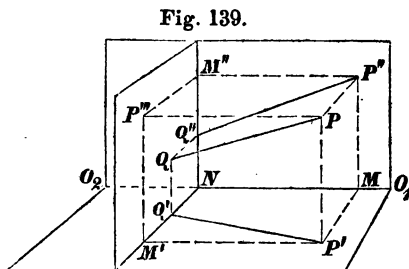
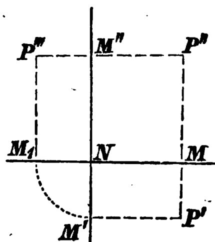


Fig. 140.



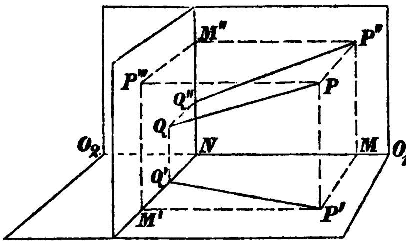
Wenn ein ganzes System von Punkten, z. B. ein Körper, auf drei unter einander senkrechte Ebenen projicirt wird, so entstehen drei verschiedene Ansichten desselben; in der Praxis führen diese häufig etwas andere Namen, ohne sonst irgend davon verschieden zu sein; die Horizontalprojection heisst gewöhnlich Grundriss oder Vogelansicht, die Verticalprojection Aufriss oder Frontalansicht und die seitliche Verticalprojection Profil oder Seitenansicht.

§. 61.

Die Projectionen und Spuren der Geraden.

Lässt man von allen Punkten einer Geraden Senkrechte auf eine Ebene herab, so liegen alle jene Perpendikel in einer Ebene, der sogenannten projicirenden Ebene; ihr Durchschnitt mit der gegebenen Ebene ist die Projection der gegebenen Geraden, und zwar wiederum eine Gerade. Dieser Bemerkung zufolge sind die Projectionen einer Geraden, welche zwei durch ihre Projectionen bestimmte Punkte P und Q verbindet, sehr leicht zu finden;

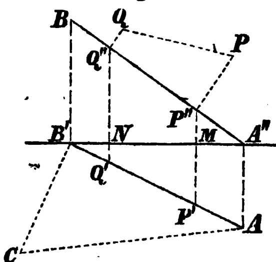
Fig. 139.



die Verbindungslinie $P'Q'$ der Horizontalprojection jener Punkte ist die Horizontalprojection der Geraden PQ im Raume, ebenso $P''Q''$ die Verticalprojection von PQ. Sind umgekehrt die beiden Projectionen einer Geraden gegeben, so ist auch diese selbst völlig bestimmt, weil es alle ihre einzelnen Punkte, wie z. B. P, Q ... sind.

Die vorige Bestimmung der Geraden durch zwei Punkte führt von selbst auf die Aufgabe, „die Entfernung zweier durch ihre Projectionen gegebenen Punkte zu construiren". Die Lösung derselben ergiebt sich durch Betrachtung einer der Ebenen, welche die Gerade projiciren. Die Ebene z. B., wodurch PQ auf die Verticalebene projicirt wird enthält das Viereck $PQQ''P''$, in welchem zwei rechte Winkel ($\angle P''Q''Q$ und $\angle Q''P''P$) und die

Fig. 141.

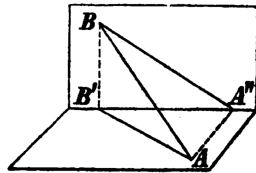


drei bekannten Seiten $P''Q''$, $P''P = MP'$ und $Q''Q = NQ'$ vorkommen, das also leicht zu construiren ist. Am bequemsten geschieht diess dadurch, dass man sich das Viereck $PQQ''P''$ um $P''Q''$ gedreht denkt, bis seine Ebene mit der Verticalebene zusammenfällt; die Construction in einer

Ebene erfordert dann nichts weiter, als die Geraden $P''P = MP'$ und $Q''Q = NQ'$ senkrecht auf $P''Q''$ zu errichten, wo nun PQ die gesuchte Entfernung in ihrer wahren Grösse ist. Ebenso kann man sich das Viereck $PQQ'P'$ um $P'Q'$ gedreht denken, bis seine Ebene mit der Horizontalebene zusammenfällt, und dann besteht die Construction darin, dass man auf $P'Q'$ in P' und Q' Senkrechte errichtet, deren erste $= MP''$, deren zweite $= NQ''$ ist, und die Endpunkte dieser Perpendikel durch eine Gerade verbindet.

Bei hinreichender Verlängerung schneidet die Gerade PQ im Allgemeinen beide Projectionsebenen; die entstehenden Durchschnittspunkte heissen die Spuren (Tracen) der Geraden, und zwar ihre Horizontal- oder Verticalspur, je nachdem der Durchschnitt die horizontale oder verticale Projectionsebene betraf. Man kann auch sagen, die Horizontalspur einer Geraden ist derjenige ihrer Punkte, dessen Entfernung von der Horizontalebene $= 0$ ist, die Verticalspur der Punkt der Geraden, dessen Abstand von der Verticalebene $= 0$ ist, und es verdient diese Ausdrucksweise desswegen Beachtung, weil sie unmittelbar zur Construction der Spuren führt.

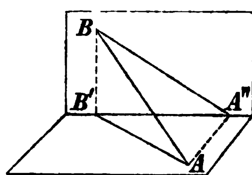
Fig. 142.



Für irgend einen Punkt P der Geraden giebt nämlich MP'' seine Entfernung von der Horizontalebene und MP' seinen Abstand von der Verticalebene an, und es muss folglich für die Horizontalspur $MP'' = 0$, für die Verticalspur $MP' = 0$ sein. Demgemäss findet man die Horizontalspur A der Geraden PQ dadurch, dass man $P''Q''$ bis zum Durchschnitte A'' mit der Grundlinie verlängert und durch A'' eine Verticale bis zum Durchschnitte A mit $P'Q'$ zieht; auf gleiche Weise gelangt man zur Verticalspur B, wenn man $P'Q'$ bis zum Durchschnitte B' mit der Grundlinie verlängert und in B' eine Senkrechte errichtet, welche $P''Q''$ in B schneidet. Umgekehrt können aus den Spuren einer Geraden auch deren Projectionen abgeleitet werden, was um so weniger einer weiteren Auseinandersetzung bedarf, als diese Aufgabe nur ein specieller Fall des allgemeinerer Problemes der Bestimmung einer Geraden durch zwei Punkte ist.

An das Obige knüpft sich die Frage nach der Lage der Geraden gegen die beiden Projectionsebenen, d. h. nach der Construction ihrer Neigungswinkel gegen diese Ebenen. Nun ist aber der Neigungswinkel einer Geraden gegen irgend eine Ebene einerlei mit dem Winkel, welchen die Gerade mit ihrer Projection auf diese Ebene einschliesst, mithin der Winkel BAB' zwischen der Geraden AB und ihrer Horizontalprojection AB' der Neigungswinkel von AB gegen die Horizontalebene, auf gleiche Weise $\angle ABA''$ der Neigungswinkel von AB gegen die Verticalebene.

Fig. 142.



Denkt man sich das rechtwinklige Dreieck BAB' durch Drehung um AB' in die Horizontalebene umgelegt, so besteht die Construction sehr einfach darin, dass man $B'C = B'B$ senkrecht auf AB' errichtet und AC zieht, wo nun $\angle B'AC$ der Neigungswinkel gegeh die Horizontalebene ist; auf ähnliche Weise würde man den Neigungswinkel gegen die Verticalebene erhalten, wenn man $A''D = A''A$ senkrecht auf $A''B$ stellen und BD ziehen wollte.

Die bisher allgemein gehaltenen Betrachtungen erleiden einige Modificationen, wenn die Gerade AB eine specielle Lage annimmt; ist sie z. B. senkrecht zur Horizontalebene, so degenerirt ihre Horizontalprojection zu einem blossen Punkte, welcher zugleich ihre Horizontalspur ist; ihre Verticalprojection steht senkrecht auf der Grundlinie und geht, hinreichend verlängert, durch die Horizontalspur; die Verticalspur fällt ins Unendliche. Ganz ähnlich sind die Erscheinungen, wenn die Gerade senkrecht zur Verticalebene, oder wenn sie normal zur seitlichen Verticalebene, d. h. parallel zur Grundlinie ist. Liegt ferner die Gerade parallel zur Horizontalebene, ohne normal zu einer der Verticalebenen zu sein, so ist ihre Verticalprojection parallel zur Grundlinie und ihre Horizontalprojection schliesst mit der Grundlinie denselben Winkel, wie die Gerade selber ein; Aehnliches erfolgt, wenn die Gerade parallel zur Verticalebene liegt; in beiden Fällen rückt eine der Spuren ins Unendliche hinaus. Auch bei derjenigen Lage

der Geraden, wo beide Spuren in endlichen Entfernungen liegen, wie wir es im Allgemeinen voraussetzten, sind hinsichtlich der Lagen der Spuren mancherlei Fälle möglich; so können z. B. beide Spuren unter oder beide über die Grundlinie fallen, wie man ohne Mühe findet, wenn man beide Projectionen der Geraden alle möglichen Lagen gegen die Grundlinie annehmen lässt.

§. 62.
Zwei Gerade.

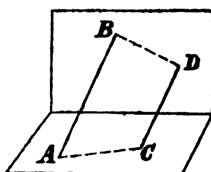
Bei zwei Geraden bedarf es zunächst der Unterscheidung, ob dieselben parallel sind oder nicht, und im letzteren Hauptfalle der weiteren Distinction, ob sie einen oder keinen Punkt gemein haben.

I. Parallele Gerade. Projicirt man zwei parallele Gerade auf irgend eine Ebene, so sind aus nahe liegenden Gründen die projicirenden Ebenen gleichfalls parallel und mithin sind es auch ihre Durchschnitte mit der Projectionsebene, d. h. die Projectionen der beiden Geraden. Auf die Horizontal- und Verticalprojectionen der beiden Geraden angewendet giebt dies den Satz, dass die gleichnamigen Projectionen zweier Parallelen wiederum parallel laufen. Sind umgekehrt die gleichnamigen Projectionen zweier Geraden AB und CD parallel ($A'B' \parallel C'D'$ und $A''B'' \parallel C''D''$), so müssen auch AB und CD selber parallel sein, wie man leicht findet.

Hierauf gründet sich eine einfache descriptive Lösung der Aufgabe: „durch einen gegebenen Punkt P eine Parallele zu einer gegebenen Geraden AB zu legen“. Sind nämlich P' und P'' die Projectionen des Punktes, $A'B'$ und $A''B''$ die der Geraden, so zieht man durch P' eine Gerade $C'D' \parallel A'B'$ und durch P'' eine Gerade $C''D'' \parallel A''B''$; die Geraden $C'D'$ und $C''D''$ sind dann die Projectionen der verlangten Parallelen.

Die Entfernung zweier parallelen Geraden lässt sich gleichfalls leicht finden; die Spuren A und B der ersten Geraden bestimmen nämlich mit den Spuren C und D der zweiten Geraden zusammen ein Trapez, dessen Ebene durch

Fig. 143.

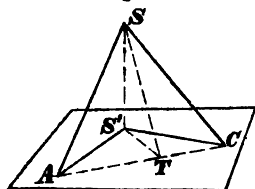


die beiden Parallelen AB und CD bestimmt wird; die Höhe dieses Trapezes ist die gesuchte Entfernung der Parallelen. In einer Ebene kann jenes Trapez dadurch construirt werden, dass man zunächst die Spuren der Geraden aufsucht, nachher die wahren Längen der Geraden AB und CD ermittelt und zuletzt das Trapez aus seinen vier Seiten AB, CD, AC, BD zusammensetzt, was weiter keine Schwierigkeit hat.

Hieran knüpft sich eine einfache Lösung der Aufgabe: „die Entfernung eines Punktes von einer Geraden zu finden“; man legt nämlich durch den gegebenen Punkt eine Parallele zu der gegebenen Geraden und verfährt im Uebrigen ganz wie vorhin.

II. Zwei sich schneidende Gerade. Projicirt man zwei im Punkte S sich schneidende Gerade AB und CD, so erscheint S' als Durchschnitt von $A'B'$ und $C'D'$, ebenso S'' als Durchschnitt von $A''B''$ und $C''D''$; ausserdem haben S' und S'', als Projectionen desselben Punktes, eine solche Lage, dass die Gerade $S'S''$ senkrecht zur Grundlinie steht. Dieser Satz kann leicht umgekehrt werden; liegt nämlich S', als Durchschnitt von $A'B'$ und $C'D'$ betrachtet, in einer Verticallinie mit dem Durchschnitte S'' von $A''B''$ und $C''D''$, so müssen sich auch die Geraden AB und CD selber in einem Punkte S schneiden, deren Projectionen S' und S'' sind.

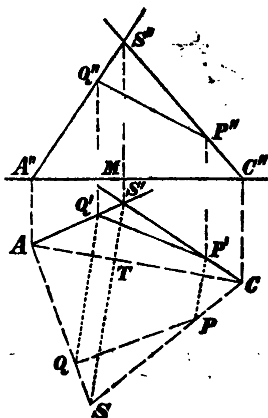
Fig. 144.



Dies vorausgesetzt, entsteht die Frage nach dem Winkel, unter welchem sich die gegebenen Geraden AB und CD schneiden; eine Construction desselben ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Die Verbindungslinie AC der Horizontalspuren beider Geraden bestimmt mit AS und CS zusammen ein Dreieck ACS, in welchem der gesuchte Winkel ASC vorkommt; dreht man dasselbe um AC herum, bis es in die Horizontalebene fällt, so bleiben die Punkte A und C fest, dagegen beschreibt die Spitze S einen Kreis,

dessen Ebene normal zu *AC*, und dessen Centrum derjenige Punkt ist, in welchem die Ebene des Kreises die Gerade *AC* schneidet. Dieser Mittelpunkt sei *T*, mithin *TS* der Halbmesser, so ist *TS'* senkrecht zu *AC*, und der Halbmesser *TS* bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete *SS'*, d. h. die Höhe von *S* über der Horizontalebene, und dessen andere Kathete die Senkrechte *S'T* von *S'* auf die Verbindungslinie *AC* der Horizontalspuren ist. Die letztere Gerade liegt in der Horizontalebene und kann daher unmittelbar construirt werden, die Gerade *SS'* hat man bei der Zeichnung in einer Ebene zwar nicht selber, wohl aber eine ihr gleiche Linie, nämlich die Entfernung der Verticalprojection *S''* von der Grundlinie, und so ist dann die Construction folgende: man bestimmt die Horizontalspuren *A* und *C* der gegebenen Geraden, fällt von *S'* eine Senkrechte *S'T* auf deren Verbindungslinie *AC*, nimmt ferner auf der Verlängerung von *S'T* die Strecke *TS* gleich der Hypotenuse eines aus den Katheten *MS''* und *S'T* gebildeten rechtwinkligen Dreiecks und zieht die Geraden *AS*, *CS*, welche den gesuchten Winkel einschliessen. — Statt der Horizontalspuren kann man auch die Verticalspuren *B*, *D* benutzen, indem man sich das Dreieck *BDS* um *BD* gedreht denkt, bis es mit der Verticalebene zusammenfällt; die hierzu nöthige Construction ist der vorigen ganz analog und wird daher keiner besonderen Auseinandersetzung bedürfen.

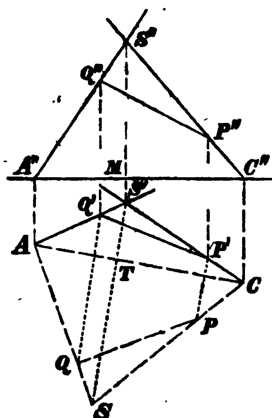
Fig. 145.



Die erwähnte Construction führt zur Lösung der Aufgabe: „durch einen gegebenen Punkt *P* eine Gerade so zu ziehen, dass sie eine gegebene Gerade *AB* unter einem vorgeschriebenen Winkel *w* schneidet“. Verbindet man zunächst einen beliebigen Punkt *S* der Geraden *AB* mit *P* durch die Gerade *SP* und nennt *C*, *D* die Spuren derselben, so kann man wie vorhin

die Ebene ASP oder ASC in die horizontale (oder verticale) Projectionsebene umlegen, hier die Gerade PQ so ziehen, dass $\angle PQS = w$ wird (in der Figur ist dieser Winkel $= 90^0$ genommen) und darauf die Ebene PQS in ihre ursprüngliche Lage im Raume zurückbringen. Dies hat keine Schwierigkeit vermöge der Bemerkung, dass jeder Punkt der Ebene ASC sowohl beim Umlegen in die Horizontalebene als beim Zurückdrehen einen Kreis beschreibt, dessen Ebene senkrecht zu AC ist, und folglich in der Horizontalprojection sein Weg als eine zu AC senkrechte Gerade erscheint. Demgemäss legt man $QQ' \parallel SS'$ bis zum Durchschnitte Q' mit AS', lässt ferner von Q' eine Verticale aufsteigen, welche $A''S''$ in Q'' schneidet, und zieht endlich die Geraden $P'Q'$ und $P''Q''$. Diese sind die Projectionen der gesuchten Geraden, Q' und Q'' die Projectionen ihres Durchschnittes mit der gegebenen Geraden. Auch die wahre Länge der Linie PQ lässt sich jetzt nach §. 61 construiren. Für $w = 90^0$ ist hiermit die Aufgabe gelöst: von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade eine Senkrechte herabzulassen, den Fusspunkt und die Länge derselben zu bestimmen.

Fig. 145.



III. Zwei sich nicht schneidende Gerade. Dem Vorigen zufolge giebt sich die kreuzende Lage zweier Geraden dadurch zu erkennen, dass der Durchschnitt ihrer Verticalprojectionen nicht vertical über dem Durchschnitte ihrer Horizontalprojectionen liegt. Obschon die Geraden in diesem Falle keinen Punkt mit einander gemein haben, also auch unmittelbar keinen Winkel mit einander bilden, so bezeichnet man doch die Verschiedenheit ihrer Lage dadurch, dass man durch einen beliebigen Punkt im Raume Parallelen zu den Geraden zieht und den Winkel zwischen den letzteren als den Winkel ansieht, unter welchem sich die Geraden kreuzen. Nach I. und II. dieses Paragraphen

ist dieser Winkel leicht zu finden, und es wird die Construction am einfachsten, wenn man den willkührlichen Punkt in einer der gegebenen Geraden wählt. Was ferner die kürzeste Entfernung beider Geraden anbelangt, so reichen die bisherigen Mittel zu ihrer Construction nicht aus; es bedarf hierzu der Anwendung der Ebene.

Verbindungen von mehr als zwei Geraden, z. B. räumliche Polygone, können als fortlaufende Verbindungen je zweier Geraden betrachtet werden, und es genügen daher die über zwei Gerade entwickelten Lehren zur Ausführung der an räumlichen Liniensystemen vorkommenden Constructionen.

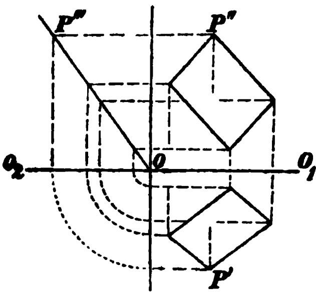
§. 63.

Die Ebene und ihre Punkte.

Eine allseitig begränzte Ebene lässt sich in einer Zeichnung dadurch kenntlich machen, dass man sie als Fläche eines Polygons ansieht und die Peripherie desselben projicirt, bei unbegränzten Ebenen verliert aber dieses Mittel seine Brauchbarkeit; man bestimmt dann die Ebene durch ihre Spuren, d. h. durch die Geraden, in denen sie die Projectionsebenen schneidet. Hinsichtlich der Lage dieser Spuren gegen die Grundlinie sind drei Fälle zu unterscheiden, welche auf die drei allein möglichen Lagen der Ebene gegen die Grundlinie zurückkommen; es kann nämlich entweder die Grundlinie in der Ebene enthalten sein, oder ihr parallel liegen, oder endlich sie schneiden.

I. Wenn die Ebene die Grundlinie in sich enthält, so fallen beide Spuren der Ebene mit der Grundlinie zusammen und die Lage der Ebene erscheint in der Zeichnung als unbestimmt und ist es in der That auch so lange, als nicht der Winkel angegeben wird, unter welchem die Ebene gegen die horizontale oder verticale Projectionsebene geneigt ist. Man bringt diesen Winkel dadurch zur Anschauung, dass man den Durchschnitt der Ebene mit einer seitwärts aufgestellten Verticalebene d. h. eine seitliche Verticalspur der Ebene hinzunimmt; in der Figur ist dieselbe durch OP''' bezeichnet, und der Winkel, welchen sie mit

Fig. 146.

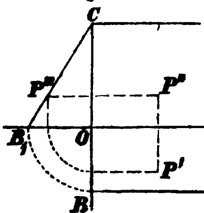


der Grundlinie bildet, stellt den Neigungswinkel der Ebene gegen die horizontale Projectionsebene dar.

Bezeichnen ferner P', P'', P''' die drei Projectionen eines der Ebene angehörigen Punktes, so muss P''' auf der seitlichen Verticalspur der Ebene liegen, weil diese als die seitliche Verticalprojection der ganzen Ebene gelten kann. Hieraus folgt eine sehr einfache Construction, vermittelst deren aus einer der drei Projectionen P', P'', P''' die beiden übrigen abgeleitet werden können. Die Figur zeigt die mehrmalige Anwendung dieser Construction zur Darstellung der Projectionen eines auf der Ebene liegenden Parallelogrammes.

II. Wenn die Ebene und die Grundlinie einander parallel sind, so laufen auch die Spuren der Ebene parallel der Grundlinie; die Ebene ist in diesem Falle durch ihre Spuren unzweideutig bestimmt, weil überhaupt durch zwei parallele Gerade nur eine Ebene gelegt werden kann. Um die Neigungswinkel der Ebene gegen die Projectionsebenen kennen zu lernen, construiren wir noch eine seitliche Verticalspur der Ebene; denken wir uns nämlich durch O eine zur Grundlinie normale Ebene gelegt, so ist ihr Durchschnitt mit den Projectionsebenen eine verticale durch O gehende Gerade und ihr Durchschnitt mit der Ebene die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die auf jener Verticalen von der Horizontal- und Verticalspur gebildeten Abschnitte sind. Die Construction der seitlichen Verticalspur CB_1 hat nach dieser Bemerkung keine Schwierigkeit; die Winkel, welche CB_1 mit irgend einer Horizontalen und mit irgend einer verticalen Geraden einschliesst, sind die Neigungswinkel der Ebene gegen die horizontale und verticale Projectionsebene.

Fig. 147.



Bezeichnen ferner P', P'', P''' die drei Projectionen eines Punktes der Ebene, so muss P''' auf die seitliche Verticalspur der Ebene zu liegen kommen, weil diese als die seitliche Verticalprojection der ganzen Ebene gelten kann; hieraus folgt eine einfache Construction, vermittelst welcher aus einer der drei Projectionen P', P'', P''' die beiden übrigen abgeleitet werden können.

III. Wenn endlich die Ebene die Grundlinie schneidet, so bestehen ihre Spuren aus zwei Geraden AB und AC, die in irgend einem Punkte A der Grundlinie zusammentreffen; die Ebene ist dann durch die beiden sich schneidenden Geraden AB und AC vollständig bestimmt. Um die Neigungswinkel der Ebene gegen die beiden Projectionsebenen zu finden, denken wir uns zunächst durch einen Punkt D der Horizontalspur AB eine zu AB normale Ebene gelegt, welche die Verticalspur in E und die Grundlinie in E' schneidet, wobei E' die Horizontalprojection von E darstellt. Man kennt nun die Gerade $E'E$ unmittelbar, die Gerade $E'D$ gleichfalls, weil sie auf AB senkrecht steht, folglich in dem rechtwinkligen Dreiecke $DE'E$ den Winkel bei D, welcher der Neigungswinkel der Ebene gegen die Horizontalebene ist. Denkt man sich das Dreieck $DE'E$ durch Drehung um $E'E$ in die Verticalebene umgelegt, so hat man folgende Construction in einer Ebene: durch einen beliebigen Punkt D der Horizontalspur AB wird auf letzterer eine Senkrechte errichtet, welche die Grundlinie in E' schneidet, ferner durch E' eine Verticale bis zum Durchschnitte E mit der Verticalspur AC gezogen; ein aus den Katheten $E'E$ und $E'F$ $= E'D$ gebildetes rechtwinkliges Dreieck $E'FE$ enthält bei F den Neigungswinkel der Ebene gegen die Horizontalebene. Auf ähnliche Weise lässt sich der Neigungswinkel der Ebene gegen die Verticalebene construiren.

Fig. 148.

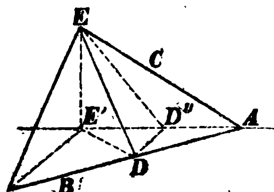
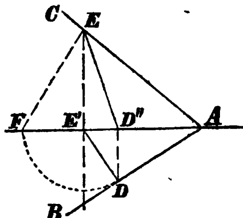


Fig. 149.



Sind P' und P'' die Projectionen

eines auf der Ebene ABC befindlichen Punktes P, so ist dieser erstens in einer durch P' und P'' gehenden Verticalebene zu suchen, deren Durchschnitt mit der Grundlinie M heissen möge; man kann sich ferner durch P eine horizontale Hilfsebene gelegt denken, welche die gegebene Ebene ABC in einer Geraden $PQ \parallel AB$ schneidet. Die Horizontalprojection $P'Q'$ der letzteren liegt gleichfalls parallel zu AB, ausserdem ist $Q'Q$ vertical und QP'' horizontal. Behält man von allen entstandenen Hilfslinien nur diejenigen bei, welche in den beiden Projectionsebenen enthalten sind, so ergiebt sich folgende Construction: um aus der Horizontalprojection P' eines der Ebene angehörigen Punktes dessen Verticalprojection zu finden, lege man durch P' eine zur Horizontalspur AB parallele Gerade, welche die Grundlinie in Q' schneidet, lasse ferner von Q' eine Senkrechte bis zum Durchschnitte Q mit der Verticalspur AC aufsteigen und ziehe durch Q eine Horizontale, welche eine von P' heraufkommende Verticale in dem gesuchten Punkte P'' schneidet. Kehrt man die Reihenfolge der beschriebenen Operationen um, so erhält man eine Construction zur Ableitung der Horizontalprojection P' aus der gegebenen Verticalprojection P''.

Fig. 150.

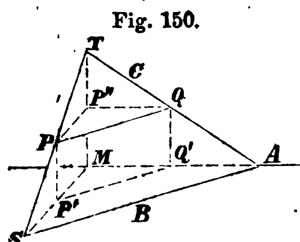
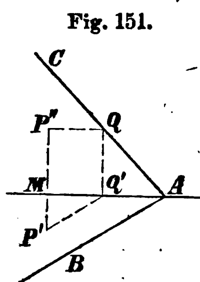


Fig. 151.



§. 64.

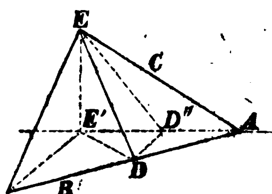
Die Ebene und die Gerade.

Wir können hier wiederum drei Fälle unterscheiden; die Gerade liegt entweder in der Ebene, oder parallel zu ihr, oder sie schneidet dieselbe in einem Punkte.

I. Wenn eine Gerade (DE) in einer Ebene (ABC) enthalten ist, so müssen die Spuren der Geraden in den gleichnamigen Spuren der Ebene liegen (D in AB und E in AC); hieraus ergiebt sich sofort ein Mittel, um aus der einen Projection einer derartigen Geraden die andere Projection

herzuleiten. Bei gegebener Horizontalprojection bestimmt man zunächst ihre Durchschnitte D mit der Horizontalspur AB und E' mit der Grundlinie, legt ferner durch D und E' Verticalen, deren erste die Grundlinie in D'', deren zweite die Verticalspur AC in E schneidet, und zieht dann die gesuchte Verticalprojection $D''E$. Nicht minder leicht ist es, aus der Verticalprojection $D''E$ die Horizontalprojection DE' abzuleiten.

Fig. 148.



Die gegebenen Erörterungen liefern die Lösungen der folgenden, die verschiedenen Bestimmungsweisen der Ebene betreffenden Aufgaben.

a) Durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade eine Ebene zu legen. Bezeichnen A und B die Spuren der ersten, C und D die der zweiten Geraden, so muss die Horizontalspur der gesuchten Ebene die Punkte A und C, ebenso die Verticalspur die Punkte B und D in sich enthalten; die Verbindungslinien AC und BD der gleichnamigen Spuren beider Geraden sind daher die Spuren der verlangten Ebene. Bei hinreichender Verlängerung müssen sich dieselben in einem Punkte der Grundlinie schneiden, was bei der Zeichnung eine Prüfung der Genauigkeit giebt.

b) Durch einen Punkt und eine Gerade eine Ebene zu legen. Bezeichnen wiederum A und B die Spuren der gegebenen Geraden, P' und P'' die Projectionen des gegebenen Punktes P, so kann man diesen mit irgend einem Punkte Q der Geraden AB verbinden und nachher ganz wie vorhin verfahren. Am bequemsten ist es meistentheils, den Punkt Q in unendlicher Entfernung zu wählen, d. h. durch P eine Parallele zu AB zu legen (§. 62, I.), deren Spuren C und D heissen mögen; die Geraden AC und BD sind dann die Spuren der gesuchten Ebene und müssen in einem Punkte der Grundlinie zusammentreffen.

c) Durch drei gegebene Punkte eine Ebene zu legen. Die gegebenen Punkte mögen P, Q, R, ihre

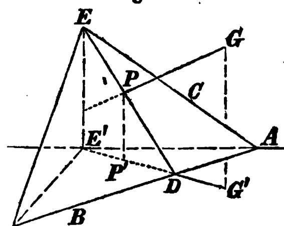
Projectionen P', P'', Q', Q'', R', R'' heissen; die Geraden $P'Q'$ und $P''Q''$ sind die Projectionen von PQ, ebenso $P'R'$ und $P''R''$ die von PR; die Geraden PQ und PR schneiden sich in einem Punkte P, und daher sind nach *a*) die Verbindungslinien ihrer gleichnamigen Spuren die Spuren der verlangten Ebene. Ausser der Controle, dass die Spuren der Ebene durch einen und denselben Punkt der Grundlinie gehen müssen, giebt es hier noch eine zweite; zieht man nämlich auch QR, so müssen die Spuren dieser Geraden in die bereits construirten Spuren der Ebene fallen, weil die Gerade QR von selbst in der Ebene liegt.

II. Wenn zweitens die Gerade der Ebene parallel ist, so muss eine Gerade, welche durch einen beliebigen Punkt der Ebene parallel zu jener Geraden gelegt wird, ganz in der Ebene enthalten sein; man hat an diesem Satze ein leicht anwendbares Kennzeichen, um zu entscheiden, ob eine durch ihre Projectionen bestimmte Gerade in einer mittelst ihrer Spuren gegebenen Ebene liegt oder nicht. Zugleich knüpft sich hieran die Lösung der Aufgabe:

d) Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene parallel zwei sich nicht schneidenden Geraden zu legen. Zieht man durch den gegebenen Punkt Parallelen zu den gegebenen Geraden (§. 62, I.), so hat man zwei sich schneidende Gerade und kann jetzt nach Aufgabe *a*) die Spuren der gesuchten Ebene construiren.

III. Jede einer Ebene nicht parallele Gerade schneidet dieselbe in einem Punkte und es handelt sich zunächst darum, den Durchschnitt der Ebene und der Geraden zu bestimmen. Dazu führt folgende Betrachtung.

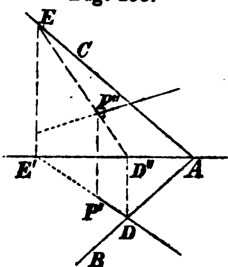
Fig. 152.



Die Gerade GP und ihre Horizontalprojection $G'P'$ liegen in einer zur Horizontalebene senkrechten (der projicirenden) Ebene $GPP'G'$, welche die gegebene Ebene ABC in einer Geraden DE schneidet; diese Durchschnittslinie besitzt die zwei Eigenschaften, dass ihre Horizontalprojection einerlei mit der Horizontalprojection von GP ist, und dass ihre Spuren in den Spuren der gegebenen

Ebene liegen. Vermöge dieser beiden Bedingungen kann die Gerade *DE* leicht construirt werden, ihr Durchschnitt mit *GP* ist dann der Durchschnitt von *GP* und der gegebenen Ebene *ABC*. Dies giebt folgendes Verfahren: man betrachte die Horizontalprojection der gegebenen Geraden zugleich als Horizontalprojection *E'D* einer zweiten in der gegebenen Ebene befindlichen Geraden und bestimme deren Verticalprojection *D''E*; der Durchschnitt dieser Geraden mit der Verticalprojection der gegebenen Geraden ist die Verticalprojection *P''* des gesuchten Punktes, dessen Horizontalprojection *P'* vertical unter *P''* auf der Geraden *DE'* liegt. Statt von der Horizontalprojection der gegebenen Geraden kann man auch von ihrer Verticalprojection ausgehen, sie als gleichzeitige Verticalprojection einer in der Ebene liegenden Geraden ansehen und den Durchschnitt dieser Hilfslinie und der ursprünglichen Geraden aufsuchen; man erhält damit eine zweite Construction, die aber insofern keine neue ist, als sie nur auf eine Vertauschung der Projectionsebenen hinauskommt.

Fig. 153.

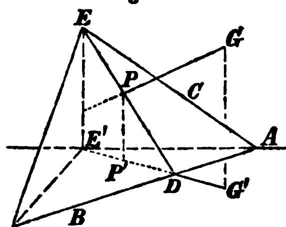


Eine Anwendung des Vorigen ist die Lösung der Aufgabe:

e) Durch einen gegebenen Punkt *P* eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene, nicht in einer Ebene befindliche Gerade g_1 und g_2 schneidet. Nach Aufgabe *b*) kann man durch *P* und g_1 eine Ebene *E* legen und nachher den Durchschnitt *Q* von *E* mit g_2 aufsuchen; die Gerade *PQ* ist die gesuchte Linie.

Wir kehren noch einmal zur Betrachtung der Geraden und der Ebene zurück, um die Lage der Geraden gegen die Ebene, d. h. den Neigungswinkel zwischen beiden zu bestimmen; wir untersuchen dabei zunächst den wichtigen speciellen Fall der senkrechten Lage.

Wenn die Gerade *GP* normal zur Ebene *ABC* ist, so steht die Ebene *GPP'G'* nicht nur auf der horizontalen, sondern auch auf der Ebene *ABC* senkrecht, weil *GPP'G'*



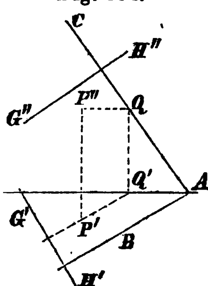
die Normale GP in sich enthält; aus der gleichseitigen rechtwinkligen Lage von $GPP'G'$ gegen die genannten Ebenen ABE' und ABC folgt weiter, dass $GPP'G'$ auch normal zu dem Durchschnitte AB der letzteren Ebene ist, und dass mithin $E'G'$ und AB sich unter einem rechten Winkel schneiden. Man drückt dies gewöhnlich in der Formel aus: „wenn eine Gerade normal zu einer Ebene ist, so steht die Horizontalprojection der Geraden senkrecht auf der Horizontalspur der Ebene"; eine ähnliche und nicht minder einfache Betrachtung zeigt, dass unter derselben Voraussetzung auch die Verticalprojection der Geraden senkrecht auf der Verticalspur der Ebene steht. — Hieran knüpfen sich die beiden folgenden Aufgaben.

f) Durch einen gegebenen Punkt eine Normale zu einer gegebenen Ebene zu legen. Sind P' und P'' die Projectionen des Punktes, AB und AC die Spuren der Ebene so zieht man durch P' eine Senkrechte zu AB, sowie durch P'' eine Senkrechte zu AC; diese beiden Perpendikel sind die Projectionen der gesuchten Normale. Bestimmt man den Durchschnitt Q der Normale mit der Ebene, so ist Q die Projection von P auf die gegebene Ebene; dieses Verfahren lässt sich für beliebig viele gegebene Punkt P, P_1, P_2 ... wiederholen, also überhaupt jede räumliche Figur auf eine gegebene Ebene projiciren. Legt man endlich diese Ebene durch Drehung um ihre Horizontalspur in die Horizontalebene um, indem man auf jeden der Punkte P, P_1, P_2 ... die in §. 62, II. für S angegebene Construction anwendet, so erhält man jene Projection Q, Q_1, Q_2 ... in ihrer wahren Gestalt; dies ist die vollständige descriptive Lösung des Problemes: aus zwei Projectionen eines Raumgebildes jede weitere Projection desselben auf irgend eine andere Ebene abzuleiten.

g) Durch einen gegebenen Punkt eine Normalebene zu einer gegebenen Geraden zu legen. Durch die Horizontalprojection P' des gegebenen Punktes

zieht man vorerst eine Gerade senkrecht zur Horizontalprojection $G'H'$ der gegebenen Geraden und bestimmt den Punkt Q', in welchem jenes Perpendikel die Grundlinie schneidet; ferner errichtet man in Q' eine Verticale und schneidet sie durch eine von P'' ausgehende Horizontale, wodurch der Punkt Q erhalten wird. Legt man endlich durch Q eine Gerade CQA senkrecht zur Verticalprojection $G''H''$ der gegebenen Geraden und zieht nachher von dem Punkte A, in welchem CQ die Grundlinie trifft, eine Gerade $AB \parallel P'Q'$ (also senkrecht zu $G'H'$), so sind AB und AC die Spuren der verlangten Normalebene. Einerseits erhellt nämlich aus der Construction, dass der Punkt O auf der entstandenen Ebene liegt (§. 63), andererseits folgt aus der senkrechten Lage von AB gegen $G'H'$ und von AC gegen $G''H''$, dass die Ebene normal zur gegebenen Geraden ist.

Fig. 154.



Nach diesen Vorbereitungen kann der Neigungswinkel einer beliebigen Geraden gegen eine beliebige Ebene leicht construirt werden. Man lässt nämlich von einem beliebigen Punkte der Geraden eine Senkrechte auf die Ebene herab und bestimmt nach §. 62 den Winkel zwischen der ursprünglichen Geraden und diesen Perpendikel; der gesuchte Neigungswinkel ist dann das Complement des soeben bestimmten Winkels.

§. 65.

Zwei Ebenen.

Der bisherigen Betrachtungsweise entsprechend unterscheiden wir die beiden Fälle der parallelen und der nichtparallelen Lage zweier Ebenen.

I. Parallelebenen. Da zwei parallele Ebenen jede dritte Ebene in parallelen Geraden schneiden, so folgt augenblicklich, dass die gleichnamigen Spuren derartiger Ebenen parallel laufen, wobei wir der Vollständigkeit wegen nicht nur die Horizontal- und Vertical-, sondern auch

die seitlichen Verticalspuren betrachten. Ebenso müssen umgekehrt zwei Ebenen parallel liegen, wenn die drei Paare der gleichnamigen Spuren parallel sind. Um dies aber genauer zu erörtern, haben wir die beiden Fälle zu unterscheiden, ob die Ebenen die Grundlinie schneiden oder nicht. Findet das erste statt, wobei die Spuren der einen Ebene mit AB, AC, BC und die der anderen mit A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 bezeichnet werden mögen, so ist aus nahe liegenden Gründen die letzte der Bedingungen $AB // A_1B_1$, $AC // A_1C_1$, $BC // B_1C_1$ eine Folge der beiden ersten und man hat daher den einfacheren Satz: zwei die Grundlinie schneidende Ebenen sind parallel, wenn sowohl ihre Horizontal-, als ihre Verticalspuren parallel laufen. Im zweiten Falle sind die beiden Ebenen nicht nur einander, sondern auch der Grundlinie parallel, ihre Durchschnitte A und A_1 mit letzterer fallen ins Unendliche und die vier Geraden AB, A_1B_1, AC, A_1C_1 sind sammt und sonders Parallelen zur Grundlinie. Von den erwähnten drei Bedingungen ist jetzt die zweite eine Folge der ersten, die dritte Bedingung bleibt selbstständig, und es muss daher heissen: zwei der Grundlinie parallele Ebenen sind einander parallel, wenn es ihre seitlichen Verticalspuren sind.

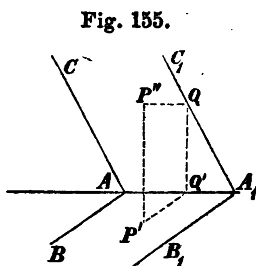
Die Entfernung zweier Parallelebenen bestimmt sich dadurch, dass man von einem beliebigen Punkte P der einen Ebene ein Perpendikel auf die andere herablässt und dessen Fusspunkt Q aufsucht; die Gerade PQ, deren wahre Länge nach §. 61 construirt wird, ist dann der gesuchte Abstand.

Die obigen Erörterungen führen zur Lösung der Aufgabe:

a) Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene parallel einer gegebenen Ebene zu legen. Bezeichnen AB und AC die Spuren der gegebenen Ebene, P' und P'' die Projectionen des gegebenen Punktes, so zieht man durch P' eine Gerade parallel zu AB bis zum Durchschnitte Q' mit der Grundlinie, ferner durch Q' eine Verticale, welche eine von P'' ausgehende Horizontale in Q schneidet, endlich durch Q eine Gerade $C_1A_1 // CA$ und durch

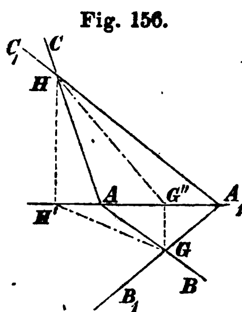
A_1 eine zweite Gerade $A_1B_1 // AB$. Zufolge der Construction liegt nämlich P auf der Ebene $A_1B_1C_1$ und und ist letztere zugleich parallel zu ABC. Wenn die gegebene Ebene ABC der Grundlinie parallel ist, so erleitet das angeführte Verfahren eine kleine Modification, die man leicht finden wird.

Fig. 155.



II. Nichtparallele Ebenen. Der Durchschnitt zweier nicht parallelen Ebenen ist eine Gerade, von der man sagen kann, dass sie in beiden Ebenen zugleich liegt, deren Spuren folglich sowohl in den Spuren der ersten, als in denen der zweiten Ebene enthalten sein müssen; man erkennt hieraus, dass die Spuren der Durchschnittslinie die beiden Punkte sind, in denen sich die gleichnamigen Spuren beider Ebenen schneiden. Wenn also die Horizontalspuren AB und A_1B_1 zweier Ebenen sich im Punkte G, ihre Verticalspuren AC und A_1C_1 im Punkte H schneiden, so ist G die Horizontal- und H die Verticalspur der Durchschnittslinie, deren Projectionen nunmehr leicht zu construiren sind.

Fig. 156.



Um ferner die gegenseitige Lage, d. h. den Neigungswinkel der beiden Ebenen kennen zu lernen, braucht man nur von einem willkührlich im Raume gewählten Punkte Normalen auf die Ebenen herabzulassen und den Winkel zwischen diesen Normalen zu construiren; letzterer ist der gesuchte Neigungswinkel.

Besondere Aufmerksamkeit verdient noch die senkrechte Lage zweier Ebenen, wobei zu bemerken ist, dass eine Ebene $A_1B_1C_1$ auf einer anderen ABC senkrecht steht, wenn die Spuren A_1B_1 und A_1C_1 durch die Spuren irgend eines auf ABC errichteten Perpendikels hindurchgehen. Hieran knüpfen sich folgende Aufgaben.

a) Durch eine gegebene Gerade eine Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen.

Von der gegebenen Geraden sucht man zunächst die Spuren, welche D und E heissen mögen; ferner lässt man von irgend einem Punkte P der gegebenen Geraden eine Senkrechte auf die gegebene Ebene herab und bestimmt die Spuren G und H dieses Perpendikels. Die gesuchte Ebene muss nun die Geraden DE und GH in sich enthalten, ihre Spuren sind folglich die Geraden DG und EH, welche sich bei gehöriger Verlängerung in einem Punkte der Grundlinie schneiden.

c) Durch zwei gegebene Punkte eine Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen. Verbindet man die gegebenen Punkte durch eine Gerade, so kommt diese Aufgabe völlig auf die vorhergehende zurück.

d) Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche einer gegebenen Geraden parallel und senkrecht zu einer gegebenen Ebene ist. Die Spuren der letzteren Ebene mögen AB und AC, die Spuren der Geraden D und E, die Projectionen des gegebenen Punktes P' und P'' heissen; construirt man zunächst die Spuren G und H der Geraden, welche durch den gegebenen Punkt parallel zu DE geht und ferner die Spuren J, K einer von P auf ABC herabgelassenen Senkrechten, so sind GJ und HK die Spuren einer Ebene, die jene Parallele und diese Normale enthält, also den vorgeschriebenen Bedingungen genügt.

e) Die kürzeste Entfernung zweier nicht in einer Ebene liegenden Geraden zu construiren. Die Spuren der ersten Geraden mögen A und B, die der zweiten C und D heissen; legt man durch irgend einen Punkt von AB eine Parallele zu CD und nennt C_1, D_1 ihre Spuren, so sind AC_1 und BD_1 die Spuren einer Ebene, welche die erste Gerade in sich enthält und der zweiten Geraden parallel liegt. Ferner lässt sich nach Aufgabe *b*) eine Ebene construiren, welche die Gerade CD in sich enthält und auf der vorhin erwähnten Ebene (AC_1BD_1) senkrecht steht; der Durchschnitt dieser neuen Ebene mit der Geraden AB giebt den einen Endpunkt der kürzesten Entfernung beider Geraden; der andere Endpunkt findet sich

dadurch, dass man in dem ersten Punkte auf der Ebene AC_1BD_1 eine Normale errichtet und ihren Durchschnitt mit CD bestimmt.

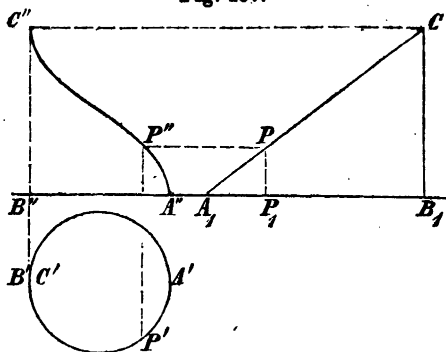
§. 66.

Krumme Linien im Raume.

Sowie ein einzelner Punkt durch seine zwei Projectionen bestimmt wird, so ist auch eine stetige Folge von Punkten, d. h. jede beliebige gerade oder krumme Linie im Raume, durch ihre zwei Projectionen bestimmt; letztere müssen daher gegeben sein, wenn die Curve als unmittelbar bekannt gelten soll, sie sind dagegen aufzusuchen, sobald die Linie durch irgend welche andere Bedingungen bestimmt wird.

Als Beispiel für die Ableitung der Projectionen einer auf bestimmte Weise erzeugten Curve möge die Schraubenlinie gelten. Wenn nämlich die Ebene zweier sich schneidenden Geraden auf die Weise um einen geraden Kreiscylinder herumgewickelt wird, dass die eine Gerade mit der Peripherie der Cylinderbasis zusammenfällt, so beschreibt die andere auf dem Cylindermantel die Schraubenlinie. Um hiernach die Construction auszuführen, denken wir uns den Cylinder in verticaler Stellung, die Horizontalprojection der auf dem Cylindermantel liegenden Schraubenlinie ist dann ein Kreis, welcher zugleich die Basis des Cylinders darstellt.

Fig. 157.



Wenn ferner P_1A_1P den Winkel vorstellt, dessen Ebene auf die Cylinderfläche aufgerollt werden soll, und wenn ferner die bei dieser Operation zusammenfallenden Punkte der Ebene und der Fläche durch gleiche Buchstaben bezeichnet werden, so muss die Gerade A_1P_1 in einen gleich

grossen Kreisbogen AP übergehen, dessen Horizontalprojection $A'P'$ ihm wiederum gleich ist; ausserdem muss die Höhe des Punktes P über der Basis A_1P_1 oder $A'P'$ vor und nach der Aufwickelung dieselbe sein. Man hat daher den Bogen $A'P'$ gleich der Strecke A_1P_1 und die Höhe von P'' über der Grundlinie gleich der Höhe PP_1 zu nehmen. Um möglichst genauer Zeichnung willen rectificirt man zunächst die ganze oder, wie in der Figur, die halbe Basisperipherie, theilt sowohl die Peripherie als die ihr gleiche Gerade in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, zieht von den entsprechenden Theilpunkten P', P_1 Verticalen und nachher Horizontalen durch die Punkte P, in welchen die von P_1 aufsteigenden Verticalen die zweite der aufzuwickelnden Geraden schneiden. In der Figur ist z. B. $A_1P_1 = A'P' = \frac{2}{7} A_1B_1 = \frac{2}{7}$ der halben Peripherie $A'B'$; $A''P''C''$ ist die Verticalprojection eines halben Schraubenumganges, und der Winkel B_1A_1C bestimmt die Steigung der Schraubenlinie.

In dem speciellen Falle, wo eine krumme Linie auf einer von den Projectionsebenen verschiedenen Ebene liegt oder, wie man sagt, einfach gekrümmt ist, braucht man nur eine ihrer Projectionen zu kennen; aus dieser und den Spuren der Ebene kann nachher mittelst des in §. 63 erwähnten Verfahrens die andere Projection abgeleitet werden. Will man endlich die Curve in ihrer wahren Gestalt vor sich sehen, so legt man ihre Ebene durch Drehung (um die Horizontalspur etwa) in eine der Projectionsebenen nieder und wendet dabei auf jeden einzelnen Curvenpunkt die Construction an, welche in §. 62, II. für die Punkte S und P angegeben wurde.

Tangenten und Normalebenen an Curven doppelter Krümmung. Verbindet man zwei Punkte P und Q einer räumlichen Curve durch eine Gerade (Secante) und projicirt das ganze Gebild, so besteht die Horizontalprojection aus einer krummen Linie mit der Secante $P'Q'$, dasselbe gilt von der Verticalprojection; man kann nun aus der Secante PQ eine Tangente werden lassen, wenn man die Lage der Secante soweit ändert, bis ihre beiden Durchschnitte mit der Curve zu einem einzigen Punkte

zusammengefallen sind; dies hat aber zur Folge, dass auch P' und Q' in einen Punkt übergehen, also die Secante $P'Q'$ zur Tangente an der Horizontalprojection und ebenso $P''Q''$ zur Tangente an der Verticalprojection wird. Hieraus ergiebt sich ein sehr einfaches Mittel, um an eine durch ihre Projectionen bestimmte Curve eine Tangente zu ziehen; ist nämlich P der gegebene Berührungspunkt, so legt man durch P' eine Tangente an die Horizontalprojection der Linie und durch P'' eine Tangente an die Verticalprojection derselben; die beiden Tangenten an P' und P'' sind die Projectionen der an P gelegten Tangente im Raume. Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn nicht der Berührungspunkt P, sondern ein anderer Punkt S gegeben ist, durch welchen die Tangente gehen soll, ebenso in dem Falle, wo die gesuchte Tangente einer gegebenen Geraden parallel liegen soll.

Legt man durch den Berührungspunkt P der Tangente eine zu letzterer senkrechte Ebene, so heisst diese die Normalebene der Curve im Punkte P; mittelst der Aufgabe g) in §. 64 hat die Construction dieser Ebene nicht die mindeste Schwierigkeit, sobald man nach dem Vorigen die Tangente bestimmt hat.

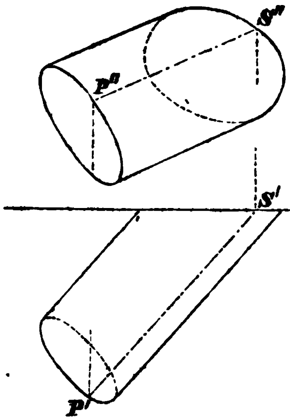
§. 67.
Krumme Flächen.

Analog der Darstellung der Ebene durch ihre Spuren gilt es als allgemeine Regel für die Construction der Flächen, dass sie durch ihre Schnitte mit den Projectionsebenen oder dazu parallelen Ebenen bestimmt werden; vermöge der besonderen Natur mancher Flächen erleidet aber diese Regel nicht selten Ausnahmen und wir betrachten daher die hauptsächlichsten Gattungen der Flächen einzeln.

Cylindrische Flächen entstehen dadurch, dass eine bewegliche Gerade (die erzeugende Linie) parallel sich selbst verschoben wird, während sie gleichzeitig an einer

festen Curve (der Directrix) hingleitet. Diese Bewegung ist leicht durch Construction zu verfolgen, sobald die Projectionen der gleitenden Geraden in einer ihrer Lagen und die Projectionen der Leitlinie gegeben sind; in der That hat man nur durch beliebige Punkte der Directrix Parallelen zu der gegebenen Richtung zu legen. In der Figur z. B. sind P' und P'' die Projectionen eines beliebigen Punktes der ellipsenförmigen Directrix und $P'S'$, $P''S''$ die Projectionen einer erzeugenden Linie der Cylinderfläche; die gleichnamigen Spuren aller erzeugenden Geraden bilden in ihrer stetigen Aufeinanderfolge die Spuren der Fläche; die Figur giebt z. B. die Verticalspur des Cylinders.

Fig. 156.

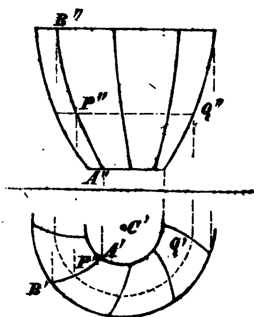


Kegelflächen heissen alle Flächen, welche eine bewegliche Gerade beschreibt, die sich um einen festen Punkt dreht und gleichzeitig an einer festen Linie hingleitet. Eine Kegelfläche ist demnach bestimmt, wenn man jenen festen Punkt (den Mittelpunkt) und die Leitlinie (Directrix) kennt; descriptiv werden der Mittelpunkt und die Directrix durch ihre Projectionen gegeben, und es lassen sich daher die Projectionen beliebig vieler erzeugenden Geraden der Kegelfläche dadurch construiren, dass man die gleichnamigen Projectionen des Mittelpunktes und willkührlicher Punkte der Leitlinie verbindet. Die Spuren aller erzeugenden Geraden bilden in ihrer stetigen Aufeinanderfolge die Spuren der Fläche.

Rotationsflächen entstehen dadurch, dass sich irgend eine gerade, einfach oder doppelt gekrümmte Linie um eine feste Gerade dreht; die erste Linie mag die erzeugende Linie, die zweite die Achse heissen. Denkt man sich der Einfachheit wegen die Achse in verticaler Stellung, so ist ihre Horizontalprojection ein Punkt, und

es müssen ausserdem noch die Projectionen der rotirenden Linie in einer ihrer Lagen gegeben sein, wenn überhaupt die Fläche bestimmt sein soll. Dies vorausgesetzt, lassen sich die Projectionen der beweglichen Curve in jeder anderen Lage auf folgende Weise construiren. $A'B'$ sei die Horizontal-, $A''B''$ die Verticalprojection der rotirenden Linie AB, von welcher irgend ein Punkt P heissen möge, C' sei die Horizontalprojection der vertical stehenden Drehungsachse; bei der Rotation um letztere beschreibt jeder Punkt von AB einen Kreis, dessen Ebene horizontal und dessen Radius gleich der Entfernung des Punktes von der Drehungsachse ist. Die Horizontalprojection dieses Kreises ist ihm selber congruent, seine Verticalprojection besteht aus einer horizontalen Geraden. Wenn demnach P' die Horizontalprojection von P bezeichnet und die Drehung um einen gegebenen Winkel w fortgeschritten ist, so hat P' einen Bogen $P'Q'$ beschrieben, dessen Mittelpunkt in C' liegt, und welcher zu dem Centriwinkel $P'C'Q' = w$ gehört; Q' ist die Horizontalprojection von P' nach der Drehung, und die zugehörige Verticalprojection bestimmt sich als Durchschnitt einer von Q' aufsteigenden Verticalen mit einer von P'' herübergehenden Horizontalen.

Fig. 159.



Als elegantes Beispiel erwähnen wir die Drehung einer Geraden um eine andere, nicht in derselben Ebene liegende; die Construction bleibt dieselbe, indem man $A'B'$ und $A''B''$ als gerade Linien nimmt, wobei es die Schönheit der Zeichnung fördert, wenn man $A'B'$ so lang wählt, dass ein von C' auf $A'B'$ herabgelassenes Perpendikel zwischen A' und B' fällt. Die entstehende Fläche giebt eine deutliche Vorstellung einer solchen Fläche, auf der sich Gerade ziehen lassen, die weder parallel liegen, wie bei den Cylindern, noch in einen Punkt zusammenlaufen, wie bei den Kegeln. Nicht selten bezeichnet man derartige Flächen als windschiefe.

§. 68.

Durchschnitte der Flächen mit Ebenen.

Vermöge der auf irgend eine Weise bestimmten Entstehungsweise einer Fläche sind immer gewisse Schnitte derselben die einfacheren; diese construirt man zunächst und kann nachher aus einer Reihenfolge solcher specieller Schnitte jeden zusammengesetzteren Schnitt herleiten. Wir erörtern dies näher an den schon vorhin genannten hauptsächlichsten Gattungen von Flächen.

Cylindrische und conische Flächen. Der einfachste Schnitt einer Cylinderfläche wird von einer zu den Erzeugungslinien parallelen Ebene gebildet und besteht im Allgemeinen aus parallelen Geraden; in ähnlicher Weise wird der einfachste Schnitt einer Kegelfläche von einer durch den Kegelmittelpunkt gehenden Ebene hervorgebracht und besteht aus sich schneidenden Geraden. Da man im ersten Falle die Richtung der geradlinigen Durchschnitte, im zweiten bereits einen Punkt von jeder Durchschnittsgeraden (den Mittelpunkt) kennt, so bedarf es in jedem Falle nur noch eines Punktes der Durchschnittslinie; zu diesem gelangt man immer mittelst der Spuren der Fläche und der Schnittebene. Ist nämlich s_1 die Horizontalspur der Cylinder- oder Kegelfläche und g_1 die Horizontalspur der schneidenden Ebene, so werden sich im Allgemeinen s_1 und g_1 in einem Punkte S' schneiden; dieser gehört beiden Spuren, mithin auch beiden Flächen gemeinschaftlich an und ist folglich die Horizontalspur des geradlinigen Durchschnittes der krummen und ebenen Fläche. Auf gleiche Weise lässt sich aus den Verticalspuren s_2 und g_2 die Verticalspur S'' des Durchschnittes herleiten; doch bedarf es nur einer von beiden Constructionen, weil jede bereits einen Punkt der Durchschnittslinie bestimmt. In der Figur z. B. sind AB und AC die Spuren der Schnittebene, D' und D'' die Projectionen des Mittelpunktes einer Kegelfläche, deren Verticalspur von AC in den Punkten S'' und T'' geschnitten wird. Da die Ebene so gelegt wurde, dass sie den Kegelmittelpunkt in sich enthält, so besteht ihr Durchschnitt mit der Fläche in zwei Geraden, deren Ver-

ticalprojectionen $D''S''$ und $D''T''$ sind. Die zugehörigen Horizontalprojectionen finden sich dadurch, dass man S'' und T'' auf die Grundlinie nach S', T' projicirt und $D'S'$, $D'T'$ zieht.

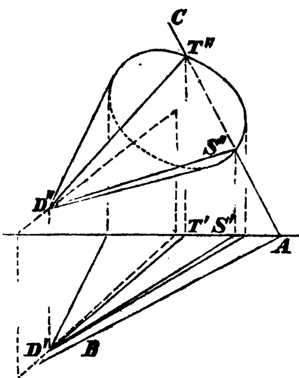


Fig. 160.

Hieraus lässt sich nun der Durchschnitt einer Cylinder- oder Kegelfläche F mit einer beliebigen Ebene E ableiten. Man legt nämlich eine Hilfsebene E_1 so, dass sie F geradlinig und zugleich E schneidet; der erste Durchschnitt heisse f_1, der zweite e_1. Haben nun die Geraden f_1 und e_1 einen Punkt P gemein, so ist dieser zugleich ein Punkt des Durchschnittes von F und E. Die Figur z. B. giebt die Construction des Durchschnittes eines schiefen Kegels mit kreisförmiger Horizontalspur (schiefer Kreiskegel) und einer Ebene; die Projectionen des Kegelmittelpunktes heissen D', D'', die Spuren der Ebene EF und EG. Die Horizontalspur HI der durch den Punkt D gelegten Hilfsebene schneidet die Horizontalspur des Kegels unter Anderem in S' und es ist daher $D'S'$ die Horizontalprojection und $D''S''$ die entsprechende Verticalprojection des geradlinigen Durchschnittes von Kegel und Hilfsebene. Letztere schneidet ausserdem die gegebene Ebene in einer Geraden, deren Projectionen sich auf die in §. 65, II. angegebene Weise finden und durch IK' und $I''K$ bezeichnet sind. Endlich schneiden sich $D'S$ und IK' in P', sowie $D''S''$ und $I''K$

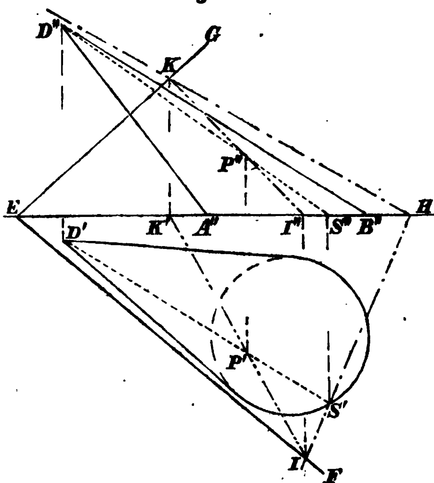
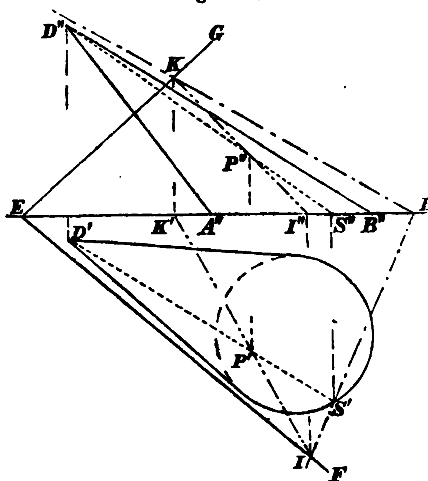


Fig. 161.

Fig. 161.

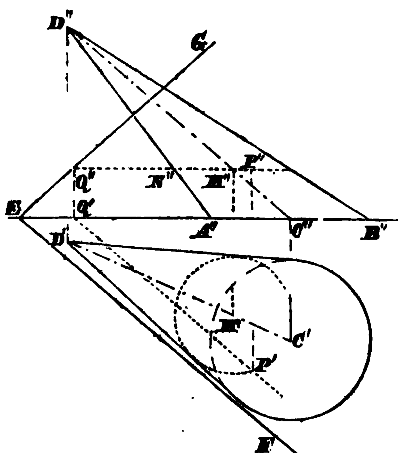


in P''; nach dem Vorigen sind diese Punkte die Projectionen eines der Durchschnittslinie von Kegel und Ebene angehörigen Punktes. Solcher Punkte können beliebig viele aufgesucht werden und ihre Verbindung liefert die Projectionen des Durchschnittes. Will man letzteren in seiner wahren Grösse darstellen, so muss man die Schnittebene sammt allen in ihr liegenden Punkten durch Drehung um die Horizontalspur EF umlegen und dabei auf jeden Punkt P dasselbe Verfahren anwenden, wovon bereits in §. 62, II. Gebrauch gemacht wurde.

Eine andere Auflösung derselben Aufgabe lässt sich aus der Bemerkung herleiten, dass alle parallelen Schnitte einer Cylinderfläche congruente Figuren und alle Parallelschnitte eines Kegels ähnliche Figuren sind. Denkt man sich nämlich eine horizontale Hilfsebene H durch die Flächen F und E gelegt, so ist ihr Durchschnitt mit der ersteren eine der Horizontalspur s_1 ähnliche Curve σ_1 und ihr Durchschnitt mit E eine horizontale Gerade g; schneiden sich nun σ_1 und g in einem Punkte, so gehört dieser wiederum der Fläche und der Ebene gleichzeitig an. Bequem ist diese Methode der horizontalen Hilfsschnitte nur in dem Falle, wo die Construction des Querschnittes σ_1 wenig Mühe macht, wie z. B. beim Kegel mit kreisförmiger Horizontalspur. Bezeichnet hier C' den Mittelpunkt der Basis, so ist jeder Horizontalschnitt ein Kreis, dessen Centrum auf $C'D$ liegt; die Projectionen dieses Kreismittelpunktes fallen daher auf $C'D'$ und $C''D''$, der Radius des Kreises ist proportional dem Abstande des Schnittes von der Spitze, also leicht zu finden. In der Figur ist durch

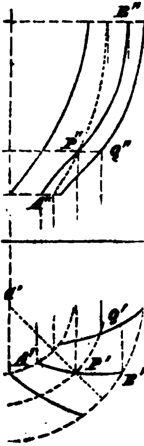
einen beliebigen Punkt M'' auf $C''D''$ eine horizontale Gerade gelegt, welche die Verticalprojection $A''D''$ der Kegelseite in N'' und die Verticalspur der gegebenen Ebene in Q'' schneidet; die Gerade $M''N''Q''$ stellt die Verticalspur und zugleich die Verticalprojection der horizontalen Hilfsebene dar, welche den Kegel in einem Kreise und die gegebene Ebene in einer Geraden schneidet. Die Verticalprojection des Kreismittelpunktes ist M'', und $M''N''$ der Halbmesser; der Kreis selbst wird in der horizontalen Projectionsebene sichtbar, wo sein Mittelpunkt M' vertical unter M'' auf $C'D'$ liegt. Projicirt man ferner Q'' auf die Grundlinie nach Q' und legt durch letzteren Punkt eine Parallele zu EF, so hat man die Horizontalprojection der Geraden, in welcher die gegebene Ebene von der Hilfsebene geschnitten wird. Jener Kreis und diese Parallele haben u. A. den Punkt P' gemein und dieser ist die Horizontalprojection eines Punktes von dem entstandenen Kegelschnitte; die Verticalprojection P'' liegt vertical über P' auf $M''Q''$. Sehr bequem wird dieses Verfahren in dem besonders einfachen Falle, wo der Kegel ein gerader ist und die gegebene Ebene irgend eine zur verticalen Projectionsebene senkrechte Lage hat, also EF senkrecht zur Grundlinie ist; man erhält dann eine directe descriptive Construction der Kegelschnitte.

Fig. 162.



Umdrehungsflächen. Die einfachsten Schnitte der Rotationsflächen entstehen durch Ebenen, welche normal zur Drehungsachse sind; jeder solche Schnitt ist ein Kreis (sogenannter Parallelkreis), dessen Mittelpunkt in der Drehungsachse liegt. In der Verticalprojection erscheint derselbe als horizontale Gerade, in der Horizontalprojection

Fig. 163.



als Kreis, wenn man der Drehungsachse, wie im vorigen Paragraphen, eine verticale Stellung giebt. Die Construction beider Projectionen hat nicht die mindeste Schwierigkeit, sobald entweder ein Punkt des Schnittes oder die Entfernung der schneidenden Ebene von der Horizontalebene gegeben ist; in der Figur stellt $P'Q'$ die Horizontalprojection und $P''Q''$ die Verticalprojection eines Stückes von einem Parallelkreise dar.

Eine zweite Hauptgattung von Schnitten der Umdrehungsflächen erzeugen diejenigen Ebenen, welche die Drehungsachse in sich enthalten; die entstehenden Schnitte heissen Meridiane. Denken wir uns die Drehungsachse wiederum in verticaler Stellung und nennen C' ihre Horizontalprojection, so ist die Horizontalspur einer Meridianebene identisch mit ihrer Horizontalprojection und besteht aus einer durch C' gehenden Geraden; letztere ist zugleich die Horizontalprojection der in der Meridianebene liegenden Meridiancurve. Um ihre Verticalprojection zu finden, denken wir uns die erzeugende (rotirende) Linie der Fläche in mehreren Lagen construirt und nennen $A'B'$ und $A''B''$ ihre Projectionen in einer Lage. Schneidet nun $A'B'$ die geradlinige Horizontalprojection der Meridiancurve in einem Punkte P', so ist dieser Punkt die Horizontalprojection eines Punktes, welcher zugleich der Meridianebene und der erzeugenden Linie, mithin auch der Fläche, angehört, d. h. eines Punktes der Meridiancurve; die zugehörige Verticalprojection P'' liegt vertical über P' auf $A''B''$. Durch Wiederholung dieses Verfahrens, indem man die Horizontalprojection der Meridiancurve durch eine Reihe erzeugender Linien AB, A_1B_1, A_2B_2... schneidet, erhält man beliebig viele Punkte der Verticalprojection der Meridiancurve. Auch hierzu bietet die Fläche, welche durch Umdrehung einer Geraden um eine mit ihr nicht in einer Ebene liegende Achse entsteht, ein bemerkenswerthes Beispiel; die Meridiane sind in diesem Falle Hyperbeln, was wir hier nicht näher auseinandersetzen können.

Auf ähnliche Weise, wie die Meridiane, lassen sich die Durchschnitte der Umdrehungsflächen mit ganz beliebigen Ebenen leicht construiren. Man legt zu diesem Zwecke eine Reihe von Parallelkreisen durch die Fläche; die Ebene jedes derartigen Kreises schneidet die gegebene Ebene in einer Geraden, und wenn diese Gerade mit dem zugehörigen Parallelkreise einen Punkt gemein hat, so ist dieser auch ein Punkt der entstandenen Schnittcurve. Die Construction besitzt die grösste Aehnlichkeit mit der vorhin erwähnten zweiten Construction eines Kegelschnittes, sie ist nur insofern einfacher, als die Punkte C' und M' zusammenfallen, da alle Parallelkreise in der Horizontalprojection als concentrische Kreise erscheinen. Hiernach wird weder die Construction selbst, noch die Umlegung der Schnittebene einer weiteren Auseinandersetzung bedürfen.

§. 69.

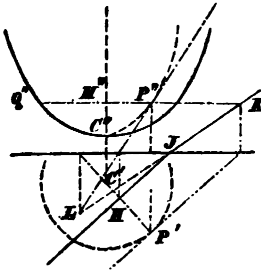
Tangentialebenen und Normalen an Flächen.

Eine Ebene E berührt eine Fläche F in einem Punkte P, wenn sie mit derselben nur den Punkt P gemein hat; legt man durch P irgend eine Ebene E_1, welche die Berührungsebene in der Geraden g_1 und die Fläche in der Linie s_1 schneidet, so haben g_1 und s_1 gleichfalls nur den Punkt P gemein, und es ist daher g_1 Tangente an s_1; dasselbe gilt für die Durchschnitte g_2 und s_2, welche eine zweite Ebene E_2 mit E und F bildet; man hat dann zwei Gerade g_1 und g_2, welche die Fläche in P berühren und ausserdem in der Tangentialebene liegen. Umgekehrt führt diese Bemerkung zur Construction der berührenden Ebene, wenn der Berührungspunkt P gegeben ist; man legt nämlich durch P zwei beliebige Ebenen E_1 und E_2, welche die Fläche F in den Curven s_1 und s_2 schneiden, construirt ferner die Geraden g_1 und g_2, welche jene Schnitte in P berühren, und legt endlich durch g_1 und g_2 eine Ebene, welche die gesuchte Tangentialebene ist. Es versteht sich übrigens von selbst, dass man, um die Construction der Schnitte s_1 und s_2 zu erleichtern, den Hilfsebenen E_1 und E_2 eine mög-

lichst bequeme Lage geben wird, wie wir noch im Einzelnen andeuten wollen.

Bei einer Umdrehungsfläche ist es am einfachsten, durch den gegebenen Berührungspunkt einen Parallelkreis und einen Meridian zu legen. In der Figur z. B. bedeutet $C''Q''$ die Verticalprojection der ebenen Curve, durch deren Umdrehung eine Rotationsfläche entstanden ist, C' die Horizontalprojection der Drehungsachse; P' und P'' sind die Projectionen des Berührungspunktes. Die Horizontalprojection des durch den Berührungspunkt gelegten Parallelkreises ist der aus dem Mittelpunkte C' mit dem Radius $C'P'$ construirte Kreis, seine Verticalprojection die horizontale Gerade $P''Q''$; die Horizontalprojection des durch den Berührungspunkt gehenden Meridianes ist der Halbmesser $C'P'$, die Verticalprojection besteht in der Curve $C''P''$. Legt man jetzt an den Parallelkreis eine Tangente, so erscheint diese in der Horizontalprojection als Tangente in P' am Kreise, in der Verticalprojection bildet sie eine mit $P''Q''$ zusammenfallende Gerade; die Verticalspur der genannten Tangente ist mit K bezeichnet, die Horizontalspur fällt ins Unendliche. Ferner hat man im Punkte P eine Tangente an den Meridian gelegt, die Horizontalprojection derselben fällt mit $C'P'$ zusammen, ihre Verticalprojection berührt die Verticalprojection des Meridianes in P'', die Horizontalspur der Tangente ist H, ihre Verticalspur L. Die Verbindungslinie KL der Verticalspuren beider Tangenten giebt die Verticalspur der gesuchten Tangentialebene, und wenn man den Durchschnitt J von KL und der Grundlinie mit H verbindet, so ist HJ die Horizontalspur der Berührungsebene.

Fig. 164.



Bei Cylinder- und Kegelflächen findet die Berührung mit einer Ebene nicht in einem Punkte, sondern längs einer erzeugenden Geraden statt, man kennt daher gleich im Voraus eine in der Tangentialebene liegende Gerade. Die Horizontalspur der Berührungsebene berührt ferner die Ho-

rizontalspur der Fläche, ebenso die Verticalspur der Ebene die Verticalspur der Fläche, und man erhält hiermit eine zweite und dritte Gerade der Tangentialebene. Dies giebt folgende Construction der berührenden Ebene: man bestimmt zunächst die Projectionen der durch den Berührungspunkt gehenden erzeugenden Geraden, sowie deren Spuren; durch die Horizontalspur der erzeugenden Geraden legt man eine Tangente an die Horizontalspur der Fläche, ebenso durch die Verticalspur jener Geraden eine Tangente an die Verticalspur der Fläche; die erwähnten Tangenten sind die Spuren der Tangentialebene. Bei der practischen Ausführung reicht übrigens die Construction der einen Tangente schon hin.

Errichtet man im Berührungspunkte einer Tangentialebene auf letzterer eine Senkrechte, so entsteht die sogenannte Normale der Fläche in dem gegebenen Punkte; die Projectionen der Normalen ergeben sich unmittelbar dadurch, dass man von den Projectionen des gegebenen Punktes Perpendikel auf die Spuren der Tangentialebene herablässt.

§. 70.

Durchschnitte von Flächen mit Flächen.

Auf demselben Principe, nach welchem die Durchschnitte von Flächen mit beliebig liegenden Ebenen bestimmt wurden, beruht auch die Construction der Durchschnitte je zweier krummen Flächen; schneidet man nämlich zwei Flächen U und V mittelst einer willkührlichen Hilfsebene E, so entstehen zunächst zwei ebene Durchschnittscurven u und v, deren Projectionen u', u'', v', v'' heissen mögen und nach §. 68 construirt werden können; schneiden sich nun u und v in einem Punkte P, so schneiden sich u' und v' in P', ebenso u'' und v'' in P'', und es liefert demnach der Durchschnitt von u' und v' die Horizontalprojection P' sowie der Durchschnitt von u'' und v'' die Verticalprojection P'' eines beiden Flächen zugleich angehörigen Punktes P. Mittelst einer Reihe solcher Hilfsebenen E kann eine beliebige Menge von Punkten der Durchschnittslinie beider Flächen projicirt werden. Es

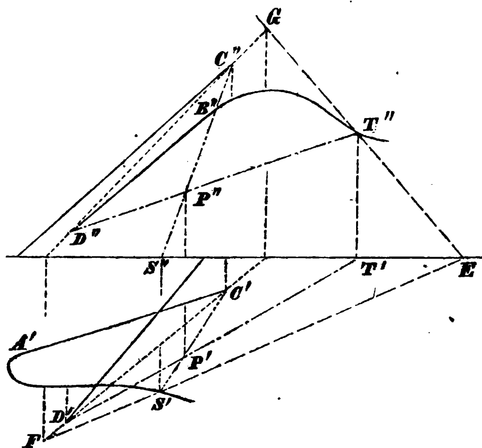
versteht sich übrigens von selbst, dass man den Hilfsebenen immer solche Lagen geben wird, dass die Construction der Durchschnittscurven *u* und *v* möglichst einfach ausfällt und man hat sich dabei nach der Individualität der gegebenen Flächen zu richten. Die hauptsächlichsten Fälle sind folgende.

Eine Cylinderfläche besitzt insofern eine bestimmte Richtung, als ihre sämmtlichen Erzeugungslinien nach einer und derselben Richtung verlaufen; ist nun von zwei Cylinderflächen der Durchschnitt zu construiren, so legt man die Hilfsebene parallel den Richtungen beider Flächen (§. 64 *d*) und hat dann den Vortheil, dass die Hilfsschnitte (*u* und *v*) sammt und sonders gerade Linien sind.

Ist die eine der Flächen cylindrisch, die andere conisch, so legt man die Hilfsebenen durch den Mittelpunkt der Kegelfläche und zugleich parallel der Richtung des Cylinders (§. 64); die Durchschnitte *u* und *v* sind dann wiederum gerade Linien.

Bei zwei Kegelflächen lässt man die Hilfsebene durch die Mittelpunkte der Flächen gehen, um wiederum lauter geradlinige Hilfsschnitte zu erhalten. In der Figur z. B.

Fig. 165.



ist $A'S'$ die Horizontalspur der einen Kegelfläche, C' die Horizontal- und C'' die Verticalprojection ihres Mittel-

punktes, ferner $B''T''$ die Verticalspur der zweiten Kegelfläche, D' die Horizontal- und D'' die Verticalprojection ihres Mittelpunktes; F und G sind die Spuren der Geraden, welche durch die Mittelpunkte beider Flächen geht. Verbindet man einen beliebigen Punkt E der Grundlinie mit F und G, so sind EF und EG die Spuren einer Ebene, welche die Gerade CD oder FG, mithin auch die Kegelmittelpunkte C und D in sich enthält; EF schneidet $A'S'$ in einem Punkte S' und es ist daher $C'S'$ die Horizontalprojection des geradlinigen Durchschnittes der Hilfsebene mit der ersten Kegelfläche, woraus die Verticalprojection $C''S''$ auf gewöhnliche Weise abgeleitet ist. Ebenso bedeutet $D''T''$ die Verticalprojection und $D'T'$ die Horizontalprojection des Durchschnittes der Hilfsebene mit der zweiten Kegelfläche; $C'S'$ und $D'T'$ schneiden sich in P', in gleicher Weise $C''S''$ und $D''T''$ in P'', und es sind nun P' und P'' die Projectionen eines Punktes von der Durchschnittslinie beider Kegelflächen.

Wenn von den beiden sich schneidenden Flächen die eine oder jede zur Classe der Rotationsflächen gehört, so wird man, wenn irgend möglich, die Drehungsachse vertical stellen und die Hilfsebenen horizontal legen. Passende Beispiele hierzu liefern die Durchschnitte einer Kugel mit einem Cylinder oder Kegel, deren Horizontalspuren Kreise sind.

§. 71.

Lagenveränderungen räumlicher Gestalten.

Der Uebergang von irgend einer Lage eines Raumgebildes zu irgend einer anderen Lage geschieht entweder durch Verschiebung, oder durch Drehung, oder durch mehrfache aufeinanderfolgende Verschiebungen und Drehungen; jede solche Lagenveränderung einer Raumgestalt hat selbstverständlich eine Aenderung der Projectionen zur Folge, und es kann daher die Aufgabe gestellt werden, aus den zur ursprünglichen Lage gehörenden Projectionen die neuen Projectionen herzuleiten, welche einer späteren, auf bestimmte Weise entstandenen Lage entsprechen. Die Lösung

dieser Aufgabe ergiebt sich unmittelbar aus der Untersuchung der Aenderungen, welche die Projectionen bei den verschiedenen Bewegungen der Raumgestalt erleiden.

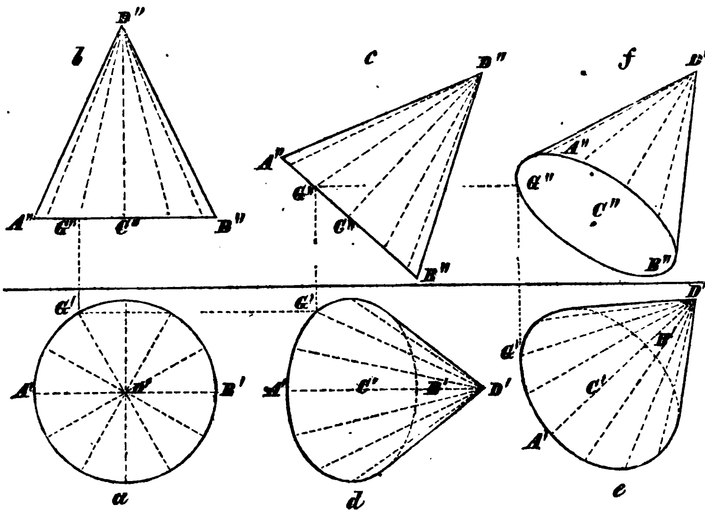
I. Die Verschiebung eines räumlichen Gebildes besteht darin, dass alle Punkte desselben gerade Linien beschreiben, welche einer gegebenen Richtung parallel sind; die Projectionen des Gebildes werden daher gleichfalls parallel verschoben, jeder Punkt P' der Horizontalprojection durchläuft eine Gerade g', jeder Punkt P'' der Verticalprojection eine Gerade g'', und dabei sind g' und g'' parallel den Projectionen der Geraden, längs welcher die Verschiebung vor sich geht, und die wir kurz die Verschiebungsachse nennen wollen. Ist nun die Lage dieser Achse und die Grösse der Verschiebung gegeben, so kennt man die Strecken g' und g'' sowohl der Richtung als der Grösse nach und kann folglich die neuen Projectionen leicht aus den ursprünglichen Projectionen herleiten.

II. Die Drehung eines räumlichen Gebildes bietet eine grössere Mannichfaltigkeit dar, wenn man von den einfacheren zu den complicirteren Fällen fortschreitet; wir betrachten der Reihe nach die Drehung um eine auf der Verticalebene senkrechte Achse, um eine verticale Achse, endlich um eine im Raume beliebig liegende Achse.

a) Wenn sich ein Raumgebild um eine auf der Verticalebene senkrechte Achse dreht, so beschreiben alle Punkte desselben Kreise oder Kreisbögen, deren Ebenen parallel zur Verticalebene liegen; in der Horizontalprojection erscheint der Weg jedes Punktes als eine Parallele zur Grundlinie, die Verticalprojection jedes beschriebenen Kreisbogens ist ein ihm congruenter Bogen, dessen Mittelpunkt in der Verticalprojection der Drehungsachse liegt. Die Verticalprojection des Raumgebildes dreht sich demnach ebenso wie letzteres selbst, diese Drehung wird unmittelbar an der Verticalprojection construirt und daraus die Horizontalprojection mittelst der vorigen Bemerkung abgeleitet, dass sich die Wege aller Punkte in der Horizontalprojection als Parallelen zur Grundlinie darstellen. In der nächsten Figur z. B. sind *a* und *b* die Projectionen eines geraden Kreiskegels mit vertical gestellter Achse; man

hat denselben um eine durch den Mittelpunkt der Basis senkrecht zur Verticalebene liegende Gerade gedreht und hierdurch die neue Verticalprojection *c* erhalten, aus der die Grösse der vorgenommenen Drehung ersichtlich ist, wobei aber C'' seine Lage gegen die Grundlinie behalten hat, weil dieser Punkt die Verticalprojection der Drehungsachse darstellt. Jeder Punkt G'' der ursprünglichen Verticalprojection hat einen Kreisbogen beschrieben, dessen Mittelpunkt in C'' liegt, der zugehörige Punkt G' der Horizontalprojection hat eine Parallele zur Grundlinie durchlaufen; man findet demnach G' in Fig. *d*, wenn man von G'

Fig. 166.



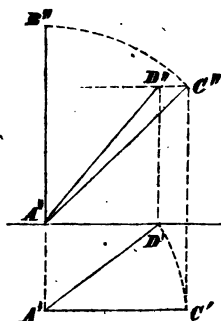
in *a* eine Horizontale herübergehen lässt und sie mittelst einer von G'' in *c* herabgelassenen Verticalen schneidet.

b) Dreht sich ein räumliches Gebild um eine verticale Achse, so beschreiben alle seine Punkte horizontale Kreise; dieselbe Bewegung machen alle Punkte der Horizontalprojection, während die Punkte der Verticalprojection horizontale Gerade durchlaufen; die Sache verhält sich demnach wie vorhin, wenn man die beiden Projectionsebenen gegen einander vertauscht. Um dies an einem Beispiele zu erläutern, denken wir uns den vorigen Kegel nach der

ersten Drehung zum zweiten Male gedreht, und zwar um eine vertical durch die Mitte seiner Basis gehende Achse. Die Horizontalprojection dieser Drehungsachse ist der Punkt C' in Fig. d; er behält in der neuen (gedrehten) Horizontalprojection e seine Lage gegen die Grundlinie, während alle übrigen Punkte, wie z. B. G', Kreisbögen beschrieben haben, von denen C' der gemeinschaftliche Mittelpunkt ist. Jeder Punkt G'' der Verticalprojection c durchläuft eine horizontale Gerade, man findet daher G'' in der neuen Verticalprojection f, wenn man von G' in e eine Verticale aufsteigen lässt und sie mittelst einer von G'' in c ausgehenden Horizontalen durchschneidet.

Eine aufmerksame Betrachtung der verschiedenen Lagen, welche die Kegelachse CD nach einander erhält, führt auf die Frage, ob sich nicht jede beliebige Lage einer Geraden durch zwei aufeinander folgende Drehungen hervorbringen lässt, wenn man die verticale Stellung der Geraden als ihre primitive Lage ansieht. Um dies zu erörtern, betrachten wir $A'D'$ und $A''D''$ als Projectionen einer beliebig liegenden Geraden, deren Spuren A' und D'' sein mögen; wir beschreiben mit $A'D'$ als Radius aus A' einen Kreisbogen, welcher eine durch A' gelegte Horizontale in C' schneidet, ziehen ferner durch C' eine Verticale bis zum Durchschnitte C'' mit einer durch D'' gehenden Horizontalen, und beschreiben endlich aus A'' mit dem Halbmesser $A''C''$ einen Kreisbogen, welcher eine in A'' errichtete Verticale im Punkte B'' schneidet. Betrachten wir nun $A''B''$ und A' als Projectionen einer verticalen Geraden AB, so sind $A'C'$ und $A''C''$ die Projectionen derselben nach ihrer Drehung um eine durch A senkrecht zur Verticalebene gelegte Achse, ferner sind $A'D'$ und $A''D''$ ihre Projectionen nach einer zweiten Drehung um eine vertical durch A gehende Achse. Die letztere Lage war eine willkührlich angenommene, die angegebene Construction bestätigt daher einerseits die oben

Fig. 167.



ausgesprochene Vermuthung und liefert andererseits die nöthigen Drehungswinkel $B''A''C''$ und $C'A'D'$.

Führt man die angegebenen Drehungen rückwärts in umgekehrter Ordnung aus, so kann man jede beliebig schief liegende Gerade in die verticale Stellung zurückbringen; dasselbe gilt von einer beliebigen Raumgestalt, welche mit einer schief liegenden Geraden fest verbunden ist.

c) Wenn eine räumliche Gestalt um eine beliebige Achse im Raume gedreht werden soll, so müssen vor Allem die Projectionen der Drehungsachse gegeben sein; nach dem vorhin Erwähnten kann man jetzt die Drehungsachse sammt dem Raumgebilde in die verticale Stellung zurückversetzen, in dieser Lage die verlangte Drehung (nach *b*) ausführen und endlich die ganze Figur wieder in die schiefe Lage bringen, indem man die beiden hierzu nöthigen Lagenänderungen nach *a* und *b* ausführt.

Auf dem soeben auseinandergesetzten Verfahren beruht die sogenannte axonometrische Darstellung räumlicher Gestalten. Denkt man sich nämlich drei gleich lange rechtwinklig zu einander stehende gerade Linien (z. B. zwei auf einander senkrechte Halbmesser der Basis des vorigen Kegels und die eben so lang genommene Höhe desselben) nach zweimaliger Drehung projicirt, so bilden die Projectionen der drei Geraden gewisse Winkel mit einander und die Längen der Projectionen stehen in bestimmten Verhältnissen. Unter diesen Winkeln und Längenverhältnissen kann man eine solche Wahl treffen, dass die Projectionen eine anschauliche, der wahren perspectivischen Darstellung sich nähernde Form erhalten, und wenn man die einmal gewählten Verhältnisse unverändert beibehält, so ist es auch nicht schwer, aus den Dimensionen der Projection auf die Dimensionen des Objectes zurückzuschliessen, was am besten auf dem Wege der Rechnung geschieht. So entsteht z. B. die isometrische Projection, wenn man beiden Drehungen die Grösse von 45° giebt, wodurch die Projectionen der drei zu einander senkrechten Geraden gleich lang und die von ihnen eingeschlossenen Winkel = 120° werden; man erhält ferner die monodimetrische Projection, wenn die Projectionen der Geraden in

den Verhältnissen $1:1:n$ stehen, wo man $n = \frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{4}$ setzen kann; die **anisometrische** Projection endlich ist diejenige, bei welcher sich die Projectionen der Geraden wie $1:m:n$ verhalten. Beim Krystallzeichnen nimmt man häufig $1:m:n = 1:0{,}9:0{,}5$, die Winkel zwischen den Projectionen sind dann $95^\circ\,11'$, $157^\circ\,0'$, $107^\circ\,49'$. Eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes verbietet der Raum.

Cap. XI.

Die perspectivische Projection.

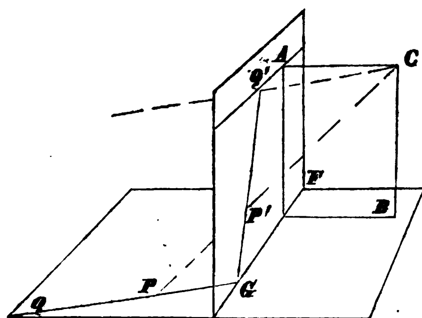
---

§. 72.

Projectionen von Gebilden der Grundebene.

Wenn das Problem, die perspectivische Projection eines im Raume liegenden Punktes zu construiren, bestimmt sein soll, so muss vor Allem die Lage des Projectionscentrums (des Auges) gegen die Projections- oder Bildebene bekannt sein; man bestimmt sie dadurch, dass man sich die Bildebene mit einer darauf senkrechten Ebene, der sogenannten **Grundebene**, fest verbunden denkt und die Entfernungen angiebt, in welchen sich das Projectionscentrum, von beiden Ebenen aus gerechnet, befindet. In der Figur z. B. ist die Lage des Projectionscentrums C durch seine Abstände CA von der Bildebene und CB von der Grundebene bestimmt; die erstere Gerade heisst die **Distanz** und ihr Fusspunkt A der **Augenpunkt**, die zweite Gerade nennt man die **Augenhöhe**.

Fig. 168.



Wir betrachten zuerst den speciellen Fall, wo der perspectivisch abzubildende Punkt P in der Grundebene liegt, und suchen den Punkt P' zu bestimmen, in welchem der Projectionsstrahl CP die Bildebene schneidet, so dass P' die verlangte Projection von P ist. Diese Bestimmung ergiebt sich am einfachsten, wenn wir uns den Punkt P beweglich auf einer unendlich langen in der Grundebene liegenden Geraden vorstellen, deren Durchschnitt mit der Grundlinie FG durch G bezeichnet werden möge. Je grösser nämlich die Entfernung GP wird, desto mehr nimmt der Winkel ab, welchen der Projectionsstrahl CP mit der Geraden GP bildet, der Unterschied unter den Richtungen von CP und GP verringert sich, und wenn endlich P ins Unendliche fortgerückt ist, so hat der nach dem unendlich entfernten Punkte Q gezogene Projectionsstrahl CQ gleiche Richtung mit GQ; die Gerade $CQ \parallel GQ$ schneidet nun die Bildebene in einem Punkte Q' und dieser ist die Projection des unendlich entfernten Endpunktes von GQ. Die Geraden CA und CQ', welche beide der Grundebene parallel liegen, bestimmen eine zu letzterer parallele Ebene CAQ', und diese schneidet die Bildebene in der zur Grundlinie FG parallelen Geraden AQ', die man gewöhnlich den Horizont nennt. Zufolge des vorhin Gesagten haben wir den Fundamentalsatz: Die perspectivischen Projectionen aller unendlich entfernten Punkte der Grundebene liegen auf dem Horizonte.

Um hieraus die perspectivische Abbildung der unendlich langen Geraden GQ abzuleiten, bemerken wir vorerst, dass die nach allen Punkten von GQ gezogenen Projectionsstrahlen eine Ebene, nämlich die durch C und GQ bestimmte Ebene, erfüllen, und dass deren Durchschnitt mit der Bildebene, d. h. die Projection der Geraden GQ, eine Gerade sein muss, dass es folglich nur darauf ankommt, zwei Punkte von GQ perspectivisch zu projiciren und die gefundenen Projectionen durch eine Gerade zu verbinden. Zu jenen zwei Punkten wählen wir den Anfangspunkt G und den unendlich entfernten Endpunkt Q der Geraden GQ; der Anfangspunkt G ist seine eigene Projection, der unendlich entfernte Endpunkt Q hat seine Projection auf dem

Horizonte in Q', mithin ist die begränzte Gerade GQ' die perspectivische Abbildung der unbegränzten Geraden GQ. Für eine andere parallel zu GQ laufende Gerade $G_1 Q_1$ würde der Anfangspunkt G_1 der Projection ein anderer, ihr Endpunkt aber derselbe sein, weil der durch C parallel zu $G_1 Q_1$ gelegte Projectionsstrahl CQ_1 mit dem Projectionsstrahle CQ zusammenfällt; ist also $G_1 Q_1 // GQ$, so ist dagegen die Projection von $G_1 Q_1$ nicht parallel zur Projection von GQ, sie begegnet vielmehr der letzteren in Q', d. h.: Die perspectivische Projection eines Systemes von parallelen Geraden ist ein Strahlenbüschel, dessen Spitze im Horizonte liegt. Der Punkt Q', in welchem sich die Projectionen mehrerer Parallelen GQ, $G_1 Q_1$, $G_2 Q_2$ u. s. w. vereinigen, heisst der Fluchtpunkt, Accidental- oder Verschwindungspunkt jenes Systemes von Parallelen.

Unter den verschiedenen Lagen, welche die Gerade GQ gegen die Grundlinie haben kann, sind besonders drei hervorzuheben. Wenn erstens die Gerade parallel zur Grundlinie liegt, so finden zwischen der Grundebene, der Bildebene und der projicirenden Ebene (durch C und GQ) zwei parallele Durchschnitte statt (Grundlinie und GQ), es folgt daraus, dass der noch übrige Durchschnitt (die Projection von GQ) dieselbe Richtung besitzt; mit anderen Worten: Die Projectionen von Parallelen zur Grundlinie sind der Grundlinie gleichfalls parallel. Scheinbar ist dieser Satz eine Ausnahme der vorigen allgemeinen Regel, ordnet sich ihr aber durch die Bemerkung unter, dass ein Strahlenbüschel in ein System von Parallelen übergeht, sobald seine Spitze (Q') ins Unendliche fortrückt.

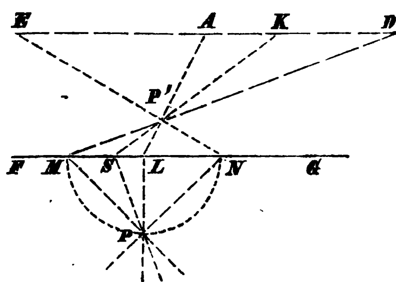
Steht zweitens die Gerade GQ senkrecht auf der Grundlinie FG, so ist dies auch mit dem Projectionsstrahle CQ' der Fall, derselbe wird dann einerlei mit der Senkrechten CA und mithin fällt Q' mit A zusammen, d. h.: Die perspectivischen Abbildungen aller Senkrechten auf der Grundlinie vereinigen sich im Augenpunkte.

Ist drittens der Winkel zwischen FG und GQ ein halber rechter, so kommt in dem rechtwinkligen Dreiecke

ACQ' derselbe Winkel vor, das genannte Dreieck ist daher gleichschenklig-rechtwinklig, nämlich $AQ' = AC$. Der hiermit bestimmte Punkt Q', welcher vom Augenpunkte um die Distanz entfernt auf dem Horizonte liegt, heisst der Distanzpunkt; mittelst dieser Benennung kann man das erhaltene Resultat in den Satz zusammenfassen: Die perspectivischen Abbildungen aller unter einem halben rechten Winkel gegen die Grundlinie geneigten Geraden vereinigen sich im Distanzpunkte.

Mittelst der Bemerkung, dass jeder Punkt der Grundebene als Durchschnitt zweier Geraden gelten kann, deren eine unter einem ganzen und deren andere unter einem halben rechten Winkel gegen die Grundlinie geneigt ist, lässt sich aus dem Vorigen ein sehr einfaches Verfahren zur Projection eines beliebigen Punktes der Grundebene herleiten. Wir denken uns zunächst die Grundebene um die Grundlinie gedreht, bis sie mit der Bildebene zusammenfällt, und nehmen diese Ebene zur Ebene der Zeichnung; in ihr liegt oberhalb der horizontalen Grundlinie *FG* der Horizont mit dem Augenpunkt *A* und dem Distanzpunkte *D*, unterhalb der Grundlinie die Grundebene, worin *P* der gegebene und zu projicirende Punkt sein möge. Lassen wir von *P* auf *FG* eine Senkrechte herab, deren Fusspunkt *L* heisse, so ist *LA* die perspectivische Projection der unendlich lang gedachten Geraden *LP*; nehmen wir ferner $LM = LP$, so ist *MD* die Abbildung der unendlich lang gedachten Geraden *MP*, welche mit der Grundlinie einen halben rechten Winkel einschliesst; der Durchschnitt von *LA* und *MD* muss um die gesuchte Projection des Durchschnittes von *LP* und *MP*, d. h. des Punktes *P* sein. Selbstverständlich kann man die Distanz auch nach der entgegengesetzten Seite nach *AE* auftragen, wenn man

Fig. 169.



entsprechend den $= LP$ zu nehmenden Abschnitt auf die entgegengesetzte Seite nach LN legt; diese Bemerkung ist namentlich in den Fällen nicht überflüssig, wo auf der einen Seite der Zeichnung der Raum beschränkter als auf der anderen ist.

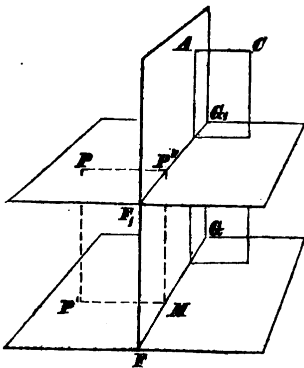
Mittelst der angegebenen Construction hat es keine Schwierigkeit, jedes beliebige System von Punkten der Grundebene, d. h. jede in letzterer gegebene Figur, perspectivisch abzubilden, indem man das erwähnte Verfahren auf alle einzelnen Punkte der Figur anwendet.

§. 73.

Die Projectionen räumlicher Gebilde.

Wenn es darauf ankommt, die Projection eines über oder unter der Grundebene liegenden Punktes P zu finden, so kann man sich durch diesen Punkt eine Hilfsebene parallel zur Grundebene gelegt denken und die Aufgabe dadurch auf die vorige zurückführen, dass man die Hilfsebene als neue Grundebene ansieht. Letztere schneidet die Bildebene in der zu FG parallelen neuen Grundlinie F_1G_1, deren Abstand von FG gleich der Entfernung des Punktes P von der ursprünglichen Grundebene ist. Diese Entfernung bestimmt sich durch die Lage des Punktes P und wird in der Zeichnung auf die Weise angegeben, dass man die Grundebene und Bildebene zugleich als horizontale und verticale Ebene für die orthogonalen Projectionen von P benutzt; ist nämlich P' die Horizontal-, P'' die Verticalprojection des Punktes P und M der Punkt, in welchem die anfängliche Grundlinie FG von der Ebene $P'PP''$ geschnitten wird, so ist $P''M$ gleich der Entfernung des Punktes P von der Grundebene und es findet sich jetzt die perspectivische Projection von P auf dieselbe Weise,

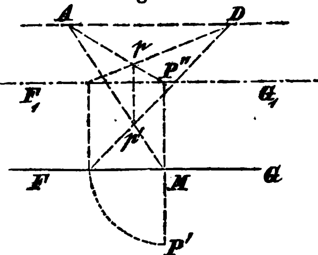
Fig. 170.



wie früher die perspectivische Projection von P', indem man die neue Grundlinie durch P'' legt. Die Construction selbst wird aus der nächsten Figur hinreichend erhellen.

Nicht überflüssig ist die Bemerkung, dass die perspectivische Projection einer verticalen Geraden, wie z. B. $P'P$, wiederum vertical stehen muss (weil sie der Durchschnitt zweier verticalen Ebenen ist), und dass folglich die perspectivische Projection von P vertical über oder unter der perspectivischen Projection von P' liegen muss. Dieser Bemerkung zufolge kann man sich die Construction der neuen Grundlinie $F_1 G_1$ ersparen; man bestimmt nämlich zunächst die perspectivische Abbildung p' von der Horizontalprojection P' des Punktes P, legt durch p' eine Verticale und schneidet diese mittelst der Geraden $P''A$, welche von der Verticalprojection P'' nach dem Augenpunkte A gezogen ist.

Fig. 171.



Hieraus folgt von selbst ein ganz allgemeines Verfahren zur perspectivischen Darstellung eines beliebigen Punktesystemes, d. h. irgend einer Raumgestalt in irgend einer Lage; man entwickelt nämlich vorerst (nöthigenfalls unter Zuziehung von §. 71) die beiden orthogonalen Projectionen des gegebenen Objectes, die zur Abkürzung Grundriss und Aufriss heissen mögen, man construirt ferner nach §. 72 die perspectivische Abbildung des Grundrisses und trägt die dem Aufrisse entnommenen Höhen auf die nämliche Weise perspectivisch ein, wie es vorhin mit der Höhe $P'P = MP''$ geschah.

Man besitzt nunmehr auch die Mittel, um alle in Cap. X. entwickelten descriptiven Auflösungen geometrischer Aufgaben perspectivisch darzustellen; wählt man nämlich die Ebene der Horizontalprojection zur Grundebene und die Ebene der Verticalprojection zur Bildebene, so kann man aus den Projectionen P' und P'' jedes Punktes die perspectivische Abbildung p ganz wie vorhin ableiten. Es ist dies eine sehr zu empfehlende Uebung.

§. 74.

Wahl der Distanz; Modificationen des allgemeinen Verfahrens.

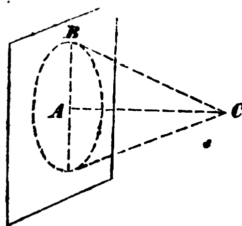
Zufolge ihrer Entstehungsweise ist jede perspectivische Projection nur für einen bestimmten Standpunkt des Beschauers richtig und darf daher, wenn sie nicht als blosse geometrische Figur, sondern als eigentliches Bild gelten soll, auch nur von dieser bestimmten Stelle aus betrachtet werden. Dieser Ort des Auges bestimmt sich dadurch, dass man auf der Bildebene im Augenpunkte eine Normale errichtet und deren Länge gleich der Distanz nimmt. Hierbei entsteht von selbst die Frage, ob es auch möglich sein wird, von dem so bestimmten Standpunkte aus das Bild deutlich und ohne Zwang zu übersehen; obschon diese Frage bereits in das Gebiet der Physik hinübergreift, so bedarf sie doch hier der Erledigung, weil jeder Zeichner wünschen muss, dass seine Darstellungen mit einem Blicke deutlich übersehen werden können.

Nach sicheren Erfahrungen wird der Raum, welchen ein gesundes Auge ohne Mühe zu überblicken vermag, von einer Kegelfläehe begränzt, deren Seite mit der Achse (CA) einen Winkel von ungefähr 26° bildet; die auf der Augenachse senkrechte Bildebene schneidet jene Kegelfläche in einem Kreise, dem sogenannten Gesichtskreise, und es findet zwischen der Distanz und dem Halbmesser AB des Gesichtskreises die Beziehung

$$\frac{AB}{AC} = \tan ACB = \tan 26^\circ = 0{,}4877\ldots,$$

statt; runden wir den Decimalbruch zu 0,5 ab, so folgt $AB = \frac{1}{2} AC$ oder $AC = 2\,AB$ und hiernach bestimmt sich entweder der Gesichtskreis aus der Distanz oder diese aus jenem. Gewöhnlicher ist der zweite Fall, weil man sich in der Regel von vornherein für eine bestimmte Grösse der Zeichnung entschieden, ebenso einen bestimmten Augenpunkt festgestellt hat und folglich nur noch die

Fig. 172.



Distanz so zu bestimmen ist, dass das ganze Bild deutlich und ohne Zwang übersehen werden kann. Wäre nun z. B. das Rechteck *FGHJ* die Begränzung des Bildes und *A* der Augenpunkt, so muss das genannte Rechteck als ein Theil des Gesichtskreises angesehen werden und man findet letzteren, wenn man aus *A* mit dem Abstande des *A* von der entferntesten Ecke des Rechtecks, also in der Figur mit *AJ* einen Kreis beschreibt; die Distanz *AD* beträgt jetzt das Doppelte von *AJ*.

Fig. 173.

Wenn man den Distanzpunkt auf die angegebene Weise bestimmt, so ist man zwar sicher, Darstellungen von malerischer Wirkung zu erhalten, man hat aber bei der Construction mit dem lästigen Uebelstande zu kämpfen, dass der Distanzpunkt immer etwas entfernt liegt und häufig über die Gränzen der Zeichnung hinausfallen wird. Dies erfordert einige Modificationen des Verfahrens, wonach der Grundriss eines Körpers perspectivisch projicirt wird; für das Eintragen der Höhen ist nach der zweiten vorhin erwähnten Methode der Distanzpunkt nicht nothwendig, also auch in dieser Beziehung nichts zu ändern.

Fig. 174.

a) Legen wir durch die perspectivische Projection *P'* eines der Grundebene angehörigen Punktes *P* eine willkührliche Gerade, welche den Horizont zwischen *A* und *D* in *K* und die Grundlinie zwischen *L* und *M* in *S*

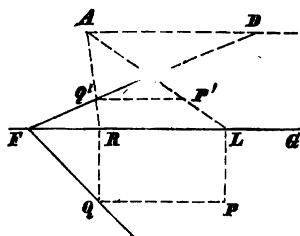
schneidet, so entstehen zwei ähnliche Dreiecke $P'SL$ und $P'KA$; ferner sind die Dreiecke $P'ML$ und $P'DA$ ähnlich, und aus beiden Bemerkungen zusammen folgt

$$AK : AD = LS : LM = LS : LP.$$

Wenn demnach AK ein bestimmter aliquoter Theil von AD ist, so macht LS einen eben solchen aliquoten Theil von $LM = LP$ aus, d. h. man findet den Punkt P' auch dadurch, dass man $LS = \frac{1}{m} LP$, entsprechend $AK = \frac{1}{m} AD$ nimmt, wo m eine beliebige Zahl bedeutet, und SK statt MD zieht. Sehr gewöhnlich ist es, $m = 2$ zu nehmen, d. h. mit halber Distanz zu zeichnen. Obschon dieses Verfahren bei nur wenigen Punkten mit Vortheil benutzt werden kann, so wird es doch sehr zeitraubend, wenn eine grosse Menge von Punkten projicirt werden soll; man thut dann besser, den Gebrauch des Distanzpunktes ganz aufzugeben und sich der folgenden Methode zu bedienen.

b) Nach der vorhin erwähnten Bestimmung des Distanzpunktes ist $AD_1 = AD_2 = AJ = \frac{1}{2} AD$; über FG als Grundlinie construiren wir das Quadrat $FGKL$, ziehen nach dem Augenpunkte A die Geraden FA, GA und durchschneiden sie in K' und L' mittelst zweier Geraden, welche von D_1 und D_2 nach dem Mittelpunkte E der Grundlinie FG gezogen sind. Da $GE = \frac{1}{2} GF$, d. h. $GE = \frac{1}{2} GK$ und gleichzeitig $AD_1 = \frac{1}{2} AD$ ist, so muss K' die perspectivische Projection von K und überhaupt das Trapez $FGK'L'$ die Abbildung des Quadrates $FGKL$ sein. Zieht man noch die Gerade FK', so ist diese die perspective Abbildung von FK, und es würde bei hinreichender Verlängerung FK' durch den Distanzpunkt D gehen, welcher aber nicht weiter in Frage kommt. Aus dieser einen Distanzlinie FK', die durch Anwendung der halben Distanz (wie in *a*) erhalten wurde, lässt sich jede andere Distanzlinie herleiten. Um dies nachzuweisen, legen wir durch die perspectivische Projection P' eines Punktes P der Grundebene eine

Fig. 175.



horizontale Gerade bis zum Durchschnitte Q' mit der bekannten Distanzlinie *FD* und ziehen AQ' bis zum Durchschnitte *R* mit der Grundlinie *FG*. Die Gerade $P'Q'$ ist die perspectivische Projection einer Geraden $PQ // FG$, ebenso Q' die Projection des Punktes *Q*, welcher einerseits auf jener Parallelen *PQ*, andererseits auf der Geraden *FQ* liegt, die mit *FG* einen halben rechten Winkel einschliesst; endlich ist $AQ'R$ die Projection einer in *R* senkrecht auf der Grundlinie stehender Geraden *RQ*. In dem gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke *FRQ* hat man aber $FR = RQ$, ferner $RQ = LP$, und es ergiebt sich daraus folgende Construction: man fälle wie früher von *P* die Senkrechte *PL* auf die Grundlinie und ziehe *LA*, nehme dagegen $FR = LP$, durchschneide die Distanzlinie *FD* mittelst der Geraden *RA* in Q' und lege durch Q' eine Horizontale, welche auf *LA* die gesuchte Projection P' von *P* bestimmt. Dieses Verfahren ist von sehr bequemer Anwendung, sobald man sich auf die vorhin erwähnte Weise eine Distanzlinie *FD* verschafft hat.



Druck von B. G. Teubner in Dresden.

